ANÁLISE FUNCIONAL – 1° SEMESTRE DE 2022

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

Estas notas começaram a ser escritas no segundo semestre de 2004, quando ministrei Introdução à Análise Funcional (MAT 5721) para o programa de pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Estão sendo reformuladas e ampliadas neste primeiro semestre de 2022 para uma oferta conjunta de MAT 0334 (Análise Funcional para o Bacharelado em Matemática do IME-USP) e MAT 5721.

Os textos que mais influenciam estas notas são [14, 8, 15].

Sumário

1. Espaços Métricos, Espaços Normados, e seus completamentos

Recordemos que um *espaço métrico* (X, d) é um conjunto X munido de uma *métrica* (ou *distância*) d. Com isso queremos dizer que d é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para todos $x, y, z \in X$: (i) $d(x, x) = 0$, (ii) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$, (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ e (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. O axioma (iv) é chamado de *desigualdade triangular*. Se (X, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $Y \subseteq X$ torna-se naturalmente um espaço métrico se tomarmos como métrica a restrição de d a $Y \times Y$.

`Exemplo` **1.1.** A menos que se diga algo em contrário, sempre veremos $\mathbb{R}$ como um espaço métrico com a distância $d(x, y) = |x - y|$.

Problema **1.1.** Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$, para todos $x, y, z \in X$.

Problema **1.2.** Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Defina

$$d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$$

por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. Mostre que $(X_1 \times X_2, d)$ é um espaço métrico.

A métrica d do Problema 1.2 no produto cartesiano $X_1 \times X_2$ é chamada de *métrica do produto*. A menos que se diga algo em contrário, suporemos sempre que o produto cartesiano de dois espaços métricos está munido da métrica do produto.

Recordemos também que uma norma em um espaço vetorial real ou complexo V é uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para todos $u, v \in V$ e para todo escalar α: (i) $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$, (ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ e (iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Segue de (ii) que $\|0\| = 0$. A propriedade (iii) é chamada de *desigualdade triangular*.

Problema **1.3.** Seja V um espaço vetorial e seja $\|\cdot\|$ uma norma em V. Mostre que $d(u, v) = \|u - v\|$ define uma métrica em V.

Chama-se de *métrica induzida pela norma* a métrica definida no Problema 1.3.

Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico X é *convergente* se existe $a \in X$ tal que $d(x_n, a) \longrightarrow 0$. O elemento a é então chamado de *limite* da sequência, o que se denota por

$$x_n \longrightarrow a \quad \text{ou} \quad \lim_n x_n = a.$$

PROBLEMA **1.4.** Seja V um espaço vetorial normado, sejam (x_n) e (y_n) sequências em V, sejam α e β números complexos.
(a) Mostre que $x_n \to 0$ se e somente se $\|x_n\| \to 0$.
(b) Mostre que, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$.

Uma função entre dois espaços métricos $f : X \to Y$ é *contínua em* $a \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $d(x, y) < \delta$. Diremos simplesmente que *f é contínua* se f for contínua em todo $a \in X$.

PROBLEMA **1.5.** Mostre que uma função entre dois espaços métricos $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$ se e somente se $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ sempre que $x_n \longrightarrow a$.

PROBLEMA **1.6.** Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que a distância $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. `Sugestão`: use a desigualdade do Problema 1.1.

PROBLEMA **1.7.** Seja V um espaço vetorial normado complexo.
(a) Mostre que $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
(b) Dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in V$, mostre que a função

$$V \ni y \longmapsto \|x + \alpha y\| \in \mathbb{R}$$

é contínua.

Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência de Cauchy* no espaço métrico (X, d) se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ sempre que $n, m \geq N$.

PROBLEMA **1.8.** Mostre que toda sequência convergente é de Cauchy. Dê exemplo de um espaço métrico no qual exista uma sequência de Cauchy que não converge.

`Definição` **1.2.** *Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço métrico é limitada se existem $a \in X$ e $R > 0$ tais que $d(x_n, a) < R$ para todo n.*

PROBLEMA **1.9.** Mostre que uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço vetorial normado é limitada se e somente se existe $R > 0$ tal que $\|x_n\| < R$ para todo n.

PROBLEMA **1.10.** (a) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico X. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada

PROBLEMA **1.11.** Seja (X, d) um espaço métrico, sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sequências de Cauchy em X. Mostre que existe o limite $\lim_n d(x_n, y_n)$.

Uma *subsequência* da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência da forma $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x'_n = x_{\phi(n)}$ para alguma $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que[1] $\lim_n \phi(n) = +\infty$. A própria sequência é uma subsequência de si própria.

PROBLEMA **1.12.** Seja $(x_n)_n$ uma sequência em um espaço métrico. (a) Mostre que, se $x_n \longrightarrow a$, então toda subsequência de $(x_n)_n$ também converge a a. (b) Mostre que, se toda subsequência de $(x_n)_n$ é convergente, então os limites de todas as subsequências são iguais entre si.
`Dica`: Dadas duas subsequências de uma sequência, uma terceira subsequência pode ser obtida intercalando as duas subsequências dadas.

PROBLEMA **1.13.** Mostre que, se uma sequência de Cauchy (x_n) em um espaço métrico possui uma subsequência convergente, então ela converge.

[1] É comum se exigir também que ϕ seja estritamente crescente. Não é o que fazemos aqui.

Problema **1.14.** Seja $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x'_n = x_{\phi(n)}$, uma subsequência da sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mostre que existe e é nulo o limite $\lim_n d(x_n, x'_n)$.

Problema **1.15.** Mostre que toda sequência de Cauchy (x_n) em um espaço métrico (M, d) possui uma subsequência (x'_n) tal que

$$d(x'_n, x'_m) < 1/n, \text{ se } m \geq n.$$

`Definição` **1.3.** *Um espaço métrico (X, d) é* completo *se toda sequência de Cauchy em X é convergente.*

`Definição` **1.4.** *Um espaço de Banach é um espaço vetorial (real ou complexo), munido de uma norma $\|\cdot\|$, que se torna um espaço métrico completo quando munido da métrica induzida por $\|\cdot\|$.*

`Definição` **1.5.** *Diz-se que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial V são equivalentes se existirem constantes positivas c e d tais que $c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq d\|v\|_1$ para todo $v \in V$.*

Problema **1.16.** Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas equivalentes no espaço vetorial X. Mostre que $(X, \|\cdot\|_1)$ é completo se e somente se $(X, \|\cdot\|_2)$ é completo.

`Definição` **1.6.** *Diz-se que um subconjunto S de um espaço métrico X é fechado em X se, dada qualquer sequência $(x_n)_n$, $x_n \in S$, que converge em X, $x_n \longrightarrow a$, então o limite da sequência pertence a S, $a \in S$. Chama-se de fecho de um conjunto S o menor fechado que contém S. O fecho de S é denotado por $\overline{S}$.*

Problema **1.17.** Seja (X, d) um espaço métrico, seja S um subconjunto de X, seja d_S a restrição de d a $S \times S$. (a) Mostre que, se (S, d_S) for completo, então S é fechado em X. (b) Mostre que, se (X, d) for completo e se S for fechado em X, então (S, d_S) é completo.

`Exemplo` **1.7.** Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo. Demonstremos essa afirmação primeiro para $\mathbb{C}^n$ munido da "norma-∞",

$$\|\mathbf{z}\|_\infty = \max\{|z_1|, \cdots, |z_n|\}, \ \mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$|z_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}, \ z_j = x_j + iy_j, \ x_j, y_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \cdots, n.$$

Seja $(\mathbf{z}^k)_k$ uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\mathbf{z^k} = (z_1^k, \cdots, z_n^k) \in \mathbb{R}^n$, $z_j^k = x_j^k + iy_j^k$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, n$. Segue do Problema 1.10 que $(\mathbf{z}^k)_k$ é limitada. Segue da definição da norma $\|\cdot\|_\infty$ que $(x_1^k)_k$, $(y_1^k)_k$, $\cdots$, $(x_n^k)_k$ e $(y_n^k)_k$ são sequências limitadas de números reais. Segue do Teorema de Bolzano-Weierstraß (toda sequência real limitada tem subsequência convergente) que $(x_1^k)_k$ possui uma subsequência convergente $({}'x_1^k)_k$, ${}'x_1^k = x_1^{\phi(k)}$. A sequência $({}'\mathbf{z}^k)_k$, ${}'\mathbf{z}^k = \mathbf{z}^{\phi(k)}$, é limitada e é tal que $({}'x_1^k)_k$ converge. Aplicando mais uma vez o Teorema de Bolzano-Weirstraß, podemos passar para uma subsequência $({}''\mathbf{z}^k)_k$ tal que $({}''x_1^k)_k$ e $({}''y_1^k)_k$ sejam convergentes. Assim por diante, depois de aplicar o Teorema de Bolzano-Weirtrass $2n$-vezes, teremos obtido uma subsequência convergente da sequência $(\mathbf{z}^k)_k$. Logo, a sequência de Cauchy $(\mathbf{z}^k)_k$ possui uma subsequência convergente. Segue do Problema 1.13 que $(\mathbf{z}^k)_k$ converge, o que prova que $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ é completo.

Seja agora $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado complexo de dimensão n. Escolhendo uma base qualquer de V, a aplicação que manda um elemento de V em suas coordenadas relativas à base escolhida define um isomorfismo linear $T : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

Podemos tomar o *pushforward* por T da norma $\|\cdot\|$ para obter uma nova norma em $\mathbb{C}^n$, $|||\mathbf{z}||| = \|T^{-1}\mathbf{z}\|$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Como todas as normas em $\mathbb{C}^n$ são equivalentes à norma-∞ (veja o Lema 1.8 a seguir), segue que existem constantes postivas c e d tais que

$$c\,|||\mathbf{z}||| \leq \|\mathbf{z}\|_\infty \leq d\,|||\mathbf{z}|||, \quad \text{para todo } \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$$

ou, equivalentemente, fazendo $T^{-1}(\mathbf{z}) = v$,

$$c\,\|v\| \leq \|Tv\|_\infty \leq d\,\|v\|, \quad \text{para todo } v \in V. \tag{1}$$

Desta última desigualdade decorre que, se uma dada e arbitrária sequência $(v_n)_n$ é de Cauchy em $(V, \|\cdot\|)$, então $(Tv_n)_n$ é de Cauchy em $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$, que é completo; a sequência $(Tv_n)_n$ possui portanto uma subsequência convergente $(Tv'_n)_n$, $Tv'_n \longrightarrow \mathbf{z}_0$ em $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Aplicando novamente (1), concluímos que $v_n \longrightarrow T^{-1}(\mathbf{z}_0)$. Isto prova que $(V, \|\cdot\|)$ é completo. Para o caso de um espaço vetorial normado real de dimensão finita, a demonstração de que ele é completo é completamente análoga, até um pouco mais simples.

Lema 1.8. *Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em $\mathbb{C}^n$. Então existem constantes positivas c e d tais que*

$$c\,\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{z}\|_\infty \leq d\,\|\mathbf{z}\|, \quad \textit{para todo } \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n. \tag{2}$$

`Demonstração`: Denotemos por $\mathbf{e}^1, \cdots, \mathbf{e}^n$, os elementos da base canônica de $\mathbb{C}^n$. Para todo $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, temos

$$\|\mathbf{z}\| = \left\| \sum_{j=1}^n z_j \mathbf{e}^j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |z_j| \|\mathbf{e}^j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|\mathbf{e}^j\| \right) \max\{|z_1|, \cdots, |z_n|\},$$

o que prova a primeira das desigualdades em (2) para $c = \left(\sum_{j=1}^n \|\mathbf{e}^j\| \right)^{-1}$.

Definamos $\delta \coloneqq \inf\{\|\mathbf{z}\|;\ \|\mathbf{z}\|_\infty = 1\}$. Existe então uma sequência $(\mathbf{z}^k)_k$ em $\mathbb{C}^n$ tal que $\|\mathbf{z}^k\|_\infty = 1$ e $\|\mathbf{z}^k\| \longrightarrow \delta$. A sequência $(\|\mathbf{z}^k\|_\infty)_k$ é constante, logo $(\mathbf{z}^k)_k$ é limitada em $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$, logo possui subsequência convergente $(\mathbf{z}^{k_l})_l$, $\mathbf{z}^{k_l} \longrightarrow \mathbf{z}_0$ relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$. Segue da continuidade da norma (Problema 1.7a), que $\|\mathbf{z}_0\|_\infty = 1$ e, portanto, que $\mathbf{z}_0 \neq 0$.

Decorre da primeira das desigualdades de (2), que já está demonstrada, e da convergência de $(\mathbf{z}^{k_l})_l$ para $\mathbf{z}_0$ relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$ que $(\mathbf{z}^{k_l})_l$ converge para $\mathbf{z}_0$ também relativamente à norma $\|\cdot\|$. Invocando mais uma vez a continuidade das normas, segue que $\delta = \|\mathbf{z}_0\| \neq 0$ (já vimos que $\mathbf{z}_0 \neq 0$).

Dado $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ arbitrário e não-nulo, temos $\left\| \dfrac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|_\infty} \right\|_\infty = 1$, logo $\left\| \dfrac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|_\infty} \right\| \geq \delta$, logo $\|\mathbf{z}\| \geq \delta \|\mathbf{z}\|_\infty$. Isto prova a segunda das desigualdades em (2) para $d = 1/\delta$. □

Recordemos que um subconjunto D de um espaço métrico X é *denso* em X se todo ponto de X é o limite de uma sequência em D. O principal objetivo desta seção é mostrar que todo espaço vetorial normado V "é" (ou seja, em um certo sentido pode ser visto como) um subespaço denso de um espaço de Banach. Esse espaço completo é chamado de *completamento* de V. Vamos mostrar isso em duas etapas. Primeiro vamos ver como se pode completar um espaço métrico. Depois veremos que, no caso em que esse espaço métrico é um espaço vetorial normado, o completamento é um espaço de Banach.

Definição 1.9. *Uma isometria entre dois espaços métricos é uma aplicação $I : X \to Y$ que preserva a distância, isto é, $d_Y(I(x), I(y)) = d_X(x, y)$ para todos $x, y \in X$. Se existir uma bijeção isométrica de X em Y, diremos que X e Y são isométricos.*

Exemplo 1.10. No caso em que os espaços métricos são espaços vetoriais normados V e W, uma aplicação linear $I : V \to W$ é uma isometria se e somente se $\|Iv\|_W = \|v\|_V$ para todo $v \in V$.

Exemplo 1.11. Considere o intervalo aberto $(-1, 1)$ e a reta $\mathbb{R}$ como espaços métricos, ambos munidos da métrica $d(x, y) = |x - y|$. A função $s : \mathbb{R} \to (0, 1)$ definida por $s(x) = x/\sqrt{1 + x^2}$ é contínua, bijetora, e a inversa de s também é contínua. Dizemos então que s é um homeomorfismo. Mas s não é uma isometria. Uma sequência $(x_n)_n$ em $\mathbb{R}$ é convergente se e somente se $s(x_n)_n$ é convergente em $(-1, 1)$. A sequência $t_n = 1 - 1/n$ em $(-1, 1)$ é de Cauchy mas não é convergente, e $s^{-1}(t_n)$ não é de Cauchy.

Os espaços métricos $\mathbb{R}$ e $(-1, 1)$ são homeomorfos mas não são isométricos, pois $\mathbb{R}$ é completo e $(0, 1)$ não é. Além disso, $(-1, 1)$ é limitado e $\mathbb{R}$ não é. Essas são duas propriedades que são preservadas por bijeções isométricas.

Definição 1.12. *Um completamento de um espaço métrico X consiste de um espaço métrico completo $\bar{X}$ e de uma isometria $\iota : X \to \bar{X}$ cuja imagem $D = \iota(X)$ é densa em $\bar{X}$.*

O exercício seguinte mostra que o completamento de um espaço métrico é *único a menos de uma isometria.*

Problema 1.18. Sejam $(\bar{X}, \iota)$ e $(\tilde{X}, \eta)$ completamentos do espaço métrico X. Mostre que existe uma bijeção isométrica $I : \bar{X} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $\eta = I \circ \iota$.

Há mais de uma maneira de construir um completamento de um dado espaço métrico X. A mais comum talvez seja considerar o conjunto das classes de equivalência de sequências de Cauchy em X. É o que faremos aqui. Quase nunca será necessário referir-se à natureza dos elementos do completamento de um espaço métrico, o que é realmente relevante é a existência de um completamento (X, ι).

Seja (X, d) um espaço métrico. Dadas duas sequências de Cauchy $(x_n)_n$ e $(x'_n)_n$ em X, diremos que $(x_n)_n \sim (x'_n)$ se e somente se $d(x_n, x'_n) \longrightarrow 0$.

Problema 1.19. Mostre que a relação que acabamos de definir no conjunto de todas as sequências de Cauchy em X é uma relação de equivalência.

Segue do Problema 1.14 que uma sequência de Cauchy é equivalente a qualquer uma de suas subsequências.

Problema 1.20. Sejam $(x_n)_n$, $(x'_n)_n$, $(y_n)_n$ e $(y'_n)_n$ sequências de Cauchy em X tais que $(x_n)_n \sim (x'_n)_n$ e $(y_n)_n \sim (y'_n)_n$. Mostre que $\lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(x'_n, y'_n)$ (os dois limites existem pelo Problema 1.11).

Denotemos por $\tilde{X}$ o conjunto de todas as classes de equivalência de sequências de Cauchy em X. A classe de equivalência de uma sequência de Cauchy $(x_n)_n$ será denotada por $[(x_n)_n]$. O Problema 1.20 nos permite definir

$$\begin{array}{rcl} \tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([(x_n)_n], [(y_n)_n]) & \longmapsto & \lim_n d(x_n, y_n) \end{array} \tag{3}$$

Problema **1.21.** Mostre que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ é um espaço métrico.

Vamos enunciar como lemas alguns passos mais técnicos necessários para demonstrar o teorema principal desta seção (Teorema 1.15) .

Lema 1.13. *Sejam $(x_n^k)_n$, $k \in \mathbb{N}$, sequências de Cauchy no espaço métrico X, e seja $(y_n)_n$ uma sequência em X tal que*

$$\lim_k \left(\lim_n d(y_n, x_n^k) \right) \;=\; 0. \tag{4}$$

Então $(y_n)_n$ é uma sequência de Cauchy.

`Demonstração`: Para todos índices m, n, k, aplicando duas vezes a desigualdade triangular, vem

$$d(y_n, y_m) \;\le\; d(y_n, x_n^k) \,+\, d(x_n^k, x_m^k) \,+\, d(x_m^k, y_m). \tag{5}$$

Como cada uma da parcelas do lado direito fica arbitrariamente pequena, é de se esperar que o lado esquerdo desta desigualdade também fique arbitrariamente pequeno. Para transformar esta ideia intuitiva em uma demonstração, é preciso argumentar cuidadosamente, usando as definições e hipóteses que nos foram dadas.

Tome arbitrariamente $\epsilon > 0$. Segue da hipótese (4) que existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_n d(y_n, x_n^{k_0}) \;<\; \frac{\epsilon}{3}.$$

Logo existe N_1, que depende de k_0, tal que $d(y_n, x_n^{k_0}) < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \ge N_1$. Como $(x_n^{k_0})_n$ é uma sequência da Cauchy, existe N_2, que também depende de k_0, tal que $d(x_n^{k_0}, x_m^{k_0}) < \frac{\epsilon}{3}$ sempre que $m, n \ge N_2$. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Segue de (5) com $k = k_0$ que $d(y_n, y_m) < \epsilon$ sempre que $n, m \ge N$. □

A técnica que usamos na demonstração do Lema 1.13 é conhecida como "o truque do $\frac{\epsilon}{3}$". É importante observar que o fato de N depender de k_0 não invalida o argumento, pois k_0 foi produzido a partir apenas das hipóteses e do ϵ que foi tomado e não depende de m ou de n.

Lema 1.14. *Seja X um espaço métrico e considere o correspondente espaço métrico $\tilde{X}$ definido pelos Problemas 1.20 e 1.21. Se $[(x_n^k)_n]_k$ é uma sequência de Cauchy em $\tilde{X}$, então existe uma sequência de Cauchy $(y_n)_n$ em X tal que*

$$\lim_k [(x_n^k)_n]_k \;=\; [(y_n)_n].$$

`Demonstração`: Para todos índices m, n, k, aplicando duas vezes a desigualdade triangular, vem

$$d(x_n^n, x_n^k) \;\le\; d(x_n^k, x_m^k) \,+\, d(x_m^k, x_m^n) \,+\, d(x_m^n, x_n^n). \tag{6}$$

Como cada uma da parcelas do lado direito fica arbitrariamente pequena, é de se esperar que o lado esquerdo desta desigualdade também fique arbitrariamente pequeno. Mas o argumento aqui precisa ser mais engenhoso do que o do Lema 1.13.

O Problema 1.15 implica que a sequência de Cauchy $[(x_n^k)_n]_k$ em $\tilde{X}$ possui uma subsequência que, por abuso de notação, será também denotada por $[(x_n^k)_n]_k$, tal que

$$l \ge k \implies \tilde{d}([(x_n^k)_n], [(x_n^l)_n]) \;<\; \frac{1}{k} \tag{7}$$

Para cada k, apliquemos novamente o Problema 1.15 para a sequência de Cauchy $(x_n^k)_n$ em X. Segue que a sequência $(x_n^k)_n$ possui uma subsequência, que será também denotada por $(x_n^k)_n$, satisfazendo

$$m \geq n \implies d(x_m^k, x_n^k) \ < \ \frac{1}{n}. \tag{8}$$

Como uma sequência de Cauchy é equivalente a cada uma de suas subsequências (Problema 1.14), podemos supor que, para cada k, o representante de $[(x_n^k)_n]$ satisfaz (8).

Note que podemos tomar $k = n$ em (8), pois a desigualdade vale para todo k. Segue de (6) e (8) que, para todos n, k, se $m \geq n$, temos:

$$d(x_n^n, x_n^k) \ \leq \ \frac{1}{n} \ + \ d(x_m^k, x_m^n) \ + \ \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Segue de (7) que $\lim_m d(x_m^k, x_m^n) < \dfrac{1}{k}$ se $n \geq k$. Dados k e n, escolha m_0 tal que $d(x_{m_0}^k, x_{m_0}^n) < \frac{1}{k}$. Substituindo m por m_0 em (9), vem

$$n \geq k \implies d(x_n^k, x_n^n) < \frac{2}{n} + \frac{1}{k}.$$

Dado $\epsilon > 0$, para todo $k > \frac{3}{\epsilon}$ e para todo $n \geq k$, temos $d(x_n^k, x_n^n) < \epsilon$. Isto prova que

$$\lim_k \left(\lim_n d(x_n^k, x_n^n) \right) = 0$$

Segue do Lema 1.13 que a sequência $(x_n^n)_n$ é de Cauchy em X. Definindo $y_n = x_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, segue da definição da métrica em $\tilde{X}$ que $[(y_n)_n]$ é o limite em $\tilde{X}$ da sequência $[(x_n^k)_n]_k$. □

O leitor que se sentir incomodado com as mudanças de notação que fizemos ao longo da demonstração do Lema 1.14 é convidado a reescrever a demonstação com uma notação mais detalhada, de modo que se possa definir y_n em termos da sequência de Cauchy arbitrária $[(x_n^k)_n]_k$ inicialmente dada no enunciado. Uma maneira de exibir mais explicitamente a dependência de y_n do dado inicial seria dizer existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $\lim_k \psi(k) = \infty$ e, para cada k, existe $\phi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $\lim_n \phi_k(n) = \infty$, tais que $y_n = x_{\phi_n(n)}^{\psi(n)}$ para todo n. Diz-se então que a sequência $(y_n)_n$ é a *diagonal* da sequência de sequências $\left((x_{\phi_k(n)}^{\psi(k)})_n \right)_k$. Este *truque da diagonal* é muito usado para demonstrar teoremas sobre sequências de sequências.

Todo o trabalho duro para demonstrar o próximo teorema já foi feito. Resta só concatenar as definições.

Teorema 1.15. *Dado (X, d) um espaço métrico, considere o espaço métrico $(\tilde{X}, \tilde{d})$ do Problema 1.21 e defina $\iota : X \longrightarrow \tilde{X}$ atribuindo a cada $x \in X$ a classe de equivalência da sequência constante, $x_n = x$ para todo n, ou seja, $\iota(x) = [(x)_n]$. Então $(\tilde{X}, \iota)$ é um completamento de X.*

`Demonstração`: Segue do Lema 1.14 que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ é um espaço métrico completo. Que a aplicação ι é uma isometria segue imediatamente da definição de $\tilde{d}$. Resta provar que a imagem de ι é densa em $\tilde{X}$. Dado $\mathbf{x} \coloneqq [(x_n)_n] \in \tilde{X}$, a sequência $(\iota(x_k))_k$ converge a $\mathbf{x}$ em $\tilde{X}$. □

Mais importante do que conhecer a natureza dos elementos do completamento é simplesmente saber que todo espaço métrico pode ser completado:

Corolário 1.16. *Todo espaço métrico* X *possui um completamento* (X, ι) *(que é único a menos de isometria, pelo Problema 1.18).*

Na prática, frequentemente identificaremos X com a imagem de ι e diremos que todo espaço métrico "é" denso em seu completamento.

O objetivo principal desta seção é o teorema seguinte, que vamos demonstrar usando apenas o enunciado do Corolário 1.16. Este teorema também pode ser obtido usando a consequência do Teorema de Hahn-Banach enunciada na Proposição 9.6.

Teorema 1.17. *Seja* V *um espaço vetorial normado (real ou complexo). Existe um espaço de Banach* X *e uma aplicação linear isométrica com imagem densa* $\iota : V \to X$.

`Demonstração`: Seja $(X, \tilde{d})$ um completamento do espaço métrico (V, d), sendo d a métrica induzida pela norma de V, seja $\iota : V \to X$ a isometria com imagem densa que vem junto com o completamento. Como ι é injetiva, sua imagem automaticamente herda a estrutura de espaço vetorial de V, bastando definir $\alpha\,\iota(v) + \iota(w) \coloneqq \iota(\alpha v + w)$ para todo escalar α e para todos $v, w \in V$. Para simplificar a notação, suporemos sem perda de generalidade que $V \subset X$ e que ι é a inclusão. Temos portanto um espaço métrico completo $(X, \tilde{d})$ possuindo um subconjunto denso V com estrutura de espaço vetorial normado, e que em V a métrica $\tilde{d}$ é induzida pela norma. Queremos mostrar que X inteiro pode ser munido de uma estrutura de espaço vetorial normado compatível com a métrica.

Dados $x, y \in X$, tome sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ em V tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em X. Sendo convergentes, as duas sequências são de Cauchy em X. Daí a sequência $(x_n + y_n)_n$ também é de Cauchy em X, pois, para todos m, n, temos

$$\tilde{d}(x_m + y_m, x_n + y_n) = \|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)\| = \|(x_m - x_n) + (y_m - y_n)\| \leq$$

$$\|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\| = \tilde{d}(x_m, x_n) + \tilde{d}(y_m, y_n)$$

Seja s o limite de $(x_n + y_n)_n$. Para definir $x + y$ como sendo igual a s, precisamos provar que s não se modifica se aproximarmos x e y por outras sequências em V, $(x'_n)_n$ e $(y'_n)_n$. Chame de s' o limite de $(x'_n + y'_n)$. Considere agora as sequências $(z_n)_n$ e $(w_n)_n$ em V definidas por

(10)
$$(z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots) = (x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots) \text{ e } (w_1, w_2, w_3, w_4, \cdots) = (y_1, y'_1, y_2, y'_2, \cdots).$$

Temos $z_n \to x$ e $w_n \to y$. Pelo argumento inicial, sabemos que $(z_n + w_n)_n$ converge em X, chamemos de S seu limite. Ocorre que $(x_n + y_n)_n$ e $(x'_n + y'_n)_n$ são subsequências convergentes de $(z_n + w_n)_n$, sendo seus limites iguais a s e a s'. Logo $S = s = s'$ (veja o Problema 1.12) e portanto podemos definir, para $x, y \in X$,

$$x + y \coloneqq \lim_n (x_n + y_n), \quad x_n, y_n \in V,\ x_n \to x,\ y_n \to y.$$

Um argumento análogo, mas menos trabalhoso, permite-nos definir, para $x \in X$ e α um escalar,

$$\alpha x \coloneqq \lim_n (\alpha x_n), \quad x_n \in V,\ x_n \to x. \tag{11}$$

É bem direto mostrar que a soma e a multiplicação por escalar que acabamos de definir em X satisfazem os axiomas da definição de espaço vetorial.

Estando X munido da estrutura de um espaço vetorial, com respeito à qual V é um subespaço de X, verifiquemos que uma norma em X pode ser definida por

$$\|x\| \;=\; \lim_n \|x_n\|, \quad x_n \in V,\; x_n \longrightarrow x,\; x \in X. \tag{12}$$

Em primeiro lugar, segue de $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| \;=\; d(x_n, x_m)$ que $(\|x_n\|)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo convergente. Pode-se provar que o limite não depende da sequência escolhida para aproximar x intercalando duas sequências dadas e argumentando como logo após (10). Logo vem (veja o Problema 1.6), se $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, $x, y \in X$, $x_n, y_n \in V$,

$$d(x,y) \;=\; \lim_n d(x_n, y_n) \;=\; \lim_n \|x_n - y_n\| \;=\; \|x - y\|.$$

Resta apenas verificar que $\|\cdot\|$ é uma norma em X. Segue imediatamente das definições que, para todos $x, y \in X$ e α escalar, $\|x\| \geq 0$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ e $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$. Segue do item (a) do Problema 1.4 que $\|\cdot\|$ só se anula no vetor nulo. □

Problema **1.22.** Preencha os detalhes omitidos na definição da multiplicação por escalar em X, equação (11).

`Definição` **1.18.** *Seja V um espaço vetorial normado. Um completamento de V é um par (X, ι), em que X é um espaço de Banach, e $\iota : V \longrightarrow X$ é uma aplicação linear isométrica cuja imagem é densa em X ("isométrica" significa que $\|\iota(v)\|_X = \|v\|_V$ para todo $v \in V$).*

O enunciado do Teorema 1.17 pode ser resumido portanto na afirmação de que todo espaço vetorial normado possui um completamento. A unicidade do completamento, a menos de isometria, é enunciada no problema seguinte.

Problema **1.23.** Seja V um espaço vetorial normado e sejam (X_1, ι_1) e (X_2, ι_2) completamentos de V. Mostre que existe um único isomorfismo linear isométrico $I : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que $I \circ \iota_1 = \iota_2$.

2. Espaços com Produto Interno

Nossos espaços vetoriais continuam sendo reais ou complexos. Quando não falarmos nada, subentende-se que o espaço é complexo.

`Definição` **2.1.** *Um produto interno em um espaço vetorial complexo V é uma função $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ satisfazendo, para quaisquer x, y e z pertencentes a V e para todos escalares α:*
(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$,
(ii) $\langle x, x\rangle = 0$ *somente se* $x = 0$,
(iii) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,
(iv) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,
(v) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
Diz-se que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *é um* espaço vetorial com produto interno.

Segue de *(iii)*, *(iv)* e *(v)* acima que

$$\langle \alpha x, y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle \quad \text{e} \quad \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle. \tag{13}$$

No caso de espaços vetoriais reais, o produto interno toma valores em $\mathbb{R}$ e o complexo conjugado em (v) e em (13) é dispensável.

Se os axiomas (iii), (iv) e (v) forem satisfeitos, diz-se que $\langle\, , \,\rangle$ é uma *forma sesquilinear hermitiana*, no caso complexo. No caso real, que é uma *forma bilinear simétrica*. Se os axiomas (i), (iii), (iv) e (v) forem satisfeitos, diz-se que $\langle\, , \,\rangle$ é uma *forma sesquilinear hermitiana positiva*, no caso complexo, ou que é uma *forma bilinear simétrica positiva*, no caso real. Um sinônimo de "produto interno" é *forma sesquilinear hermitiana positiva-definida*, no caso complexo, ou *forma bilinear simétrica positiva-definida*, no caso real.

Na literatura matemática contemporânea, a convenção quase universal é requerer-se que o produto interno satisfaça $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ e $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$. Os físicos costumam seguir a convenção adotada aqui, que é usada também em [14].

`Exemplo` **2.2.** $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \cdots, x_n);\ x_i \in \mathbb{C}\}$, munido do *produto interno euclidiano*

$$\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j$$

`Exemplo` **2.3.** O espaço de todas as sequências complexas $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ com $x_j = 0$ exceto para finitos valores de j, munido de

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j,$$

$\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

`Exemplo` **2.4.** O espaço $C([a, b])$ de todas as funções complexas contínuas definidas no intervalo fechado $[a, b]$, munido de

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

`Exemplo` **2.5.** Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denote por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas de Ω em $\mathbb{C}$ que se anulam fora de um compacto contido em Ω. Defina em $C_c(\Omega)$

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) dx.$$

`Exemplo` **2.6.** Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denote por $C_c^1(\Omega)$ o espaço das funções de classe C^1 de Ω em $\mathbb{C}$ que se anulam fora de um compacto contido em Ω. Defina em $C_c^1(\Omega)$

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_\Omega \langle \nabla \overline{f(x)}, \nabla g(x)\rangle dx,$$

onde ∇ indica gradiente.

PROBLEMA **2.1.** Verifique que os cinco exemplos precedentes são de fato espaços vetoriais com produto interno.

`Definição` **2.7.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diremos que dois elementos x e y de V são* ortogonais*, e denotaremos isso por $x \perp y$, se $\langle x, y\rangle = 0$. Um subconjunto $S \subset V$ será* ortonormal *se quaisquer dois elementos distintos de S forem ortogonais e se, além disso, $\langle x, x\rangle = 1$ para todo $x \in S$. Denotaremos por $\|\cdot\|$ a função*

$$\|x\| \;=\; \sqrt{\langle x, x\rangle},\;\; x \in V \tag{14}$$

(bem definido como real não-negativo devido ao item (i) na Definição 2.1).

A equação (14) deve ser encarada, por enquanto, apenas como notação. Logo veremos que $\|\cdot\|$ é uma norma.

Teorema 2.8. *Seja* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço vetorial com produto interno, seja* $\|\cdot\|$ *dada por* (14) *e seja* $S \subset V$ *um subconjunto ortonormal finito,* $S = \{x_1, \cdots, x_N\}$*. Para cada* $x \in V$*, vale:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |\langle x_j, x\rangle|^2 + \|x - \sum_{j=1}^{N}\langle x_j, x\rangle x_j\|^2 \tag{15}$$

`Demonstração`: Definindo

$$y_1 = \sum_{j=1}^{N}\langle x_j, x\rangle x_j \quad \text{e} \quad y_2 = x - y_1$$

temos:

$$\begin{aligned}
\langle y_1, y_2\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{N}\langle x_j, x\rangle x_j, x - \sum_{k=1}^{N}\langle x_k, x\rangle x_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{N}\langle\langle x_j, x\rangle x_j, x - \sum_{k=1}^{N}\langle x_k, x\rangle x_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{N}\overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_j, x\rangle - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_k, x\rangle\langle x_j, x_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{N}|\langle x_j, x\rangle|^2 - \sum_{j=1}^{N}|\langle x_j, x\rangle|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Daí:

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle y_1 + y_2, y_1 + y_2\rangle = \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2.$$

A segunda parcela do segundo membro de (15) é, por definição, $\|y_2\|^2$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|y_1\|^2 &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\langle\, \langle x_j, x\rangle x_j, \langle x_k, x\rangle x_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{\langle x_j, x\rangle}\langle x_k, x\rangle\langle x_j, x_k\rangle = \sum_{j=1}^{N}|\langle x_j, x\rangle|^2,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

A aplicação $x \mapsto y_1$ definida na demonstração acima é chamada de *projeção ortogonal* sobre o espaço gerado por $\{x_1, \cdots, x_N\}$. Boa parte do nosso esforço nas próximas aulas será dirigido a dar um sentido à equação (15) no caso em que o conjunto ortonormal S é infinito e a construir projeções ortogonais sobre certos espaços de dimensão infinita.

O corolário seguinte decorre imediatamente de (15).

Corolário 2.9. *Sob as hipóteses do teorema anterior, temos*

$$\sum_{j=1}^{N}|\langle x_j, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Corolário 2.10. (`Desigualdade de Bessel`) *Seja* $\{x_1, x_2, \cdots\}$ *um conjunto ortonormal. Temos*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x_j, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

`Demonstração`: Aplique o Corolário 2.9 para cada N. Faça N tender a infinito. □

Corolário 2.11. (`Desigualdade de Cauchy-Schwarz`) *Para quaisquer elementos* x *e* y *de um espaço vetorial com produto interno, temos:*

$$|\langle x, y\rangle| \;\leq\; \|x\| \cdot \|y\|. \tag{16}$$

`Demonstração`: Se $y = 0$, então são nulos ambos os membros da desigualdade que queremos demonstrar. Se $y \neq 0$, aplique o Corolário 2.9 ao conjunto ortonormal unitário $S = \{y/\|y\|\}$, e use que $|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle|$. □

Só na demonstração do Corolário 2.11, fizemos uso do do axioma (ii) da Definição 2.1. Mas é possível demonstrar também (16) sem fazer uso de (ii) (veja o Problema 2.2). Ou seja, o Teorema 2.8 e seus dois corolários valem também para formas hermitianas sesquilineares (ou para formas bilineares simétricas) postivas para as quais $\|x\| \coloneqq \langle x, x\rangle$ se anule para algum $x \in V$.

Problema **2.2.** Seja V um espaço vetorial complexo (ou real) munido de uma forma hermitiana sesquilinear (ou, respectivamente, de uma forma bilinear simétrica). Dados $x, y \in V$, defina $f_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_{x,y}(t) = \|x + ty\|^2$, $t \in \mathbb{R}$. (a) Escreva $f_{x,y}$ como um polinômio de segundo grau em t. (b) Use que $f_{x,y}(t) \geq 0$ para todo t para mostrar que vale (16).

Teorema 2.12. *Seja* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *um espaço vetorial com produto interno. A função definida em* (14) *é uma norma em* V.

`Demonstração`: Já sabemos que $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in V$. Segue do item (ii) da Definição 2.1 que $\|x\|$ só se anula se $x = 0$. Segue de (iv) e (v) que $\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = |\alpha|^2\langle x, x\rangle$ e portanto $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo escalar α e para todo $x \in V$. A desigualdade triangular decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|x + y\|^2 = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

como queríamos. □

Diz-se da norma definida em (14) que é *induzida* pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ou ainda que *provém* de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Diz-se que um espaço vetorial normado *é* um espaço com produto interno, se sua norma provém de um produto interno.

Problema **2.3.** Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial (complexo) com produto interno. Mostre que a função $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

O espaço das sequências de quadrado somável.

Denotemos por ℓ^2 o espaço de todas as sequências $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $x_j \in \mathbb{C}$, tais que $\sum_j |x_j|^2$ é finito. Denotemos a raiz quadrada desta soma por $\|\mathbf{x}\|$. Nesta sub-seção provamos que ℓ^2 é um espaço vetorial com produto interno e que $\|\cdot\|$ é a norma induzida por esse produto interno.

Dados $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $\mathbf{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em ℓ^2, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2)^{1/2} \tag{17}$$

(esta é a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o produto interno do Exemplo 2.2, aplicada aos vetores $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ e $(|y_1|, \cdots, |y_n|)$). O segundo membro de (17) é limitado por por $\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. Logo temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Donde segue que a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}_j y_j \tag{18}$$

é absolutamente convergente.

Temos ainda, também para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2)^{1/2} \leq (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2} + (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2)^{1/2} \tag{19}$$

(esta é a desigualdade triangular para a norma induzida pelo produto interno do Exemplo 2.2, aplicada aos vetores $(x_1, \cdots, x_n)$ e $(y_1, \cdots, y_n)$). O segundo membro de (17) é limitado por $\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Logo temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \tag{20}$$

Segue de (20) que se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertencem a ℓ^2, então a soma

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2$$

é finita. Logo ℓ^2 é invariante pela adição de vetores, e portanto é um subespaço do espaço vetorial de todas as sequências complexas (claro que ℓ^2 é invariante também por multiplicação escalar). Usando que a série em (18) converge absolutamente para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em ℓ^2, é fácil verificar que ela define um produto interno em ℓ^2 e que $\|\cdot\|$ é a norma induzida por ele. Em particular, vale a desigualdade $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, que também pode ser obtida diretamente de (20).

As normas $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

`Exemplo` **2.13.** Para cada $p \geq 1$ real, define-se uma norma $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ por

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}.$$

Define-se ainda $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{C}^n \to [0, \infty)$ por

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

É fácil provar que $\|\cdot\|_p$ é uma norma se $p = 1$ ou se $p = \infty$. $\|\cdot\|_2$ é a norma induzida pelo produto interno canônico de $\mathbb{C}^n$ (Exemplo 2.2). Para um p qualquer,

$1 < p < \infty$, a desigualdade triangular para $\| \cdot \|_p$ é conhecida como a *Desigualdade de Minkowski* [8, Teorema II.1.3]. A demonstração seguinte é uma simplificação dos argumentos de [15, Seção 3.1]

Lema 2.14. *Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e suponha que ϕ' é não-decrescente, isto é, $\phi'(\xi) \leq \phi'(\eta)$ sempre que $\xi < \eta$. Dados $x \neq y$ e $0 < \lambda < 1$, temos*

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y).$$

`Demonstração`: Basta supor que $x < y$ pois, se neste caso a desigualdade já tiver sido provada, o caso $y < x$ segue trocando λ por $1-\lambda$. Façamos $t = \lambda x + (1-\lambda)y$. Segue do Teorema do Valor Médio que existem ξ e η, $x < \xi < t < \eta < y$, tais que

$$\frac{\phi(t) - \phi(x)}{t - x} = \phi'(\xi) \leq \phi'(\eta) = \frac{\phi(y) - \phi(t)}{y - t}$$

(usamos que ϕ' é não-decrescente). Substituindo na desigualdade acima $t - x = (1-\lambda)(y-x)$ e $y - t = \lambda(y-x)$, e cancelando $y - x$, que é positivo, vem:

$$\frac{\phi(t) - \phi(x)}{1-\lambda} \leq \frac{\phi(y) - \phi(t)}{\lambda},$$

que é equivalente à desigualdade que queríamos demonstrar. $\square$.

Proposição 2.15. (`Desigualdade de Hölder`) *Sejam $p, q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Para todos $z, w \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $w = (w_1, \cdots, w_n)$, vale então a desigualdade*

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j w_j| \ \leq \ \|z\|_p \|w\|_q, \quad \|z\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \|w\|_q := \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{21}$$

`Demonstração`: Aplicando o Lema 2.14 a $\phi(x) = e^x$ e $\lambda = \frac{1}{p}$, vem

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \ \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y, \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dados $A, B > 0$, tome $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $e^x = A^p$ e $e^y = B^q$. Da desigualdade precendente, segue que

$$AB \ \leq \ \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q. \tag{22}$$

A desigualdade acima é também verdadeira se A ou B se anulam. Para cada j, substitua nela $A = |z_j|$ e $B = |w_j|$. Depois some em j. Obtemos que, para todos $z, w \in \mathbb{C}^n$, vale:

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j w_j| \ \leq \ \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{n} |w_j|^q. \tag{23}$$

Substituindo na desigualdade acima $Z_j = z_j / \|z\|_p$ e $W_j = w_j / \|w\|_p$, vem

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |z_j w_j|}{\|z\|_p \|w\|_q} \ \leq \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ = \ 1,$$

como queríamos. $\square$

Proposição 2.16. (`Desigualdade de Minkowski`) *Dados $p > 1$ real e $z, w \in \mathbb{C}^n$, $\|z + w\| \leq \|z\|_p + \|w\|_p$*

`Demonstração`: Considere as igualdades

$$\sum_{j=1}^{n}(|z_j|+|w_j|)^p = \sum_{j=1}^{n}(|z_j|+|w_j|)(|z_j|+|w_j|)^{p-1} =$$

$$\sum_{j=1}^{n}|z_j|(|z_j|+|w_j|)^{p-1} + \sum_{j=1}^{n}|w_j|(|z_j|+|w_j|)^{p-1}$$

Tome $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ e aplique a Proposição 2.15 aos dois últimos somatórios. Daí vem

$$\sum_{j=1}^{n}(|z_j|+|w_j|)^p \leq (\|z\|_p+\|w\|_p)\sum_{j=1}^{n}\left[(|z_j|+|w_j|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Seja S o somatório no lado esquerdo desta desigualdade. Temos portanto $S \leq (\|z\|_p+\|w\|_p)S^{1/q}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $S > 0$ (caso contrário, $z = w = 0$ e a desigualdade que queremos mostrar é obviamente verdadeira). Neste caso podemos multiplicar os dois membros de $S \leq (\|z\|_p+\|w\|_p)S^{1/q}$ por $S^{-1/q}$ e, usando que $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ e $(p-1)q = 1$, obter

$$\left[\sum_{j=1}^{n}(|z_j|+|w_j|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|z\|_p+\|w\|_p$$

Como, para todo j, $(|z_j|+|w_j|)^p \geq |z_j+w_j|^p$, o primeiro membro desta última desigualdade é maior do que ou igual a $\|z+w\|_p$. □

Corolário 2.17. *$\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\mathbb{C}^n$, $p > 1$ real.*

`Demonstração`: A desigualdade triangular é o conteúdo da Proposição 2.16. Os demais axiomas da definição de norma são fáceis de demonstrar. □

Analogamente a como mostramos que o conjunto das sequências de quadrado somável $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ é um espaço vetorial normado, define-se $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $p \geq 1$ real e demonstra-se que se trata de um espaço vetorial normado:

Problema **2.4.** Dado $p \geq 1$, seja ℓ^p os conjunto de todas as sequências complexas $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que a soma

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_n|^p$$

é finita. Denote por $\|\mathbf{x}\|_p$ o valor desta soma elevado à potência $1/p$. Usando que $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado, mostre que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado.

`Exemplo` **2.18.** Para cada $p \geq 1$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

é uma norma em $C([a,b])$. O caso $p = 1$ é fácil. Para $p = 2$, isso decorre de $\|\cdot\|_2$ provir de um produto interno (veja o Exemplo 2.4). É fácil ver que $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\}$ também é uma norma em $C[a,b]$.

Para $p > 1$ e $p \neq 2$, demonstra-se que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $C([a,b])$ de maneira análoga a como demonstramos que a norma-p é uma norma em $\mathbb{C}^n$. Para tanto, precisamos primeiro obter uma versão da desigualdade de Hölder para integrais, que desempenhe o papel da desigualdade (21). Dadas $f, g \in C([a,b])$, para cada $x \in [a,b]$, substituímos em (22) $A = |f(x)|^p$ e $B = |g(x)|^q$ e integramos. Obtemos assim

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^q \; + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\, dx$$

Substituindo $F = f/\|f\|^q$ e $G = g/\|g\|^q$ no lugar de f e g na desigualdade precedente, obtemos a seguinte versão da desigualdade de Hölder,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

O próximo passo é integrar a identidade

$$(|f(x)| + |g(x)|)^p = |f(x)|(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1} + |g(x)|(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}$$

e usar a desigualdade de Hölder nas duas integrais do segundo membro para obter

$$\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\, dx \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\left[\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Divindindo esta desigualdade pela integral mais à direita, obtemos a segunda das duas desigualdades seguintes

$$\|f+g\|_p \leq \left[\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

que é a desigualdade triangular para a norma $\|\cdot\|_p$ em $C([a,b])$

Com os mesmos argumentos, demonstra-se que

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $C_c(\Omega)$, Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Paralelogramo e polarização.

Problema **2.5.** (a) Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial complexo com produto interno, e seja $\|\cdot\|$ a norma induzida. Demonstre a *identidade de polarização*:

$$\langle x, y\rangle \;=\; \frac{1}{4}\,[\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\,].$$

(b) Demonstre que um espaço vetorial normado é um espaço com produto interno se e somente se a norma satisfaz a *lei do paralelogramo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \;=\; 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(c) O que muda nos itens (a) e (b) no caso de espaços reais?
(d) Decida se são ou não espaços com produto interno $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, $p \neq 2$.
Dica: A parte difícil deste problema é o "se" do item (b). Os Problemas 1.7 e 3.1 podem ser úteis aí.

Espaços de Hilbert e completamento de espaços com produto interno. Espaços com produto interno são casos especiais de espaços normados e portanto os conceitos e teoremas que vimos sobre espaços normados se aplicam também a espaços com produto interno. Em particular, faz sentido definir:

Definição 2.19. *Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo*

Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, e considere o seu completamento X. Isto é (veja o Teorema 1.17), X é um espaço de Banach e existe $\iota : V \to X$ linear com imagem densa tal que $\|\iota(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$. Como a norma de V provém de um produto interno, ela satisfaz a identidade do paralelogramo. Dados $x, y \in X$, tome sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ em V tais que $\iota(x_n) \longrightarrow x$ e $\iota(y_n) \longrightarrow y$. Usando o Problema 1.7 e o Problema 2.5-a, temos:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \;=\; \lim_n (\|\iota(x_n) + \iota(y_n)\|^2 + \|\iota(x_n) - \iota(y_n)\|^2) \;=$$

$$\lim_n (\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2) \;=\; 2 \lim_n (\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) \;=$$

$$2 \lim_n (\|\iota(x_n)\|^2 + \|\iota(y_n)\|^2) \;=\; 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Logo, a norma do espaço de Banach X satisfaz a lei do paralelogramo. Pelo Problema 2.5-b, a norma de X provém de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$. Segue do Problema 2.5-a que esse produto interno satisfaz, para $u, v \in V$,

$$\langle u, v \rangle_V \;=\; \langle \iota(u), \iota(v) \rangle_X .$$

Em outras palavras, encarando a aplicação ι como uma inclusão e V como subespaço de X, podemos dizer que o produto interno em V se estende a um produto interno em X que induz em X a norma do completamento.

Podemos resumir essa discussão no seguinte enunciado.

Teorema 2.20. *O completamento de um espaço com produto interno é um espaço de Hilbert.*

3. Operadores Limitados

Problema **3.1.** Seja V um espaço vetorial normado (complexo) e seja $T : V \to V$ uma função contínua tal que, para todos x e y em V, temos

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad T(ix) = iT(x).$$

Mostre que T é linear.
Sugestões: Use que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Use o Problema 1.5.

Teorema 3.1. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais normados. São equivalentes:*

(i) *T é contínua em todos os pontos de V.*
(ii) *T é contínua em 0.*
(iii) *Existe $C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in V$.*
(iv) *$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$.*

Demonstração: Obviamente (i) implica (ii).

Suponha que T é contínua em 0. Aplicando a definição de continuidade para $\epsilon = 1$, podemos obter $\delta > 0$ tal que $\|Tx\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Para qualquer positivo δ' menor do que δ, temos

$$\|x\| \leq \delta' \quad \Longrightarrow \quad \|Tx\| \leq 1.$$

Dado $x \neq 0$, $x \in V$, defina $x' = \dfrac{\delta' x}{\|x\|}$. Logo $\|x'\| = \delta$, logo

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{\|x\|}{\delta'} x'\right) \right\| = \|Tx'\| \frac{\|x\|}{\delta'} \leq \frac{\|x\|}{\delta'},$$

logo vale (iii) com $C = \frac{1}{\delta'}$. Provamos que (ii) implica (iii).

Suponha que vale (iii), seja $a \in V$ arbitrário, seja $(x_n)_n$ uma sequência em V convergindo a a. Segue de

$$\|Tx_n - Ta\| = \|T(x_n - a)\| \leq C\|x_n - a\| \quad \text{e} \quad x_n \longrightarrow a$$

que $Tx_n \longrightarrow Ta$. Logo T é contínua em a, pelo Problema 1.5. Isto prova que (iii) implica (i).

Se vale (iii), o supremo em (iv) é menor do que ou igual a C. Se o supremo em (iv), chamemo-lo de M, é finito, então vale (iii) com $C = M$. □

Em diversos contextos, pode ser útil a seguinte observação: $\|T\|$ é a menor dentre as constantes $C \geq 0$ para a qual (iii) vale.

Definição **3.2.** *Dados espaços vetoriais normados V e W denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares contínuas $T : V \longrightarrow W$ (que portanto satisfazem as quatro condições equivalentes do Teorema 3.1).*

Os elementos de $\mathcal{L}(V, W)$ são também chamados de operadores *limitados*, pois mandam subconjuntos limitados de V em subconjuntos limitados de W.

Problema **3.2.** Sejam V e W espaços vetoriais normados e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Mostre que T é contínua se e somente se a imagem $T(B)$ de qualquer subconjunto limitado B de V é um subconjunto limitado de W.

Proposição 3.3. *A aplicação $T \longmapsto \|T\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(V, W)$.*

Demonstração: Provemos a desigualdade triangular. Dados $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, temos, para todo $x \in V$ não-nulo,

$$\frac{\|(T+S)x\|}{\|x\|} = \frac{\|Tx + Sx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} + \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \leq \|T\| + \|S\|,$$

logo

$$\|T + S\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T+S)(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\| + \|S\|.$$

Os demais axiomas da definição de norma são mais fáceis de se verificar. □

No caso em que $V = W$, a composição de operadores define um produto em $\mathcal{L}(V) \coloneqq \mathcal{L}(V, V)$, munido do qual o espaço $\mathcal{L}(V)$ torna-se uma álgebra com unidade (a unidade é o operador identidade). Dados $T, S \in \mathcal{L}(V)$, temos

$$\forall x \in V, \quad \|(TS)(x)\| = \|T(Sx)\| \leq \|T\|\|Sx\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|,$$

logo $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$, ou seja, a norma de operadores é submultiplicativa em $\mathcal{L}(V)$. Nos axiomas comumente usados para definir "álgebra normada", costuma-se exigir que a norma seja submultiplicativa.

Quando W é o corpo do espaço vetorial V, denotamos $\mathcal{L}(V,W)$ por V^*. Chamamos V^* de *o dual* de V e chamamos seus elementos de *funcionais lineares contínuos.* Para enfatizar que a definição de dual usada em Análise Funcional é distinta da usada em Álgebra Linear, podemos chamar V^* de *dual topológico* de V e chamar o conjunto de todos os funcionais lineares (não-necessariamente contínuos) de V de *dual algébrico* de V.

`Definição` **3.4.** *A norma-de-operador* $\|A\|_{\mathtt{op}}$ *de* A*, uma matriz complexa* n *por* m*, é da transformação linear de* $\mathbb{C}^m$ *em* $\mathbb{C}^n$ *(munidos da norma euclidiana) definida por* A *da maneira canônica.*

Problema **3.3.** (a) Mostre que, se A é uma matriz real n por m, $\|A\|_{\mathtt{op}}$ também é igual à norma-de-operador da transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ definida por A.
(b) Mostre que

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathtt{op}} = 3.$$

Problema **3.4.** Dada (c_n) uma sequência complexa limitada, mostre que

$$(x_n) \longmapsto (c_n x_n)$$

define um operador limitado em ℓ^p, para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$. Calcule a norma deste operador.

Problema **3.5.** Dada $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e limitada, mostre que a multiplicação das funções de suporte compacto por a ,

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto af \in C_c(\mathbb{R}),$$

se estende a um operador linear contínuo em $L^p(\mathbb{R})$, para todo $p > 1$ real, e a um operador linear contínuo em $C_0(\mathbb{R})$. Mostre que a norma de todos esses operadores é igual ao supremo de $|a|$.

Problema **3.6.** Seja $V : C[0,1] \to C[0,1]$ o operador [2] dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Mostre que $\|V^n\| \leq 1/(n-1)!$ ($V^n = V \circ \cdots \circ V$, n fatores).
Dicas: O caso $n = 1$ é fácil. Para resolver o caso $n = 2$, troque a ordem de integração numa integral dupla. O passo de indução deve parecer natural, depois de resolvido o caso $n = 2$.

Problema **3.7.** Sejam X e Y espaços vetoriais normados, sendo X completo, e seja $T : X \to Y$ uma transformação linear contínua. Mostre que, se existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$, então a imagem de T é fechada.

Teorema 3.5. *Sejam* X *e* Y *espaços vetoriais normados, sendo* Y *completo, e seja* $D \subseteq X$ *um subespaço denso de* X*. Dada uma transformação linear contínua* $T : D \to Y$ *(*D *visto como um espaço vetorial normado com a norma herdada de* X*), existe uma única transformação linear contínua* $\tilde{T} : X \to Y$ *cuja restrição a* D *é igual a* T*. Além disso, se* $C \geq 0$ *é tal que* $\|Tx\| \leq C\|x\|$ *para todo* $x \in D$*, então* $\|\tilde{T}x\| \leq C\|x\|$ *para todo* $x \in X$ *(donde segue que* $\|T\| = \|\tilde{T}\|$*).*

[2] Este é o *operador de Volterra*. O problema implica que ele é *quase-nilpotente*: $\|V^n\|^{1/n} \to 0$.

`Demonstração`: Como T é contínua em D, segue do Teorema 3.1 que existe $C \geq 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \tag{24}$$

para todo $x \in D$. Dado $a \in X$, seja (x_n) uma sequência em D convergindo para a. Segue de (24) que

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq C\|x_n - x_m\|.$$

Usando que (x_n) é de Cauchy (pois converge), decorre então que (Tx_n) também é de Cauchy. Como Y é completo, (Tx_n) é convergente, $Tx_n \to b$.

Seja (y_n) uma outra sequência em D convergindo para a, e chamemos de $\hat{b}$ o limite de Ty_n (que existe, como acabamos de provar). Como a norma é contínua,

$$\|b - \hat{b}\| = \lim_n \|Tx_n - Ty_n\| \leq C \lim_n \|x_n - y_n\| = C\|a - a\| = 0.$$

Isto mostra que b não depende da sequência escolhida. Obtemos assim aplicação $\tilde{T} : X \to Y$, $\tilde{T}a = b$.

Dados x e y em X e α em $\mathbb{C}$, sejam (x_n) e (y_n) sequências em D convergindo a x e y, respectivamente. Segue do Problema 1.4 que $x_n + \alpha y_n \to x + \alpha y$. Segue da definição de $\tilde{T}$ e, de novo, do Problema 1.4 que

$$\tilde{T}(x + \alpha y) = \lim_n T(x_n + \alpha y_n) = \lim_n (Tx_n + \alpha Ty_n) = \tilde{T}x + \alpha\tilde{T}y,$$

o que prova que $\tilde{T}$ é linear. Além disso, segue de (24) que

$$\|\tilde{T}x\| = \lim_n \|Tx_n\| \leq C\|x_n\| = C\|x\|,$$

o que prova que $\tilde{T}$ é contínua e que toda C que faz o serviço em (24) para T serve também para $\tilde{T}$.

A unicidade é consequência imediata da densidade de D em X $\square$

Os Teoremas 3.1 e 3.5 se estendem de maneira mais ou menos previsível para o caso de transformações bilineares.

Dados dois espaços vetoriais normados X e Y, há mais de uma maneira de definir uma norma no produto cartesiano. Nos dois resultados seguintes, ou quando não dissermos nada em contrário, assumiremos que a norma em $X \times Y$ é dada por $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

Teorema 3.6. *Sejam X, Y e Z e seja $B : X \times Y \longrightarrow Z$ uma aplicação bilinear. São equivalentes as seguintes condições:*

(i) *B é contínua em todos os pontos de $X \times Y$.*

(ii) *B é contínua em $(0, 0)$.*

(iii) *Existe $C \geq 0$ tal que $\|B(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\|$ para todos $x \in X$, $y \in Y$.*

`Demonstração`: Suponha que B é contínua em $(0, 0)$. Tomando $\epsilon = 1$ na definição de continuidade, obtemos $\delta > 0$ tal que $\|B(x, y)\| \leq 1$ sempre que $\|x\| + \|y\| \leq \delta$. Daí,

$$\|x\| \leq \frac{\delta}{2} \text{ e } \|y\| \leq \frac{\delta}{2} \quad \Longrightarrow \quad \|B(x, y)\| \leq 1.$$

Se x ou y se anulam, a desigualdade em (iii) é trivialmente satisfeita, qualquer que seja o C.

Dados x e y ambos não-nulos, tomemos $x' = \dfrac{\delta x}{2\|x\|}$ e $y' = \dfrac{\delta y}{2\|y\|}$. Como $\|x'\| \leq \frac{\delta}{2}$ e $\|y'\| \leq \frac{\delta}{2}$, vem que $\|B(x', y')\| \leq 1$ e portanto

$$\|B(x,y)\| = \left\| B\left(\frac{2\|x\|}{\delta}x', \frac{2\|y\|}{\delta}y'\right)\right\| \leq \frac{4}{\delta^2}\|B(x',y')\|\|x\|\|y\| \leq \frac{4}{\delta^2}\|x\|\|y\|.$$

Isto prova (iii) com $C = \dfrac{4}{\delta^2}$.

Suponha agora que vale (iii). Dados $(a,b) \in X \times Y$ e sequência (x_n, y_n) em $X \times Y$ convergindo para (a,b), temos

$$\|B(x_n,y_n) - B(a,b)\| \leq \|B(x_n,y_n) - B(x_n,b)\| + \|B(x_n,b) - B(a,b)\| =$$
$$\|B(x_n, y_n - b)\| + \|B(x_n - a, b)\| \leq C(\|x_n\|\|y_n - b\| + \|x_n - a\|\|b\|).$$

Como $\|x_n - a\| \longrightarrow 0$, $\|y_n - b\| \longrightarrow 0$ e $\|x_n\| \longrightarrow \|a\|$, vem que $B(x_n, y_n) \longrightarrow B(a,b)$, o que prova que B é contínua em (a,b). □

Exemplos de espaços de Banach.

Problema **3.8.** *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Se Y é completo, então $\mathcal{L}(X,Y)$ é completo.*

`Exemplo` **3.7.** $C[a,b]$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ do Exemplo 2.18 é um espaço de Banach. Isso vale também se pusermos no lugar de $[a,b]$ qualquer espaço topológico de Hausdorff compacto [3, Proposition 1.2].

`Exemplo` **3.8.** Para cada $p \geq 1$ real, o espaço ℓ^p introduzido no Exemplo 2.4 é completo. Veja [8, Exemplo H.6 da Seção I.5] para o caso $p = 2$. O caso p qualquer real é análogo. Essas afirmações podem ser obtidas, também, como casos particulares de [15, Theorem 3.11] (aplicado a $\mathbb{N}$ com a medida da contagem).

É bem mais fácil provar que o espaço ℓ^∞ de todas as sequências complexas limitadas é um espaço de Banach, se munido da norma $\|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_n |c_n|$.

Problema **3.9.** (a) Mostre que $\ell^p \subset \ell^q$ se $1 \leq p < q \leq \infty$.
(b) Mostre que ℓ^p é denso em ℓ^q se $1 \leq p < q < \infty$.
(c) Seja c_0 o espaço de todas as sequências complexas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \to 0$, seja c_c o espaço de todas as sequências complexas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que x_n só é diferente de zero para finitos valores de n. Mostre que c_0 é um subespaço fechado de ℓ^∞ e que c_c denso em c_0.
(d) Mostre que, se $p < \infty$, o fecho de ℓ^p em ℓ^∞ (com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$) é igual a c_0.
(e) Conclua que ℓ^p não é denso nem fechado em ℓ^∞ se $p < \infty$.
Dica: O item (a) decorre de [8, Exercício II.1.8-e], mas é mais fácil que ele.

Problema **3.10.** Mostre que $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ não é completo se $1 \leq p < \infty$ (veja o Exemplo 2.18).

O fato de $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ não ser completo se $1 \leq p < \infty$ (veja o Problema 3.10) coloca naturalmente a pergunta: será que se pode dar uma descrição de seu completamento mais concreta do que a oferecida pela demonstração do Teorema 1.17? A resposta é sim, mas para tanto precisamos da integral de Lebesgue.

Dado $p > 1$, denotemos por $L^p[a,b]$ o quociente do espaço vetorial

$$\{f : [a,b] \to \mathbb{C};\, f \text{ é mensurável à Lebesgue e } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$$

pela relação de equivalência

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ q.t.p.}$$

Um abuso de notação comum, que também vamos cometer, é não distinguir entre uma função e sua classe de equivalência. A *Desigualdade de Hölder-Minkowski* [15, Theorem 3.5] nos diz que

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é uma norma em $L^p[a,b]$. O *Teorema de Riesz-Fisher* [15, Theorem 3.11] nos diz que $L^p[a,b]$ é um espaço de Banach para todo $p \geq 1$ e que $L^2[a,b]$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

$C[a,b]$ é denso em $L^p[a,b]$ se $1 \leq p < \infty$ (veja [14, Problem I.18] ou [15, Theorem 3.14]). Isto é, $L^p[a,b]$ é uma possível solução para o problema de achar-se um espaço de Banach contendo $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ como subespaço denso. Segue da última parte do Teorema 1.17 que $L^p[a,b]$ é isometricamente isomorfo (isto é, é isomorfo por um isomorfismo que preserva norma) ao espaço $(C[a,b], \|\cdot\|_p)\tilde{}$ construído na demonstração do Teorema 1.17. Falando livremente, podemos dizer que esse isomorfismo "deixa fixo o subespaço denso $C[a,b]$" (a afirmação precisa é dada no enunciado do teorema). Ou ainda mais livremente, $L^p[a,b]$ *é* o completamento de $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$.

Os Teoremas de [15] que usamos na discussão precedente, na verdade, são enunciados e demonstrados para espaços muito mais gerais que $[a,b]$. Eles implicam também que, para cada $1 \leq p < \infty$ e para cada aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, o completamento de

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C};\ f \text{ é contínua}$$
$$\text{e se anula fora de um compacto } K \subset \Omega\}$$

com respeito à norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é *igual* ao espaço $L^p(\Omega)$ das (classes de equivalência das) funções de Ω em $\mathbb{C}$ mensuráveis a Lebesgue tais que $\|f\|_p < \infty$. O *suporte* de uma $f \in C_c(\Omega)$ é o menor compacto fora do qual f se anula. Chama-se $C_c(\Omega)$ de *o espaço das funções contínuas de suporte compacto.*

Para algumas aplicações, esta descrição de $L^p(\Omega)$, como sendo o completamento de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_p)$, é perfeitamente satisfatória. Mas resultados [3] que envolvam algo além da estrutura de espaço de Banach de $L^p(\Omega)$, ou da estrutura de espaço de Hilbert de $L^2(\Omega)$, em geral não fazem sentido no completamento abstrato.

O completamento de $C_c(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$ (Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ arbitrário) é o espaço $C_0(\Omega)$ de todas as funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tais que, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K$. Vejam [15, Theorem 3.17] para uma demonstração deste fato (enunciado e demonstrado

[3] Por exemplo, a afirmação de que toda sequência convergente em $L^p(\Omega)$ possui uma subsequência convergente ponto-a-ponto em quase toda parte.

para espaços topológicos de Hausdorff e localmente compactos, classe que inclui os abertos de $\mathbb{R}^n$).

No caso de Ω ser um aberto limitado, $C_0(\Omega)$ coincide com o espaço das funções complexas contínuas em Ω que admitem extensão contínua ao fecho de Ω que se anula na fronteira de Ω. No caso de Ω não ser limitado, requeremos ademais que $f(x)$ tenda a zero quando $|x| \to \infty$. A demonstração da equivalência dessas duas definições de $C_c(\Omega)$ é um belo exercício de topologia do $\mathbb{R}^n$, que vamos omitir.

Problema **3.11.** Dado Ω um aberto limitado em $\mathbb{R}^n$, denote por $C(\bar{\Omega})$ o espaço das funções complexas contínuas definidas no fecho de Ω. Mostre que a restrição a Ω, $f \mapsto f|_\Omega$, define uma aplicação linear contínua injetora de $C(\bar{\Omega})$ em $L^2(\Omega)$.

Problema **3.12.** (a) Mostre que o funcional linear

$$C[a,b] \ni f \longmapsto f(a) \in \mathbb{C}$$

é contínuo em $C[a,b]$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$, mas não admite extensão linear contínua a $L^1[a,b]$ nem a $L^2[a,b]$.
(b) Mostre que o funcional linear

$$C[a,b] \ni f \longmapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{C}$$

é contínuo em $C[a,b]$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$, e admite extensões lineares contínuas a $L^1[a,b]$ e a $L^2[a,b]$.

Problema **3.13.** (a) Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto f(0) \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$ nem a $L^2(\mathbb{R})$.
(b) Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $L^1(\mathbb{R})$, mas não a $L^2(\mathbb{R})$ nem a $C_0(\mathbb{R})$.
(c) Fixada $g \in C_c(\mathbb{R})$ não-nula, mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x)dx \in \mathbb{C}$$

admite extensão linear contínua a $L^2(\mathbb{R})$, a $L^1(\mathbb{R})$ e a $C_0(\mathbb{R})$.
(d) Seja g a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^{-1/4} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x^{-1} & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

Mostre que o funcional linear

$$C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \in \mathbb{C}$$

está bem definido, admite extensão linear contínua a $L^2(\mathbb{R})$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$, nem a $C_0(\mathbb{R})$.

Problema **3.14.** Calcule as normas dos funcionais lineares contínuos que definimos nos Problemas 3.12 e 3.13.

Os espaços $H_1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Dado Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, diremos que $f \in C^1(\overline{\Omega})$ se $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ é a restrição de uma função de classe C^1 definida em um aberto contendo $\overline{\Omega}$. Denotaremos por ∇f o gradiente de f.

Definamos $H^1(\Omega)$ como sendo o completamento do espaço vetorial com produto interno $(C^1(\bar{\Omega}), \langle\cdot,\cdot\rangle^1)$,

$$\langle f, g\rangle^1 := \int_\Omega \overline{f} g\, dx + \int_\Omega \nabla\overline{f}\cdot\nabla g\, dx,$$

e $H_0^1(\Omega)$ como sendo o completamento do espaço vetorial com produto interno $(C_0^1(\bar{\Omega}), \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$,

$$\langle f, g\rangle_1 := \int_\Omega \nabla\overline{f}\cdot\nabla g\, dx.$$

Se a é o raio de uma bola centrada na origem contendo Ω, então para toda $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ temos

$$\int |u(x)|^2 dx \;\le\; 2a^2\langle u, u\rangle_1. \tag{25}$$

Esta é a *desigualdade de Poincaré*, vejam [10, Seção 4.5] ou [16, Proposition 23.4]. Devo alertá-los, entretanto, de que este é um ponto bem delicado. A demonstração de Treves [16] é para uma u de classe C^∞ e com suporte compacto contido no interior de Ω. Aparentemente, John [10] afirma (o estilo do livro é provar teoremas sem enunciá-los precisamente) que a desigualdade vale para toda $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$. Mas em um certo ponto da demonstração, ele faz uma hipótese simplificadora sobre a fronteira. Afirmo que as duas demonstrações se aplicam também no caso mais geral, tal como enunciei aqui. Isso será eventualmente incluído em um apêndice, para não atrair demais a atenção de vocês para fora dos objetivos da disciplina.

Encarando a aplicação restrição como uma inclusão (veja o Problema 3.11), podemos considerar $C(\bar{\Omega})$, assim como seus subespaços $C_0^1(\bar{\Omega})$ e $C^1(\bar{\Omega})$, como subespaços de $L^2(\Omega)$. É o que fazemos no enunciado dos dois problemas seguintes.

Problema **3.15.** Usando (25), prove que:
(a) Existe uma única aplicação linear e contínua

$$\imath_1 : H_0^1(\Omega) \;\longrightarrow\; L^2(\Omega)$$

cuja restrição a $C_0^1(\bar{\Omega})$ seja igual à identidade.
(b) Existe uma única aplicação linear e contínua

$$\imath_2 : H^1(\Omega) \;\longrightarrow\; L^2(\Omega)$$

cuja restrição a $C^1(\bar{\Omega})$ seja igual à identidade.
(c) Existe uma única aplicação linear injetora, contínua e de imagem fechada

$$\imath_3 : H_0^1(\Omega) \;\longrightarrow\; H^1(\Omega)$$

cuja restrição a $C_0^1(\bar{\Omega})$ seja igual à inclusão de $C_0^1(\bar{\Omega})$ em $C^1(\bar{\Omega})$.
(d) $\imath_1$ é a composião de $\imath_2$ com $\imath_3$, $\imath_1 = \imath_2 \circ \imath_3$.

Quando vale a injetividade de $\imath_1$ e $\imath_2$ (veja a Observação 5.4), nem se menciona a existência das aplicações $\imath_1$, $\imath_2$ e $\imath_3$ construídas no Problema anterior. Diz-se simplesmente que $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço de $H^1(\Omega)$, que é um subespaço de $L^2(\Omega)$.

Problema **3.16.** Dadas funções $a_1, \cdots, a_n$ e b, contínuas de $\bar{\Omega}$ em $\mathbb{C}$, defina, para cada $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$,

$$(Lu)(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u(x). \tag{26}$$

Prove que $L : C_0^1(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$ se estende a uma transformação linear contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

Problema **3.17.** Seja $H_0^1(a,b)$ o espaço que se obtém substituindo Ω pelo intervalo aberto limitado (a,b) no espaço definido no Problema 3.15. Mostre que $H_0^1(a,b)$ é um subespaço de

$$C_0(a,b) = \{f \in C[a,b];\, f(0) = f(1) = 0\};$$

isto é, mostre [4] que existe uma injeção contínua de $H_0^1(a,b)$ em $C_0(a,b)$ cuja restrição a $C_0^1[a,b]$ é a identidade.
Sugestão: Use o Teorema Fundamental do Cálculo para estimar o supremo de uma $u \in C_0^1[a,b]$ em termos da norma de u em $H_0^1(a,b)$.

Operadores densamente definidos.

`Definição` **3.9.** *Um operador densamente definido entre os espaços de Banach X e Y é uma transformação linear (não necessariamente contínua) $T : D \to Y$, onde D é um subespaço denso de X. Quando $X = Y$, diz-se que T é um operador densamente definido em X.*

Um operador densamente definido que seja contínuo é normalmente identificado com sua única extensão contínua a todo o espaço X. Isso explica porque os operadores densamente definidos são frequentemente chamados de *operadores ilimitados*. Vamos evitar essa nomenclatura. Para quem a usa, "ilimitado" não significa "não-limitado", mas apenas "não necessariamente limitado".

`Exemplo` **3.10.** Se Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $C_0^1(\bar{\Omega})$ é denso em $L^2(\Omega)$. Na verdade, mesmo sem se supor que Ω é limitado, demonstra-se que o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ de todas de todas funções de classe C^∞ com suporte compacto contido em Ω é denso [5] em qualquer $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. E é óbvio que $C_0^1(\bar{\Omega})$ contém $C_c^\infty(\Omega)$.

O operador L definido em (26) com domínio $C_0^1(\bar{\Omega})$ é portanto um exemplo de um operador densamente definido no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$.

Problema **3.18.** Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e seja $T : D \to X$ um operador densamente definido em X satisfazendo [6] a seguinte condição: se (x_n) é uma sequência em D tal que $x_n \to 0$ e Tx_n converge, então $Tx_n \to 0$.
(a) Mostre que $|||x||| = \|Tx\| + \|x\|$ é uma norma em D.
(b) Mostre que T, visto como uma transformação linear entre os espaços vetoriais normados $(D, |||\cdot|||)$ e $(X, \|\cdot\|)$, é contínua.
(c) Seja $\tilde{D}$ o completamento de D com respeito à norma $|||\cdot|||$. Mostre que existe uma única aplicação linear injetora contínua de $\tilde{D}$ em X cuja restrição a D seja igual à identidade.

---

[4] Este é um caso particular de um dos *teoremas de imersão* de Sobolev [6, Theorem 7.10].

[5] Isto se prova usando convolução. O caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ é demonstrado em [5, Proposition 8.17]. O caso geral decorre deste caso particular, usando-se também [5, Lemma 8.18].

[6] Isto é, T é *fechável*, de acordo com a Definição 7.19. Esta hipótese só é necessária para os dois últimos itens.

(d) Mostre que, se T, visto como uma transformação linear de $(D, \|\cdot\|)$ em $(X, \|\cdot\|)$, é contínua, então [7] a injeção do item (c) é sobrejetora com inversa contínua.

Problema **3.19.** No Problema 3.18, faça $X = L^2[a,b]$, $D = C_0^1[a,b]$, $Tu = u'$ para toda $u \in D$. Verifique que $\tilde{D} = H_0^1(a,b)$.

Problema **3.20.** Seja p real, $p \geq 1$. No Problema 3.18, faça $X = \ell^p$, D igual ao conjunto de todas as sequências complexas (x_n) que se anulam exceto para finitos valores de n, e defina em D o operador

$$D \ni \mathbf{x} = (x_n) \longmapsto T\mathbf{x} = (nx_n) \in X.$$

(a) Mostre que T satisfaz a hipótese do Problema 3.18.
(b) Dê uma descrição de $\tilde{D}$ que não faça menção a D nem a T.

4. Projeções em espaços de Hilbert

Teorema 4.1. *Seja M um subespaço fechado do espaço de Hilbert H. Para cada $x \in H$, existe um único $z \in M$ tal que*

$$\|z - x\| \leq \|y - x\|, \quad \textit{para todo} \quad y \in M.$$

`Demonstração`: Dado $x \in H$, seja

$$d = \inf_{y \in M} \|y - x\|.$$

Queremos provar que existe um único $z \in M$ tal que $\|z - x\| = d$.

Seja (y_n) uma sequência em M tal que $\|y_n - x\| \to d$. Usando a identidade do paralelogramo (Problema 2.5), obtemos:

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2.\end{aligned}$$

Como $(y_n + y_m)/2$ pertence a M, vem:

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2. \tag{27}$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies \|y_n - x\|^2 < d^2 + \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Então, se n e m forem maiores que N, a estimativa (27) implica que $\|y_n - y_m\| < \epsilon$. Isto é, (y_n) é de Cauchy. Como H é completo, existe $z \in H$ tal que $y_n \to z$. Como M é fechado, $z \in M$. Como a norma é contínua,

$$\|z - x\| = \lim_n \|y_n - x\| = d,$$

o que prova a existência.

Se $\tilde{z} \in M$ é tal que $\|\tilde{z} - x\| \leq \|y - x\|$ para todo $y \in M$, então $\|\tilde{z} - x\| = d$. Daí vem, por argumentos análogos aos anteriores:

$$\|\tilde{z} - z\|^2 = 2\|\tilde{z} - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 - 4\|\frac{z + \tilde{z}}{2} - x\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

[7] Vale também a seguinte recíproca. Se a injeção do item (c) for sobrejetora, então sua inversa e T são automaticamente contínuos. Veremos que esta é uma das muitas e surpreendentes consequências do Teorema de Baire em Análise Funcional

Logo $z = \tilde{z}$. $\square$

Notem que só usamos que M é subespaço para provar que $(x+y)/2 \in M$ se x e y estão em M. Ou seja, a demonstração acima mostra também que a distância de qualquer subconjunto convexo e fechado a um ponto em um espaço de Hilbert é sempre assumida. A distância de um fechado F qualquer a um ponto fora dele pode não ser assumida, se F não for convexo. É o caso, por exemplo, da distância da origem ao gráfico da função $f(x) = \cos(1/x)$, $x \neq 0$, visto como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{C}$.

Definição 4.2. *Dado M um subespaço qualquer de um espaço de Hilbert H, o complemento ortogonal de M em H é o subespaço $M^\perp \subseteq H$ dado por:*

$$M^\perp = \{x \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in M\}.$$

É fácil ver que $M \cap M^\perp = \{0\}$, qualquer que seja o M.

Teorema 4.3. (Existência de projeções) Seja M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H. Para todo $x \in H$, existem únicos $z \in M$ e $w \in M^\perp$ tais que $x = z + w$.

Demonstração: Dado $x \in H$, use o Teorema 4.1 para obter $z \in M$ tal que

$$\|z - x\| = \inf_{y \in M} \|y - x\| = d.$$

Dados quaisquer $y \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, temos então:

$$d^2 \leq \|x - (z + ty)\|^2 = \|x - z\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t \cdot Re\langle x - z, y\rangle.$$

Isto é,

$$\|y\|^2 t^2 + 2t \cdot Re\langle x - z, y\rangle \geq 0, \quad \text{para todo } \ t \in \mathbb{R},$$

logo $Re\langle x - z, y\rangle = 0$.

Trocando y por iy no que acabamos de provar, vem

$$0 = Re\langle x - z, iy\rangle = Re(i\langle x - z, y\rangle) = -Im\langle x - z, y\rangle,$$

logo $\langle x - z, y\rangle = 0$.

Definindo-se $w = x - z$, tem-se a existência. A unicidade decorre imediatamente de $M \cap M^\perp = \{0\}$. $\square$

Problema **4.1.** Seja M um subespaço de um espaço de Hilbert H. Denotando por $\overline{M}$ seu fecho (Definição 1.6), mostre que:
(a) $M^\perp$ é fechado.
(b) $(\overline{M})^\perp = M^\perp$.
(c) $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.
(d) M é denso em H se e somente se $M^\perp = \{0\}$.
Sugestões: No (a) e no (b), use Cauchy-Schwarz. Para provar que $(M^\perp)^\perp$ está contido em $\overline{M}$, use o Teorema 4.3.

Projeções.

Dado M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, para cada $x \in H$, defina Px como sendo o único elemento de M tal que $x - Px$ pertence a $M^\perp$ (Px é o z do Teorema 4.3). Segue do Teorema 4.3 que $P : H \to H$ é uma transformação linear, que $P^2 = P$, que $x = Px$ se e somente se $x \in M$, e que a imagem de P é igual a M.

Como Px e $x - Px$ são ortogonais,

$$\|Px\|^2 = \|x\|^2 + \|x - Px\|^2, \text{ para todo } x \in H,$$

logo $\|Px\| \leq \|x\|$ para todo $x \in H$, logo $\|P\| \leq 1$. Como $\|Px\| = \|x\|$ para todo $x \in M$, vem que $\|P\| \geq 1$ (logo $\|P\| = 1$) se $M \neq \{0\}$.

Definição 4.4. *Seja M um subespaço fechado de um espaço de Banach X. Uma* projeção sobre M *é uma transformação linear contínua $P : X \to X$ tal que $P^2 = P$ e a imagem de P é igual a M.*

Acabamos de ver que, dado qualquer subespaço fechado de um espaço de Hilbert, existe uma projeção sobre ele de norma igual a um. Espaços de Banach mais gerais podem ter subespaços fechados sem projeções. No caso de um subespaço fechado M de um espaço de Hilbert, a projeção construída acima é chamada de *projeção ortogonal* sobre M (pois $x - Px$ e Px são ortogonais para todo $x \in M$).

Problema **4.2.** Mostre que, se M é um subespaço fechado de um espaço de Banach X tal que existe uma projeção sobre M, então X possui um subespaço fechado N tal que $X = M \oplus N$.

Adiante, como mais uma consequência do Teorema de Baire, veremos que vale a recíproca da afirmação precedente: dado M subespaço fechado de um espaço de Banach X, existe um subespaço fechado N tal que $X = M \oplus N$ se e somente se existe uma projeção sobre M.

Problema **4.3.** Mostre que

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots) \longmapsto (x_2, x_3, x_4, \cdots)$$

é um operador linear contínuo em ℓ^2. Mostre que o núcleo deste operador é um subespaço fechado de ℓ^2 e descreva a projeção ortogonal sobre ele.

O dual de um espaço de Hilbert.

Seja H um espaço de Hilbert. Para cada $x \in H$, definamos um funcional linear $\langle x| : H \to \mathbb{C}$ por $\langle x|(y) = \langle x, y\rangle$ para todo $y \in H$. Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\langle x|(y)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

e, portanto, $\langle x|$ é contínuo, de norma menor ou igual a $\|x\|$. Vale também a igualdade, $\|\langle x|\,\| = \|x\|$. Para provar isto, basta provar que existe y de norma unitária tal que $\langle x, y\rangle = \|x\|$. Se $x = 0$, qualquer y serve. Se $x \neq 0$, tome $y = x/\|x\|$.

Temos portanto uma aplicação

$$\begin{aligned} \langle\cdot| : H &\longrightarrow H^* \\ x &\longmapsto \langle x| \end{aligned} \tag{28}$$

que preserva a norma, preserva a soma, e satisfaz $\langle \alpha x| = \bar{\alpha}\langle x|$ para todo $x \in H$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. O próximo teorema afirma que $\langle\cdot|$ é sobrejetora.

5. O Lema de Riesz

O teorema seguinte, conhecido como Lema de Riesz, foi demonstrado independentemente por Fréchet e Riesz. Os dois artigos apareceram num mesmo exemplar do *Comptes Rendus* da Academia de Ciências de Paris, em 1907, bem antes de os espaços de Hilbert terem sido definidos (vejam as notas bibliográficas de [14, Capítulo II]).

Teorema 5.1. *Seja H um espaço de Hilbert. Para todo funcional linear contínuo $T : H \to \mathbb{C}$, existe um único $y \in H$ tal que $T = \langle y|$.*

`Demonstração`: Se $T = 0$, podemos tomar $y = 0$. Basta, portanto, supor $T \neq 0$. Seja N o núcleo de T, $N = \{x \in H; Tx = 0\}$. Como T é contínuo, N é fechado (pois, se (x_n) é uma sequência em N e $x_n \to x$, então $0 = Tx_n \to Tx$, logo $x \in N$). Como T é não nulo, existe $x \in H$ que não pertence a N. Seja $z \in N$ tal que $w = x - z \in N^\perp$ (z existe, pelo Teorema 4.3). w não é nulo pois, se fosse nulo, x pertenceria a N. Tome

$$y = \frac{\overline{T(w)}}{\|w\|^2} w.$$

Se $x' \in N$, então $\langle y, x'\rangle = 0 = Tx'$. Se x' é um múltiplo de w, $x' = \alpha w$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\langle y, x'\rangle = \langle y, \alpha w\rangle = \langle \frac{\overline{T(w)}}{\|w\|^2} w, \alpha w\rangle = \alpha T(w) = T(x').$$

Isto prova que T e $\langle y|$ coincidem no subespaço gerado por w e N. Isso dá o espaço inteiro, pois todo $x' \in H$ pode ser escrito como a soma de um vetor em N com um múltiplo de w,

$$x' = \left(x' - \frac{T(x')}{T(w)} w\right) + \frac{T(x')}{T(w)} w$$

(note que $Tw \neq 0$, pois $0 \neq w \in N^\perp$ e $N \cap N^\perp = \{0\}$). Isto prova a existência.

A unicidade decorre de $\langle \cdot|$ ser injetora, pois preserva norma. □

Uma consequência do Teorema 5.1 é que o dual de um espaço de Hilbert é um espaço de Hilbert. Torno esta afirmação mais precisa no enunciado do problema seguinte. Depois veremos que o dual de qualquer espaço vetorial normado, munido da norma-de-operador, também é um espaço de Banach.

Problema **5.1.** Seja H um espaço de Hilbert. Mostre que $[\,\langle x|, \langle y|\,] = \langle y, x\rangle$ define um produto interno $[\cdot,\cdot]$ em H^* e que a norma induzida por este produto interno coincide com a norma-de-operador em H^*. Conclua então que H^* é completo.

O Problema de Dirichlet.

Nesta subseção, mostramos como o Lema de Riesz implica a existência e a unicidade da solução fraca do *problema de Dirichlet*

$$(29) \qquad \left\{ \begin{array}{rl} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. ,$$

onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sua fronteira, e Δ denota o laplaceano,

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Esta é uma importante aplicação, tanto do ponto de vista histórico, quanto pelo amplo uso que se tem feito desta técnica no estudo de outros problemas de valor de fronteira para equações diferenciais parciais.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ com fecho contido na bola de centro na origem e raio a. Dadas $f \in C(\bar\Omega)$ e $\varphi \in C_0^1(\bar\Omega)$ (espaços definidos nos Problemas 3.11 e 2.6, respectivamente), a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $L^2(\Omega)$, seguida da desigualdade de Poincaré (25), implicam que

$$\left|\int_\Omega \overline{f(x)}\varphi(x)dx\right| \le \sqrt{2}a\cdot\left(\int_\Omega |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

onde denotamos por $|\cdot|$ tanto o valor absoluto em $\mathbb{C}$ quanto a norma euclideana em $\mathbb{C}^n$, e por $\nabla\varphi$ o gradiente de φ.

Lembrem que definimos $H_0^1(\Omega)$ como sendo o completamento de $C_0^1(\bar\Omega)$ munido do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ do Problema 2.6. A estimativa (30) significa, precisamente, que o funcional linear $\varphi\mapsto\lambda(\varphi)$,

$$\lambda(\varphi) \,=\, -\int_\Omega \overline{f(x)}\varphi(x)dx,$$

a princípio definido apenas no subespaço denso $C_0^1(\bar\Omega)$, se estende a um funcional linear contínuo $\tilde\lambda : H_0^1(\Omega)\to\mathbb{C}$ de norma menor ou igual a $\sqrt{2}a$ vezes a norma de f em $L^2(\Omega)$. Pelo Teorema 5.1, existe uma única $u\in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u,\varphi\rangle_1 \,=\, \tilde\lambda(\varphi) \text{ para toda } \varphi\in H_0^1(\Omega).$$

Isto dá, em particular:

$$\langle u,\varphi\rangle_1 \,=\, -\int_\Omega \overline{f(x)}\varphi(x)dx, \text{ para toda } \varphi\in C_0^1(\bar\Omega). \tag{31}$$

`Definição` **5.2.** *Dada $f\in C(\bar\Omega)$, dizemos que $u\in H_0^1(\Omega)$ é uma* solução fraca *para o problema* (29) *se vale* (31). *Uma* solução clássica *de* (29) *é uma função u de classe C^2 em Ω, satisfazendo $\Delta u = f$ em Ω, possuindo extensão contínua a $\bar\Omega$ que se anula na fronteira.*

Sob certas condições, toda solução fraca é clássica, e vice-versa. Falaremos um pouco disso após demonstrarmos a existência e a unicidade da solução fraca.

Teorema 5.3. *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Para toda $f\in C(\bar\Omega)$, existe uma única solução fraca $u\in H_0^1(\Omega)$ do problema de Dirichlet* (29).

`Demonstração`: A discussão que precede a Definição 5.2 demonstra a existência.

Se u_1 e u_2 são soluções fracas de (29), $\langle u_1-u_2,\varphi\rangle_1 = 0$ para toda $\varphi\in C_0^1\bar\Omega)$. Isto é, u_1-u_2 pertence ao complemento ortogonal de $C_0^1(\bar\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $C_0^1(\bar\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, segue então do Problema 4.1-d que $u_1-u_2=0$. □

Se a fronteira $\partial\Omega$ for uma superfície (de dimensão $n-1$) de classe C^1, então é possível demonstrar que uma solução fraca de (29) é necessariamente uma solução clássica. O passo mais difícil [8] é provar que toda solução fraca de (29), da qual se sabe a princípio apenas que está em $H_0^1(\Omega)$, na verdade pertence a $C^2(\Omega)$ e tem extensão contínua que se anula na fronteira.

Vamos aqui apenas dar condições suficientes para que uma solução fraca seja solução clássica. Suponhamos que a fronteira de Ω é de classe C^1, e que u é uma solução fraca de (29) que pertença a $C_0^2(\bar\Omega)$, isto é, u é a restrição a $\bar\Omega$ de uma função de classe C^2 definida em um aberto contendo $\bar\Omega$ que se anula na fronteira de Ω. Provemos que u é uma solução clássica de (29).

[8] Isto é bem mais complicado do que aplicar o Lema de Riesz. Os resultados de [16, Seção 29] implicam mais do que afirmamos aqui. Um tratamento mais elementar, mas incompleto, é dado em [10, Seção 4.5].

A hipótese sobre a fronteira nos permite aplicar o *teorema da divergência*, isto é, o teorema de Stokes para abertos de $\mathbb{R}^n$, que enunciamos a seguir. Se $\vec{F} = (F^1, \cdots, F^n)$ é um campo vetorial com componentes $F^j \in C^1(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\partial\bar{\Omega}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \;=\; \int_{\Omega} \mathtt{div}\vec{F}\, dx, \tag{32}$$

onde $\mathtt{div}\vec{F} = \sum_j \partial F^j/\partial x_j$, $\vec{n}$ é o vetor normal à fronteira e "$\cdot$" denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

Para cada $\varphi \in C^1_0(\bar{\Omega})$, apliquemos (32) ao campo $\vec{F} = \varphi\overline{\nabla u}$. Como φ se anula na fronteira, a integral do lado esquerdo de (32) se anula para este $\vec{F}$. Derivando o produto e usando que $\mathtt{div}\nabla u = \Delta u$, obtemos então:

$$\langle u, \varphi\rangle_1 = \int_{\Omega} \overline{\nabla u} \cdot \nabla\varphi\, dx = -\int_{\Omega} (\overline{\Delta u})\varphi\, dx. \tag{33}$$

Juntas, (31) e (33) implicam que

$$\int \overline{(\Delta u - f)}\varphi\, dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in C^1_0(\bar{\Omega}). \tag{34}$$

Ou seja, $\Delta u - f$ (que está em $L^2(\Omega)$ pelo Problema 3.11) pertence ao complemento ortogonal em $L^2(\Omega)$ de $C^1_0(\bar{\Omega})$, que é denso em $L^2(\Omega)$ (veja nota de rodapé na página 26). O Problema 4.1-d então implica que $\Delta u - f = 0$, como queríamos.

`Observação` **5.4.** $(\cdots)$

Adjuntos.

Nesta subseção tratamos de uma consequência teórica do Lema de Riesz. É usando o Teorema 5.1 que se define o adjunto de um operador limitado entre espaços de Hilbert, ou de um operador densamente definido em um espaço de Hilbert, generalizando-se assim a operação de tomar o transposto-conjugado de matrizes complexas. Este é o ponto de partida de uma longa caminhada (da qual só percorreremos o começo) em direção a diversas generalizações do teorema espectral da Álgebra Linear.

Teorema 5.5. *Dada uma transformação linear contínua $T : H_1 \to H_2$ entre os espaços de Hilbert H_1 e H_2, existe uma única uma transformação linear contínua $T^* : H_2 \to H_1$ tal que*

$$\langle T^*x, y\rangle \;=\; \langle x, Ty\rangle \text{ para todos } x \in H_2 \text{ e } y \in H_1 \tag{35}$$

(denotamos ambos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, o produto interno de H_1 e o de H_2). Além disso, as normas de operador de T e T^* são iguais.

`Demonstração`: Para cada $x \in H_2$, seja $\lambda_x : H_1 \to \mathbb{C}$ o funcional linear definido por $\lambda_x(y) = \langle x, Ty\rangle$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definição de $\|T\|$ implicam, para todo $y \in H_1$, que

$$|\lambda_x(y)| = |\langle x, Ty\rangle| \leq \|x\| \cdot \|Ty\| \leq (\|T\| \cdot \|x\|) \cdot \|y\|.$$

Ou seja, λ_x é limitado e $\|\lambda_x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$. Segue do Teorema 5.1 que existe um único $z \in H_1$ tal que

$$\langle x, Ty\rangle \;=\; \langle z, y\rangle.$$

Segue de a aplicação definida em (28) preservar norma que $\|z\| = \|\lambda_x\|$, logo $\|z\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

Como existe um único z tal que $z = \lambda_x$, se existir a tal T^* do enunciado, ela terá de satisfazer $T^*x = z$. Tome então esta equação como a definição de T^*. Já provamos que vale (35) e que $\|T^*x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in H_2$.

Para provarmos que T é linear, notem que temos, para todos x_1 e x_2 em H_2, para todo y em H_1 e para todo complexo α:

$$\langle x_1 + \alpha x_2, Ty\rangle = \langle x_1, Ty\rangle + \bar{\alpha}\langle x_2, Ty\rangle =$$

$$\langle T^*x_1, y\rangle + \bar{\alpha}\langle T^*x_2, y\rangle = \langle T^*x_1 + \alpha T^*x_2, z\rangle.$$

Segue agora da unicidade da escolha do z que $T^*(x_1 + \alpha x_2) = T^*x_1 + \alpha T^*x_2$.

Isto prova o teorema, a menos da igualdade $\|T^*\| = \|T\|$. Até aqui, provamos apenas que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Mas notem que, tomando o complexo conjugado em ambos os lados de (35), obtemos

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, T^*x\rangle, \text{ para todos } y \in H_1 \text{ e } x \in H_2.$$

Isto é, $(T^*)^* = T$. Logo $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$, como queríamos. □

Verifique que, de fato, se A é uma matriz complexa n por m, então o adjunto do operador limitado $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ definido por A da maneira canônica é igual ao operador definido pelo transposto conjugado de A.

Problema **5.2.** Fazendo $p = 2$, ache o adjunto dos operadores limitados definidos nos Problemas 3.4 e 3.5.

Problema **5.3.** (a) Ache o adjunto da transformação linear contínua $L^2[a, b] \to \mathbb{C}$ definida no Problema 3.12-b.
(a) Ache o adjunto da transformação linear contínua $L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ definida no Problema 3.13-c.

Problema **5.4.** Sejam H_1, H_2 e H_3 espaços de Hilbert. Mostre que, se $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ e $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, então a composição $S \circ T$ pertence a $\mathcal{L}(H_1, H_3)$ e satisfaz

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \quad \text{e} \quad (S \circ T)^* = T^* \circ S^*. \tag{36}$$

Definição 5.6. *Uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ é um conjunto A munido de aplicações $+ : A \times A \to A$, $\circ : A \times A \to A$ e $\cdot : \mathbb{C} \times A \to A$ tais que $(A, +, \circ)$ é um anel, $(A, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e*

$$\alpha \cdot (x \circ y) = (\alpha \cdot x) \circ y = x \circ (\alpha \cdot y)$$

para todos x e y em A e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Define-se álgebra sobre $\mathbb{R}$ trocando-se $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ no que acabamos de falar.

Normalmente omitiremos os sinais que indicam as "multiplicações" ($\circ$ e $\cdot$). Escreveremos, por exemplo, apenas $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Exemplo 5.7. Os *quatérnios* [7, Seção III.1] são uma álgebra sobre $\mathbb{R}$, mas não sobre $\mathbb{C}$, pois $(ij)k = k^2 = -1 \neq 1 = -j^2 = j(ik)$.

Definição 5.8. *Uma* involução *numa álgebra complexa A é uma aplicação $* : A \to A$ tal que, para todos x e y em A e para todo α em $\mathbb{C}$, temos*

$$(x + \alpha y)^* = x^* + \bar{\alpha}y^*, \quad (x^*)^* = x \quad e \quad (xy)^* = y^*x^*. \tag{37}$$

`Exemplo` **5.9.** A demonstração do Teorema 5.5 mostra que $(T^*)^* = T$, para todo $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Isso, junto com o Problema 5.4, implicam então que, se H é um espaço de Hilbert, então $\mathcal{L}(H)$ é uma álgebra com involução (a involução sendo a operação de tomar o adjunto de um operador).

Seja agora T é um operador densamente definido em um espaço de Hilbert H, e seja D seu domínio. Defina D^* como sendo igual ao conjunto de todos os $x \in H$ tais que o funcional linear

$$D \ni y \;\longmapsto\; \langle x, Ty \rangle \in \mathbb{C}$$

é contínuo. Sendo este o caso, este funcional linear admite uma única extensão a um funcional linear contínuo de H em $\mathbb{C}$. Logo existe, pelo Lema de Riesz, um único $z \in H$ tal que

$$\langle x, Ty \rangle \;=\; \langle z, y \rangle \;\text{ para todo }\; y \in D.$$

É fácil ver que a aplicação $D^* \ni x \mapsto z \in H$ é linear. Se D^* for denso, diz-se então que T é *adjuntável*. Define-se T^*, o adjunto de T, como sendo o operador densamente definido

$$D^* \ni x \;\longmapsto\; T^*x = z \in H.$$

Em outras palavras o domínio de T^* é o conjunto de todos os x tais que existe z (igual então a T^*x) tal que, para todo y no domínio de T vale a igualdade

$$\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Note que, no caso em que $T : D \to H$ se estende a um elemento de $\mathcal{L}(H)$, as duas definições de adjunto coincidem.

PROBLEMA **5.5.** Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e sejam $a_1, \cdots, a_n$ pertencentes a $C^1(\bar{\Omega})$. Seja L o operador densamente definido em $L^2(\Omega)$ de domínio $C^1_0(\bar{\Omega})$, com Lu dado por (26) para cada u do domínio. Mostre que L é adjuntável.
Sugestão: Use que $C^\infty_c(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ e integre por partes. Para não se complicar demais com questões de Cálculo Integral, pode supor que Ω é um retângulo (mas esta hipótese é desnecessária).

`Definição` **5.10.** *Um operador densamente definido T é simétrico se o domínio de T^* contém o domínio de T e se a restrição de T^* ao domínio de T é igual a T. Um operador simétrico T é autoadjunto se o domínio de T^* é igual ao de T.*

PROBLEMA **5.6.** Seja T o operador densamente definido em $L^2(\mathbb{R})$ com domínio $C^\infty_c(\mathbb{R})$ dado por $Tf = -if'$.
(a) Mostre que T é simétrico.
(b) Mostre [9] que $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ pertence ao domínio de T^* e conclua então que T não é autoadjunto.

PROBLEMA **5.7.** Seja D o subespaço de ℓ^2 que consiste de todas as sequências $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $(jx_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ^2. Defina $T : D \to \ell^2$ por $T\mathbf{x} = (jx_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Mostre que T é autoadjunto.

[9] Neste item, é preciso usar a descrição de $L^2(\mathbb{R})$ como o conjunto das (classes de equivalência das) funções cujo módulo ao quadrado tem integral (de Lebesgue) finita.

6. Bases Hilbertianas

O que se costuma chamar de base de um espaço de Hilbert não é uma base no sentido da Álgebra Linear. Para evitar confusão, tentaremos sempre usar os termos *base hilbertiana* ou *conjunto ortonormal completo* para designar os tais conjuntos, que serão definidos e terão suas principais propriedades expostas nesta seção.

Antes de tratarmos de bases hilbertianas, estudaremos o significado de soma infinita em espaços vetoriais normados

Somas infinitas em espaços normados.

`Definição` **6.1.** *Uma família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ de elementos de um espaço vetorial normado X é* somável *se existe um $x \in X$ (chamado de soma da família) tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq I$ finito tal que, para todo F' finito, $F \subseteq F' \subseteq I$, temos*

$$\|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\| < \epsilon. \text{ Neste caso, escreve-se: } \sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x.$$

Às vezes, apenas para enfatizar a diferença entre esta e outras noções de soma infinita, chamaremos uma família somável de *incondicionalmente somável.* A razão para o uso do advérbio "incondicionalmente" deve ficar clara depois das proposições seguintes.

Proposição 6.2. *Seja I infinito e enumerável. Uma família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ em um espaço normado é somável, e sua soma é x, se e somente se, para toda bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to I$,*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} x_{\varphi(j)} \;=\; x. \tag{38}$$

`Demonstração`: Suponha que $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$ e seja $\varphi : \mathbb{N} \to I$ uma bijeção. Dado $\epsilon > 0$, seja F um subconjunto finito de I fornecido pela Definição 6.1. Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq \{\varphi(1), \cdots, \varphi(m_0)\}$. Se $m \geq m_0$, então $F \subseteq \{\varphi(1), \cdots, \varphi(m)\}$, então

$$\|\sum_{j=1}^{m} x_{\varphi(j)} - x\| < \epsilon,$$

o que prova (38).

Provemos agora que, se é falso que $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$, então existe bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to I$ tal que (38) é falsa. Pela Definição 6.1, x não ser a soma da família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ significa que

$$\exists\, \epsilon > 0; \text{ tal que } \forall\, F \subseteq I,\ F \text{ finito; } \exists\, F' \text{ finito, } F \subseteq F' \subseteq I; \text{ tal que} \tag{39}$$

$$\|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\| \geq \epsilon. \tag{40}$$

Enumere I, ou seja, escreva-o como $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\}$.

Aplicando (39) com $\{\alpha_1\}$ no lugar de F, vemos que I possui um subconjunto finito F_1, o F' produzido por (39), tal que $\alpha_1 \in F_1$ e vale (40) para F_1. Por indução, suponha que existem subconjuntos finitos de I, $F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n$, tais que, para todo j de 1 a n, $\alpha_j \in F_j$ e vale (40) se substituirmos F_j no lugar de F'. Aplicando então

(39) com $F_n \cup \{\alpha_n\}$ no lugar de F, obtemos F_{n+1} finito, $F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq I$, tal que $\alpha_{n+1} \in F_{n+1}$ e vale (40) se substituirmos $F' = F_{n+1}$.

A união de todos os F_n, $n \in \mathbb{N}$, é igual a I, pois $\alpha_n \in F_n$ para todo n. Podemos então enumerar cada F_n e usar essas enumerações para definir uma sequência $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to I$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n \;=\; \{\varphi(1), \cdots, \varphi(m_n)\}.$$

Claro que $m_n \to \infty$, pois I é infinito. A sequência $s_m = \sum_{j=1}^{m} x_{\varphi(j)}$ não converge para x, pois a subsequência $s'_n = s_{m_n}$ satisfaz $\|s'_n - x\| \geq \epsilon$ para todo n. □.

Proposição 6.3. *Se a família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é somável em um espaço normado, então $I' = \{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ é enumerável.*

`Demonstração`: Dado $\epsilon > 0$, seja $F \subseteq I$ finito tal que, para todo F' finito com $F \subseteq F' \subseteq I$, temos $\| \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\| \,<\, \epsilon$. Se $\alpha_0 \notin F$, então

$$\|x_{\alpha_0}\| \;=\; \|(x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha) - (x - \sum_{\alpha\in F\cup\{\alpha_0\}} x_\alpha)\|$$

$$\leq\; \|(x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha)\| + \|(x - \sum_{\alpha\in F\cup\{\alpha_0\}} x_\alpha)\| \;<\; 2\epsilon,$$

pois F e $F \cup \{\alpha_0\}$ contêm F.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplique o que fizemos no parágrafo anterior a $\epsilon = (2n)^{-1}$, chamando de F_n o finito F assim obtido. Concluímos então que I possui subconjuntos finitos $F_1, F_2, \cdots$ tais que $\|x_\alpha\| < 1/n$ se $\alpha \notin F_n$. Logo,

$$I_n \;=\; \{\alpha \in I; \|x_\alpha\| \geq 1/n\} \tag{41}$$

é finito para todo n, pois está contido em F_n.

Isto prova que o conjunto I' definido no enunciado é enumerável, pois é união enumerável de finitos, $I' = \cup_n I_n$. □

Proposição 6.4. *Seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família em um espaço normado X, seja $I' = \{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ e seja $x \in X$. Temos:*

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x \iff \sum_{\alpha\in I'} x_\alpha = x \;.$$

`Demonstração`: Dado $\epsilon > 0$, se F é um finito que faz o serviço exigido pela Definição 6.1 para a soma da esquerda no enunciado desta proposição, então $F \cap I'$ faz o serviço para a soma da direita. E se F faz o serviço para a da direita, faz também para a da esquerda. □

`Observação` **6.5.** O conteúdo das três proposições precedentes pode ser resumido na seguinte afirmação. Uma família em um espaço normado é somável se e somente se (i) ela só é diferente de zero para um conjunto enumerável de índices e (ii) enumerando esse conjunto de índices de qualquer maneira, as somas parciais dessa família formam uma sequência convergente, e o valor do limite não depende de como os índices são enumerados.

Problema **6.1.** (a) Sejam X e Y espaços vetoriais normados e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Mostre que, se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é uma família somável em X, então $\{Tx_\alpha; \alpha \in I\}$ é uma família somável em Y e temos

$$\sum_{\alpha \in I} Tx_\alpha = T(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha).$$

(b) Mostre que, se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{y_\alpha; \alpha \in I\}$ são famílias somáveis em X, então, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\{x_\alpha + \lambda y_\alpha; \alpha \in I\}$ é somável e

$$\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + \lambda y_\alpha) \ = \ \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \ + \ \lambda \sum_{\alpha \in I} y_\alpha.$$

Provaremos em seguida que toda família *absolutamente somável* em um espaço de Banach é incondicionalmente somável e que, em um espaço de Hilbert, toda família ortogonal cujas normas ao quadrado formem uma família absolutamente somável é incondicionalmente somável. Mais adiante, usaremos o segundo desses resultados para provar que a primeira das equações em (49) define uma bijeção entre H e as famílias de números complexos $\{c_\alpha; \alpha \in I\}$ tais que a soma $\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2$ seja finita.

`Definição` **6.6.** *Uma família $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ de elementos de um espaço vetorial normado X é* absolutamente somável *se*

$$\sup\{\sum_{\alpha \in F} \|x_\alpha\|, F \subseteq I \text{ finito}\} \ < \ \infty \tag{42}$$

Proposição 6.7. *Toda família absolutamente somável em um espaço de Banach é somável* (*veja a Definição 6.1*).

`Demonstração`: Seja X um espaço de Banach, e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família absolutamente somável em X. Denotemos por a o supremo em (42). A hipótese $a < \infty$ implica que, para cada n, $I_n = \{\alpha \in I; \|x_\alpha\| \geq 1/n\}$ é finito. Defina

$$y_n \ = \ \sum_{\alpha \in I_n} x_\alpha.$$

Provaremos em seguida que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e que seu limite é a soma da família dada.

Segue da definição de supremo que, para cada $\epsilon > 0$, existe $F_\epsilon \subseteq I$ finito, tal que, para todo $F' \subseteq I$ finito que contenha F_ϵ, temos

$$a - \epsilon \ < \ \sum_{\alpha \in F'} \|x_\alpha\| \ \leq \ a.$$

É claro que podemos supor que $F_\epsilon \subseteq I'$, onde $I' = \{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ (jogue fora os elementos de F_ϵ que não pertençam a I', que o que sobrar ainda fará o mesmo serviço). Como I' é a união de todos os I_n's, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\epsilon \subseteq I_{n_0}$. Daí, se $m \geq n \geq n_0$, temos:

$$\|y_n - y_m\| = \| \sum_{\alpha \in I_m \setminus I_n} x_\alpha \| \leq \sum_{\alpha \in I_m \setminus I_n} \|x_\alpha\|$$

$$= \sum_{\alpha \in I_m} \|x_\alpha\| - \sum_{\alpha \in I_n} \|x_\alpha\| < a - (a - \epsilon) = \epsilon.$$

Isto prova que (y_n) é de Cauchy. Como X é completo, existe $y \in X$ tal que $y_n \to y$. Provemos que

$$y = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja n_0 o natural escolhido acima. Escolha então $N \geq n_0$ tal que $\|y_N - y\| < \epsilon$. Se $F' \subseteq I$ é finito e contém I_N, então temos:

$$\begin{aligned}\|y - \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\| &\leq \|y - y_N\| + \|\sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} x_\alpha\| < \epsilon + \sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} \|x_\alpha\| \\ &= \epsilon + \sum_{\alpha\in F'} \|x_\alpha\| - \sum_{\alpha\in I_N} \|x_\alpha\| < \epsilon + a - (a-\epsilon) = 2\epsilon.\end{aligned}$$

Isto prova o que queríamos (I_N é o finito F requerido pela Definição 6.1 para o positivo 2ϵ). □

O supremo que aparece em (42) é também igual à soma da família de reais $\{\|x_\alpha\|; \alpha \in I\}$. É o que peço que provem no próximo problema.

Problema **6.2.** Seja $\{t_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família de reais não negativos.
(a) Mostre que, se

$$\sup\{\sum_{\alpha\in F} t_\alpha, F \subseteq I \text{ finito }\} < \infty,$$

então a família é somável e a soma é igual a esse supremo.
(b) Sejam $\{t_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{s_\alpha; \alpha \in I\}$ famílias de reais tais que $0 \leq t_\alpha \leq s_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Mostre que, se $\{s_\alpha; \alpha \in I\}$ é somável, então $\{t_\alpha; \alpha \in I\}$ também é somável e temos

$$\sum_{\alpha\in I} t_\alpha \leq \sum_{\alpha\in I} s_\alpha.$$

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Um resultado muito conhecido, devido a Riemann, afirma que, se

$$\lim_n \sum_{k=1}^n a_k$$

existe e é finito e se

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| = \infty \tag{43}$$

então [11, Teorema IV.23], para todo $t \in \mathbb{R}$, existe bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_n \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)} = t.$$

Pelo Problema 6.2-a, a condição (43) é equivalente a dizer que a família $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ não é absolutamente somável. Ou seja, a condição necessária para a somabilidade de famílias enumeráveis dada na Proposição 6.2 falha (de maneira surpreendentemente drástica) para séries convergentes reais que não sejam absolutamente convergentes. Isto é, uma família enumerável (logo, pelas Proposições 6.3 e 6.4, qualquer família) de números reais é incondicionalmente somável (isto é, somável no sentido da Definição 6.1) se e somente se é absolutamente somável. É fácil ver, então, que o mesmo vale para famílias em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ com as normas usuais (ou com qualquer norma, mas isso depende da Proposição 7.3). Em espaços de dimensão infinita, entretanto, somabilidade incondicional não é equivalente a somabilidade absoluta – é o que peço que vocês mostrem no Problema 6.4. Isto explica o aparecimento do conceito, desnecessário em espaços de dimensão finita, de família incondicionalmente somável em espaços vetoriais normados de dimensão infinita.

Problema **6.3.** Mostre que, se um espaço vetorial normado X é tal que, nele, toda família absolutamente somável é somável, então X é completo.
Sugestões: Mostre que a afirmação do Problema 1.15 ainda vale se trocarmos $1/n$ por 2^{-n}. Use o Problema 1.13. Use o truque da *série telescópica:*

$$x_n = x_1 + \sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1} - x_j).$$

Não é por coincidência que a proposição anterior e a próxima têm demonstrações tão parecidas. São ambas casos particulares do Teorema 1.1 de [8, Seção I.1.B], que afirma que uma família em um espaço de Banach é somável se e somente se satisfaz uma certa *condição de Cauchy.*

Proposição 6.8. *Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família de elementos de H, dois-a-dois ortogonais. Se*

$$\sup\{\sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\|^2, F \subseteq I \text{ finito}\} < \infty, \tag{44}$$

então a família dada é somável.

`Demonstração`: Denotemos por a o supremo em (44). A hipótese $a < \infty$ implica que, para cada n, $I_n = \{\alpha \in I; \|x_\alpha\|^2 \geq 1/n\}$ é finito. Defina

$$y_n = \sum_{\alpha\in I_n} x_\alpha.$$

Provaremos em seguida que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e que seu limite é a soma da família dada.

Segue da definição de supremo que, para cada $\epsilon > 0$, existe $F_\epsilon \subseteq I$ finito, tal que, para todo $F' \subseteq I$ finito que contenha F_ϵ, temos

$$a - \epsilon < \sum_{\alpha\in F'} \|x_\alpha\|^2 \leq a.$$

É claro que podemos supor que $F_\epsilon \subseteq I'$, onde $I' = \{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ (jogue fora os elementos de F_ϵ que não pertençam a I', que o que sobrar ainda fará o mesmo serviço). Como I' é a união de todos os I_n's, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\epsilon \subseteq I_{n_0}$. Daí, se $m \geq n \geq n_0$, usando que os x_α's são dois-a-dois ortogonais, temos:

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|\sum_{\alpha\in I_m\setminus I_n} x_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in I_m\setminus I_n}\|x_\alpha\|^2$$

$$= \sum_{\alpha\in I_m}\|x_\alpha\|^2 - \sum_{\alpha\in I_n}\|x_\alpha\|^2 < a - (a-\epsilon) = \epsilon.$$

Isto prova que (y_n) é de Cauchy. Como H é completo, existe $y \in X$ tal que $y_n \to y$. Provemos que

$$y = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha. \tag{45}$$

Dado $\epsilon > 0$, seja n_0 o natural escolhido acima. Escolha então $N \geq n_0$ tal que $\|y_N - y\| < \epsilon$. Se $F' \subseteq I$ é finito e contém I_N, então temos:

$$\|y - \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\|^2 \leq (\|y - y_N\| + \| \sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} x_\alpha\|)^2$$
$$\leq 2\|y - y_N\|^2 + 2\| \sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} x_\alpha\|^2 = 2\|y - y_N\|^2 + 2 \sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} \|x_\alpha\|^2$$
$$< 2\epsilon^2 + 2 \sum_{\alpha\in F'\setminus I_N} \|x_\alpha\|^2 = 2\epsilon^2 + 2 \sum_{\alpha\in F'} \|x_\alpha\|^2 - 2 \sum_{\alpha\in I_N} \|x_\alpha\|^2$$
$$< 2[\epsilon^2 + a - (a - \epsilon)] = 2(\epsilon^2 + \epsilon).$$

Na segunda das desigualdades acima, usamos que

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \tag{46}$$

para todos a e b reais ((46) é verdadeira, pois equivale a $(a - b)^2 \geq 0$).

Provamos que, para todo $\epsilon > 0$, existe finito $F = I_N \subseteq I$ tal que, se $F' \subseteq I$ é finito e contém F, então

$$\|y - \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha\| < \sqrt{2(\epsilon^2 + \epsilon)}. \tag{47}$$

$\sqrt{2(\epsilon^2 + \epsilon)} \to 0$, quando $\epsilon \to 0$. Logo (47) prova (45), como queríamos. □

Problema **6.4.** Para cada $k \in \mathbb{N}$, denote por $\mathbf{e}^k$ a sequência $\mathbf{e}^k = (\delta_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, $\delta_n^k = 0$ se $n \neq k$, $\delta_k^k = 1$.
(a) Mostre que, para todo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$,

$$\mathbf{x} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k\, \mathbf{e}^k.$$

(b) Mostre que

$$\left\{ \frac{1}{k}\, \mathbf{e}^k \, ; \; k \in \mathbb{N} \right\}$$

é uma família somável de ℓ^2 que não é absolutamente somável.

Existência de conjunto ortonormal completo.

`Definição` **6.9.** *Um* conjunto ortonormal completo *ou* maximal *de um espaço vetorial com produto interno V é um subconjunto ortonormal de V (veja a Definição 2.7), que não está contido em nenhum outro subconjunto ortonormal. Conjuntos ortonormais maximais são também chamados* bases hilbertianas.

`Observação` **6.10.** Um subconjunto ortonormal $\mathfrak{B} \subset V$ é completo se e somente se

$$\langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{B} \quad \Longrightarrow \quad y = 0. \tag{48}$$

De fato, se um y ortogonal a todo elemento de $\mathfrak{B}$ for diferente de zero, $\mathfrak{B} \cup \{y/\|y\|\}$ será um conjunto ortonormal completo contendo $\mathfrak{B}$ propriamente, e portanto $\mathfrak{B}$ não será maximal. Reciprocamente, se $\mathfrak{B}$ não for maximal, então qualquer $y \notin \mathfrak{B}$ que pertença a um conjunto ortonormal completo que contenha propriamente $\mathfrak{B}$ satisfará a afirmação no lado esquerdo de (48), mas não a do lado direito.

Vamos provar que todo espaço vetorial com produto interno possui um subconjunto ortonormal completo usando o *Lema de Zorn.* Para chegarmos ao enunciado desse lema, diversas definições são necessárias.

Definição 6.11. *Seja X um conjunto. Uma* ordem parcial *em X é um subconjunto $R \subseteq X \times X$ tal que*
(i) $(x,x) \in R$ para todo $x \in X$,
(ii) Se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $(x,z) \in R$,
(iii) Se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$, então $x = y$.

Denota-se $(x,y) \in R$ por $x \prec y$. Um abuso de notação muito conveniente é chamar-se o próprio símbolo $\prec$ de ordem parcial. Um conjunto parcialmente ordenado *$(X,\prec)$ é um conjunto munido de uma ordem parcial $\prec$.*

Exemplo 6.12. $(\mathbb{R},\leq)$ e $(\mathbb{R},\geq)$ são conjuntos parcialmente ordenados. Se S é um conjunto e $\mathcal{P}(S)$ é o conjunto dos subconjuntos de S, então $(\mathcal{P}(S),\subseteq)$ e $(\mathcal{P}(S),\supseteq)$ são conjuntos parcialmente ordenados.

Se $(X,\prec)$ é um conjunto parcialmente ordenado, então todo subconjunto Y de X pode ser parcialmente ordenado simplesmente decretando-se que $x \prec y$ em Y se e somente se x e y pertencem a Y e $x \prec y$ em X. Esta é chamada a *ordem parcial induzida* em Y. Mais precisamente, se $R \subseteq X \times X$ é uma ordem parcial em X e $Y \subseteq X$, a ordem parcial induzida em Y por R é $R \cap (Y \times Y)$.

Definição 6.13. *Um conjunto totalmente ordenado é um conjunto parcialmente ordenado $(X,\prec)$ tal que, se x e y pertencem a X, então ou $x \prec y$ ou $y \prec x$. Um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado é totalmente ordenado se torna-se um conjunto totalmente ordenado quando munido da ordem parcial induzida.*

Exemplo 6.14. $(\mathbb{R},\leq)$ e $(\mathbb{R},\geq)$ são totalmente ordenados. Se S tem pelo menos dois elementos, $(\mathcal{P}(S),\subseteq)$ e $(\mathcal{P}(S),\supseteq)$ não são totalmente ordenados. $\{[0,a); a > 0\}$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ munido de $\subseteq$ ou de $\supseteq$.

Definição 6.15. *Seja $(X,\prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um elemento $m \in X$ é maximal se $m \prec x$ implica que $x = m$.*

Definição 6.16. *Sejam $(X,\prec)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Um elemento $m \in X$ é uma cota superior de Y em X se $x \prec m$ para todo $x \in Y$.*

Segue imediatamente das definições que, se m é uma cota superior do espaço todo, então m é maximal.

Exemplo 6.17. $(\mathbb{R},\leq)$ e $(\mathbb{R},\geq)$ não possuem elementos maximais. S é um elemento maximal em $(\mathcal{P}(S),\subseteq)$. $\emptyset$ é maximal em $(\mathcal{P}(S),\supseteq)$. $\{0\}$ é uma cota superior de $\{[0,a); a > 0\}$ em $(\mathcal{P}(\mathbb{R}),\supseteq)$ que não pertence a $\{[0,a); a > 0\}$. $\{[0,a); a > 0\}$ não possui cota superior em $(\mathcal{P}(\mathbb{R}),\subseteq)$.

O seguinte teorema decorre de e implica o axioma da escolha [4, Theorem II.2.1].

Teorema 6.18. (Lema de Zorn) *Seja $(X,\prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado de X possui cota superior em X, então X possui um elemento maximal.*

Corolário 6.19. *Seja $(X,\prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado de X possui cota superior em X, então todo subconjunto totalmente ordenado de X possui uma cota superior em X que é um elemento maximal de X.*

Demonstração: Dado $Y \subseteq X$ um subconjunto totalmente ordenado de X, aplique o Teorema 6.18 ao conjunto $Z = \{x \in X; x \text{ é cota superior de } Y\}$ munido da ordem parcial induzida. É fácil ver que um elemento maximal de Z é também um elemento maximal de X que, por definição de Z, é cota superior de Y. $\square$

Teorema 6.20. (`Existência de bases hilbertianas`) *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para todo subconjunto ortonormal $B \subset V$, existe um conjunto ortonormal completo $\tilde{B}$ que contém B.*

`Demonstração`: Seja X o conjunto de todos os conjuntos ortonormais de V ordenado pela inclusão. Qualquer subconjunto totalmente ordenado de X possui cota superior (a união de todos membros do tal subconjunto). A afirmação que queremos provar decorre então do Corolário 6.19. $\square$

Bases hilbertianas são "bases".

A razão pela qual conjuntos ortonormais completos em espaços de Hilbert são chamados de bases hilbertianas é dada pelo teorema seguinte, que, a propósito, não implica que todo conjunto ortonormal completo seja uma base algébrica no sentido da Álgebra Linear.

Teorema 6.21. *Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo. Para todo $y \in H$, temos*

$$y = \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y \rangle x_\alpha \quad \text{e} \quad \|y\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x_\alpha, y \rangle|^2 \tag{49}$$

`Demonstração`: Dado $y \in H$, segue da desigualdade de Bessel (Corolário 2.9) que, para todo $F \subseteq I$ finito,

$$\sum_{\alpha \in F} |\langle x_\alpha, y \rangle|^2 \leq \|y\|^2. \tag{50}$$

Logo, $F_n = \{\alpha \in I; |\langle x_\alpha, y \rangle| \geq 1/n\}$ é finito para todo n. Logo

$$I' = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{\alpha \in I; \langle x_\alpha, y \rangle \neq 0\}$$

é enumerável. Seja $\varphi : \mathbb{N} \to I'$ uma bijeção. Provemos que

$$\lim_{m \to \infty} y_m = y, \quad \text{para} \quad y_m = \sum_{j=1}^{m} \langle x_{\varphi(j)}, y \rangle x_{\varphi(j)}. \tag{51}$$

A sequência de números reais

$$t_n = \sum_{j=1}^{m} |\langle x_{\varphi(j)}, y \rangle|^2$$

é não decrescente (óbvio) e limitada (graças a (50)). Logo é de Cauchy. Como os x_α's são mutuamente ortogonais (veja a demonstração do Teorema 2.8) temos

$$\|y_n - y_m\|^2 = \| \sum_{j=m+1}^{n} \langle x_{\varphi(j)}, y \rangle x_{\varphi(j)} \|^2$$

$$= \sum_{j=m+1}^{n} |\langle x_{\varphi(j)}, y \rangle|^2 = t_n - t_m = |t_n - t_m|,$$

para todo $n > m$. Logo $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Como H é completo, existe $\tilde{y} \in H$ tal que $y_m \to \tilde{y}$. Provemos que $\tilde{y} = y$. Para tanto, como $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo, basta provar que $\langle x_\alpha, \tilde{y}\rangle = \langle x_\alpha, y\rangle$ para todo $\alpha \in I$ (daí, $\langle x_\alpha, \tilde{y} - y\rangle = 0$ para todo $\alpha \in I$, logo $y = \tilde{y}$, pela Observação 6.10).

Segue da continuidade do produto interno (veja o Problema 2.3-a ou aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz), que, para todo $\alpha \in I$, $\langle x_\alpha, \tilde{y}\rangle = \lim_m \langle x_\alpha, y_m\rangle$. Se $\alpha \notin I'$, segue direto das definições que $\langle x_\alpha, y_m\rangle = 0 = \langle x_\alpha, y\rangle$ para todo m, logo $\langle x_\alpha, \tilde{y}\rangle = \langle x_\alpha, y\rangle$.

Se $\alpha \in I'$, seja então $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha = \varphi(m_0)$. Usando a ortonormalidade de $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$, obtemos que

$$\langle x_\alpha, y - y_m\rangle = \begin{cases} \langle x_{\varphi(m_0)}, y\rangle, & \text{se } \; m < m_0 \\ \\ \langle x_{\varphi(m_0)}, y\rangle - \langle x_{\varphi(m_0)}, y\rangle = 0, & \text{se } \; m \geq m_0 \end{cases}.$$

Logo, $\lim_m \langle x_\alpha, y - y_m\rangle = 0$ e, portanto, $\langle x_\alpha, \tilde{y}\rangle = \lim_m \langle x_\alpha, y_m\rangle = \langle x_\alpha, y\rangle$. Isto prova (51). A primeira das duas igualdades no enunciado do teorema segue então das três proposições do começo desta aula (veja a Observação 6.5).

Problema **6.5.** Generalize (15) para conjuntos ortonormais infinitos em espaços completos. Ou seja, mostre que, dados $S = \{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert H e $x \in H$, temos:

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x_\alpha, x\rangle|^2 + \|x - \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, x\rangle x_\alpha\|^2.$$

Problema **6.6.** Seja $S = \{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert H. Seja M o menor subespaço fechado de H contendo S, seja P a projeção ortogonal de H em M. Mostre que, para todo $y \in H$,

$$Py = \sum_{\alpha \in I} \langle x_\alpha, y\rangle x_\alpha \quad \text{e} \quad \|Py\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x_\alpha, y\rangle|^2.$$

A recíproca abaixo do Teorema 6.21 é consequência da Proposição 6.8.

Teorema 6.22. *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo de H. Para cada família de números complexos $\{c_\alpha; \alpha \in I\}$ tal que*

$$\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2 < \infty, \tag{52}$$

existe um único $y \in H$ tal que $\langle x_\alpha, y\rangle = c_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Consequentemente,

$$y = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha \quad e \quad \|y\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2. \tag{53}$$

`Demonstração`: A hipótese (52) e $\|x_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in I$ implicam que a família $\{c_\alpha x_\alpha; \alpha \in I\}$ satisfaz a hipótese da Proposição 6.8. Logo, existe $y \in H$ satisfazendo a primeira das igualdades em (53).

Para cada $\beta \in I$, segue do Problema 6.1 (aplicado a $T = \langle x_\beta |$) que

$$\langle x_\beta, y\rangle = \langle x_\beta, \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha\rangle = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \langle x_\beta, x_\alpha\rangle = c_\beta.$$

Logo, este é o y cuja existência queríamos demonstrar. A unicidade decorre da completude de $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$. A segunda igualdade em (53) decorre da segunda igualdade em (49). $\square$

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita n e se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base de V, então V é igual ao conjunto de todas as combinações lineares dos v_j's. Se o espaço for munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a base for ortonormal, então

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v_j, v \rangle|^2. \tag{54}$$

Os Teoremas 6.21 e 6.22 são generalizações destas afirmações para espaços de Hilbert de dimensão infinita. Mas para podermos generalizar (54), tivemos de mudar as definições: no lugar de uma base, pusemos um conjunto ortonormal completo e, no lugar de combinações lineares (que são sempre finitas, por definição), pusemos somas de famílias incondicionalmente somáveis. As novas definições são equivalentes às antigas no caso de espaços de dimensão finita.

A definição de base da Álgebra Linear se aplica também para espaços de dimensão infinita: uma base é um conjunto linearmente independente tal que todo elemento do espaço seja combinação linear de membros desse conjunto. É prudente chamar essas bases de *bases algébricas*, para evitar confusão com as bases hilbertianas. Pode-se demonstrar que todo espaço vetorial tem uma base algébrica usando o Lema de Zorn. Isso é muito parecido com o Teorema 6.20, vale a pena pensar nisso se você nunca viu antes. Entretanto, diferentemente do caso de dimensão finita, se o espaço é munido de produto interno, nem sempre existe uma base (algébrica) ortonormal. Se a base (algébrica) for enumerável, o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt (veja o Exemplo 6.32) garante a existência de uma base (algébrica) ortonormal. Mas um espaço de Hilbert nunca tem uma base algébrica infinita enumerável, veremos isso na próxima seção.

Essa estratégia, de mudar as definições para permitir a generalização dos teoremas da Álgebra Linear para espaços de dimensão infinita, é usada também em teoria espectral. Em dimensão infinita, não só não é verdade que todo operador autoadjunto sempre possua uma base (algébrica) ortonormal de autovetores: nem sequer uma base hilbertiana de autovetores eles possuem, em geral (os autoadjuntos compactos possuem, vamos ver isso mais tarde). Uma outra afirmação, em que se trocam as combinações lineares de projeções da Álgebra Linear por integrais de famílias de projeções, é verdadeira para quaisquer operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert complexos, até mesmo para os densamente definidos não-limitados. No caso de espaços de dimensão finita o novo "teorema espectral" é equivalente à afirmação de que todo operador autoadjunto possui uma base ortonormal de autovetores.

`Definição` **6.23.** *Seja X um espaço vetorial e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família de elementos de X. Denotamos por $[x_\alpha; \alpha \in I]$ o subespaço gerado por esta família. Isto é, $x \in [x_\alpha; \alpha \in I]$ se e somente se existem $F \subseteq I$ finito e $\{c_\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \in F\}$ tais que*

$$x = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha x_\alpha.$$

Teorema 6.24. *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal em H. $[x_\alpha; \alpha \in I]$ é denso em H se e somente se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo.*

`Demonstração`: Se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo, segue do Teorema 6.21 que todo $y \in H$ se escreve como

$$y = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha, \quad \text{onde} \quad c_\alpha = \langle x_\alpha, y \rangle.$$

Segue das Proposições 6.2, 6.3 e 6.4 que

$$\{\alpha \in I; c_\alpha \neq 0\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$$

e

$$y = \lim_{m \to \infty} y_m \quad \text{onde} \quad y_m = \sum_{j=1}^{m} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j}.$$

Isto prova que todo elemento de H é limite de uma sequência (y_m) em $[x_\alpha; \alpha \in I]$. Prova até mais que isso: a sequência é tal que o escalar que multiplica cada x_α não depende de m.

Reciprocamente, suponha que $[x_\alpha; \alpha \in I]$ é denso em H. Se $y \in H$ é tal que $\langle x_\alpha, y \rangle = 0$ para todo $\alpha \in I$, então y pertence ao complemento ortogonal de $[x_\alpha; \alpha \in I]$, que é nulo, pelo Problema 4.1-d. Logo, $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo, pela Observação 6.10. $\square$

Para um espaço vetorial com produto interno que não seja necessariamente completo, vale o "somente se" do Teorema 6.24, mas pode não valer o o "se". Veja o Problema e a Observação seguintes.

Problema **6.7.** (a) Sejam X um espaço vetorial normado, D um subespaço denso de X, e D_0 um subespaço de D. Mostre que D_0 é denso em D se e somente se D_0 é denso em X
(b) Seja V um espaço vetorial com produto interno e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal em V tal que $[x_\alpha; \alpha \in I]$ é denso em V. Mostre que $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo

`Observação` **6.25.** É possível dar um exemplo [1] de um espaço vetorial com produto interno (não-completo) onde existe um conjunto ortonormal completo que não gera um subespaço denso.

Problema **6.8.** Seja $\{\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto ortonormal de ℓ^2 introduzido no Problema 6.4. Dado $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}^m = (x_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $x_n^m = x_n$ se $n \leq m$ e $x_n^m = 0$ se $n > m$. Mostre que $\mathbf{x}^m \to \mathbf{x}$ em ℓ^2.

`Exemplo` **6.26.** Usando a notação e a afirmação do Problema 6.8, vemos que $\mathbf{x}^m \in [\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ e, logo, que $[\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ é denso em ℓ^2. Se a gente usa que ℓ^2 é completo (foi o que afirmamos sem provar no Exemplo 3.8), segue então do Teorema 6.24 que $\{\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo de ℓ^2.

Mas não é preciso sabermos de antemão que ℓ^2 é completo para podermos usar o Teorema 6.24. Mostramos logo em seguida que os Teoremas 6.21, 6.22 e 6.24 na verdade *implicam* que ℓ^2 é completo, se a gente usar que todo espaço vetorial com produto interno possui um completamento. Esta, com certeza, não é a maneira mais fácil de se provar que ℓ^2 é completo, ou que o espaço $\ell^2(S)$ introduzido no Exemplo 6.27 é completo. Um argumento mais simples e direto é dado no Exemplo H.6 de [8, Seção I.5]. Incluo aqui esta discussão com o propósito de realçar o significado dos Teoremas 6.21 e 6.22.

Seja $\tilde{\ell^2}$ o completamento de ℓ^2 (que a princípio poderia ser maior que ℓ^2). Vimos acima que $[\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ é denso em ℓ^2. Logo, pelo Problema 6.7-a, $[\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ é também denso em $\tilde{\ell^2}$. Logo, pelo Teorema 6.24, $\{\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $\tilde{\ell^2}$. Isto prova que existe um espaço de Hilbert possuindo um conjunto ortonormal completo infinito e enumerável.

Seja então H um espaço de Hilbert possuindo um conjunto ortonormal completo $\{\mathbf{v}_k; k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, seja

$$T\mathbf{x} \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \mathbf{v}_k.$$

Pelo Teorema 6.22, a equação acima define uma aplicação $T : \ell^2 \to H$. A segunda das igualdades em (53) mostra que T preserva a norma (e portanto é injetora). Segue do Teorema 6.21 que T é sobrejetora. Dados $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ e $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, segue do Problema 6.1-b que

$$T(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} (x_k + \lambda y_k)\mathbf{v}_k$$

$$=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \mathbf{v}_k \;+\; \lambda \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k \mathbf{v}_k \;=\; T\mathbf{x} + \lambda T\mathbf{y}.$$

Logo T é uma bijeção linear que preserva norma. Em particular, ℓ^2 é completo, já que H o é.

`Exemplo` **6.27.** Dado um conjunto S, seja $\ell^2(S)$ o conjunto de todas as funções de S em $\mathbb{C}$, denotadas por $(x_\alpha)_{\alpha\in S}$, tais que $\{|x_\alpha|^2; \alpha \in S\}$ é somável. Assim, o que antes havíamos chamado de ℓ^2 pode agora ser denotado por $\ell^2(\mathbb{N})$.

Para todo $\alpha \in I$, e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, temos (veja (46)) que $|x_\alpha + \lambda y_\alpha|^2 \leq 2(|x_\alpha|^2 + |\lambda|^2|y_\alpha|^2)$. Segue então do Problema 6.2-b (aplicado a $t_\alpha = |x_\alpha + \lambda y_\alpha|^2$ e $s_\alpha = 2(|x_\alpha|^2 + |\lambda|^2|y_\alpha|^2)$ e do Problema 6.1-b que, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(x_\alpha)_{\alpha\in S}$ e $(y_\alpha)_{\alpha\in S}$ pertencentes a $\ell^2(S)$, $(x_\alpha + \lambda y_\alpha)_{\alpha\in S}$ também pertence a $\ell^2(S)$. Isto é $\ell^2(S)$, munido das operações óbvias, é um espaço vetorial.

Usando que $|x_\alpha|\,|y_\alpha| \leq (|x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2)/2$ (veja (46)), segue do Problema 6.2-b que, para todos $(x_\alpha)_{\alpha\in S}$ e $(y_\alpha)_{\alpha\in S}$ pertencentes a $\ell^2(S)$, $\{\overline{x_\alpha} y_\alpha; \alpha \in I\}$ é uma família de números complexos absolutamente somável. Daí é fácil verificar, usando diversas de nossas afirmações anteriores sobre somas infinitas, que

$$\langle\, (x_\alpha)_{\alpha\in S}, (y_\alpha)_{\alpha\in S} \,\rangle \;=\; \sum_{\alpha\in S} \overline{x_\alpha} y_\alpha$$

é um produto interno em $\ell^2(S)$.

Para cada $\beta \in S$, seja $\mathbf{e}^\beta \in \ell^2(S)$ dado por

$$\mathbf{e}^\beta = (\delta^\beta_\alpha)_{\alpha\in S}, \quad \delta^\beta_\alpha = 0 \;\text{ se }\; \alpha \neq \beta, \quad \delta^\beta_\beta = 1.$$

É fácil ver que $\{\mathbf{e}^\beta; \beta \in S\}$ é um conjunto ortonormal de $\ell^2(S)$. Defina $\ell^2_c(S) = [\mathbf{e}^\beta; \beta \in S]$, isto é, um elemento $(x_\alpha)_{\alpha\in S}$ de $\ell^2(S)$ pertence a $\ell^2_c(S)$ se e somente se $\{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ é finito.

Segue do Problema 6.7-a e do Teorema 6.24 que $\{\mathbf{e}^\beta; \beta \in S\}$ é um conjunto ortonormal completo do completamento de $\ell^2_c(S)$. Isto prova que, dado qualquer conjunto S, existe um espaço de Hilbert H_S que possui um conjunto ortonormal completo indexado por S. Argumentando tal como fizemos para o caso $S = \mathbb{N}$, pode-se usar os Teoremas 6.21 e 6.22 para construir uma bijeção linear isométrica $T : \ell^2(S) \to H_S$. Isto prova que $\ell^2(S)$ é um espaço de Hilbert.

Acabamos de provar, em particular, que, dado qualquer conjunto S, existe um espaço de Hilbert possuindo um conjunto ortonormal completo com a cardinalidade de S. Vemos a seguir que todos os conjuntos ortonormais completos de um dado espaço de Hilbert têm a mesma cardinalidade e que esse cardinal classifica todos os espaços de Hilbert a menos de isomorfismos. Nas aplicações a problemas de análise clássica, especialmente os de equações diferenciais parciais, só se usam espaços de Hilbert que possuem conjuntos ortonormais completos enumeráveis, os chamados espaços de Hilbert separáveis. Espaços de Hilbert possuindo conjuntos ortonormais não enumeráveis aparecem em aplicações mais abstratas da Análise Funcional, como por exemplo na teoria de C*-álgebras. Apesar disso, há quem argumente que não se perderia muita coisa se esses espaços de Hilbert grandes demais (os não separáveis) fossem totalmente ignorados.

Problema **6.9.** Seja S um conjunto e, para cada $\alpha \in S$, seja H_α um espaço de Hilbert. Usando os mesmos símbolos $\|\cdot\|$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para denotar a norma e o produto interno de cada H_α, defina

$$H = \{(x_\alpha)_{\alpha\in S};\ x_\alpha \in H_\alpha \text{ e } \sum_{\alpha\in S} \|x_\alpha\|^2 < \infty\}.$$

Mostre que

$$\langle (x_\alpha), (y_\alpha)\rangle \ = \sum_{\alpha\in S} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle$$

é um produto interno em H e que, munido dele, H é um espaço de Hilbert.

O espaço H construído no Problema 6.9 é chamado de soma direta da família $\{H_\alpha; \alpha \in S\}$. Isto se denota por

$$H \ = \bigoplus_{\alpha\in S} H_\alpha.$$

Esta construção é importante para se demonstrar que toda C*-álgebra é isomorfa [10] a uma subálgebra (fechada e invariante pela involução) de $\mathcal{L}(H)$ para algum espaço de Hilbert H. Esse H é construído como uma soma direta infinita, possivelmente não enumerável, de espaços de Hilbert.

Pode-se também definir soma direta infinita de espaços de Banach. Mas aí, diferentemente do caso da soma direta de espaços de Hilbert, não há uma maneira canônica de se definir uma norma. Uma dessas maneiras é descrita no Problema 6.10. Outra diferença para o caso de espaços de Hilbert é que não se pode usar "bases" para ajudar na demonstração de que o espaço é completo.

Problema **6.10.** Seja S um conjunto e, para cada $\alpha \in S$, seja X_α um espaço de Banach. Defina

$$X = \{(x_\alpha)_{\alpha\in S}; x_\alpha \in X_\alpha \text{ e } \sum_{\alpha\in S} \|x_\alpha\| < \infty\}.$$

Mostre que

$$\|(x_\alpha)\| \ = \sum_{\alpha\in S} \|x_\alpha\|$$

[10]Este é o Teorema de Gelfand-Naimark-Segal, dado na disciplina Álgebra de Operadores.

é uma norma em X, e que X munido dela é um espaço de Banach.
Sugestão: Resolva primeiro o caso $S = \mathbb{N}$ e $X_\alpha = \mathbb{C}$ para todo α.

Vamos usar sem demonstrar uma versão do Teorema de Stone-Weierstrass. Antes de enunciá-lo, talvez convenha introduzir alguns conceitos mais gerais.

Definição 6.28. *Uma* álgebra de Banach *é um espaço de Banach A munido de uma multiplicação que o torna também uma álgebra (veja a Definição 5.6). Além disso, a multiplicação da álgebra e a norma estão relacionados pela desigualdade*

$$\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|,$$

válida para todos a e b em A.

Exemplo 6.29. O espaço de Banach $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ (veja os Exemplos 2.4, 2.18 e 3.7), munido da multiplicação ponto-a-ponto, é uma álgebra de Banach. Se X é um espaço de Banach, $\mathcal{L}(X)$ é um álgebra de Banach (veja (36) e o Problema 3.8).

O *Teorema de Stone Weierstrass* dá uma condição suficiente para que subálgebras de $C[a,b]$, ou de outras álgebras de Banach, sejam densas. O Teorema 6.30, que apenas enunciamos, decorre de [14, Theorem IV.10], que trata do caso de $C(X)$, X um espaço topológico de Hausdorff compacto. Generalizações para certas classes álgebras de Banach (que contêm $C(X)$) se encontram em [2, Chapter 11].

Teorema 6.30. *Seja A uma subálgebra de $C[a,b]$ (isto é, A é um subespaço de $C[a,b]$ tal que, se f e g pertencem a A, então $fg \in A$) tal que:*
(i) A contém as funções constantes.
(ii) Se $f \in A$, então $\bar{f} \in A$.
(iii) A separa pontos (isto é, dados pontos distintos x e y em $[a,b]$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$).
Então A é densa em $C[a,b]$, munido da norma $\|\cdot\|_\infty$.

Exemplo 6.31. (Séries de Fourier) Para cada $k \in \mathbb{Z}$, defina

$$e_k(\theta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ik\theta}.$$

É fácil ver que $\{e_k;\, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal de $L^2[-\pi,\pi]$.

De $e_k \cdot e_l = e_{k+l}$ e $\overline{e_k} = e_{-k}$ decorre que $A = [e_k;\, k \in \mathbb{Z}]$ é uma subálgebra de $C[-\pi,\pi]$ invariante pelo complexo conjugado. A contém as constantes, pois e_0 é uma função constante diferente de zero. A separa pontos pois $\{e_1\}$ separa pontos. Logo A é densa em $(C[-\pi,+\pi], \|\cdot\|_\infty)$, pelo Teorema 6.30.

Dada $f \in C[-\pi,+\pi]$, seja f_n uma sequência em A que convirja para f com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Como $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_\infty$ para toda $f \in C[-\pi,+\pi]$, vem que $\|f - f_n\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f - f_n\|_\infty$ para todo n, e daí $f_n \to f$ também com respeito à norma $\|\cdot\|_2$. Isto é, A é denso também em $(C[-\pi,+\pi], \|\cdot\|_2)$.

Mas $C[-\pi,+\pi]$ é denso em $L^2[-\pi,+\pi]$ (veja a página 23). Segue então do Problema 6.7-a que $A = [e_k;\, k \in \mathbb{Z}]$ é denso em $L^2[-\pi,+\pi]$. Segue então do Teorema 6.24 que $\{e_k;\, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2[-\pi,+\pi]$.

Daí segue do Teorema 6.21 que, se $f \in C[-\pi,+\pi]$, então sua *série de Fourier* converge para f na norma $\|\cdot\|_2$, isto é,

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{j=-N}^{N} \hat{f}_j e_j\|_2 = 0, \quad \hat{f}_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ij\theta} f(\theta) d\theta.$$

Este é um resultado cujo enunciado não depende de conceitos abstratos de análise funcional, mas apenas do cálculo diferencial e integral clássico. Ilustra portanto a força da técnica. A busca de teoremas demonstrando a convergência, em diversos sentidos, das séries de Fourier tiveram uma importância central no desenvolvimento da análise, e de suas aplicações, nos últimos dois séculos.

`Exemplo` **6.32.** Defina $f_n \in C[-1,1]$, $n = 0, 1, \cdots$, por $f_n(x) = x^n$. Para cada n aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, com respeito ao produto interno usual de $L^2[-1,+1]$, ao conjunto linearmente independente $\{f_0, \cdots, f_n\}$. Chame a sequência assim obtida de $p_0, p_1, \cdots$ (estes são os *polinômios de Legendre*, úteis na solução de certos problemas de valor de fronteira da física-matemática clássica).

$[f_0, f_1, \cdots]$ é o conjunto de todos os polinômios com coeficientes complexos. Pelo Teorema 6.30, então, $[f_0, f_1, \cdots]$ é denso em $(C[-1,+1], \|\cdot\|_\infty)$ (este caso particular do Teorema 6.30 é conhecido como o Teorema de Weierstrass). O processo de Gram-Schmidt é tal que, para todo n, $[p_0, \cdots, p_n] = [f_0, \cdots, f_n]$. Logo $[p_0, p_1, \cdots] = [f_0, f_1, \cdots]$, que é denso em $(C[-1,+1], \|\cdot\|_\infty)$. Argumentando como no Exemplo 6.31, segue que $[p_0, p_1, \cdots]$ é denso em $(C[-1,+1], \|\cdot\|_2)$, logo é denso também em $L^2[-1,+1]$. Segue então do Teorema 6.21 que $\{p_0, p_1, \cdots\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2[-1,+1]$.

PROBLEMA **6.11.** (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n \in C[0,1]$ por $g_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$. Mostre que $\{g_m; n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2[0,1]$.
(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $k \in \mathbb{Z}$, defina $g_{nk} \in C_c(\mathbb{R})$ por

$$g_{nk} = \begin{cases} \sin(n\pi x), & \text{se } x \in [k, k+1] \\ \\ 0, & \text{se } x \notin [k, k+1] \end{cases}.$$

Mostre que $\{g_{nk};\, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$.

Operadores Unitários. Dimensão Hilbertiana.

`Definição` **6.33.** *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Um* operador unitário *de H_1 em H_2 é uma bijeção linear $U : H_1 \to H_2$ tal que $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$, para todos x e y em H_1. Dois espaços de Hilbert são* isomorfos *se existe um operador unitário entre eles.*

É fácil ver que um operador unitário é automaticamente contínuo e preserva a norma.

Proposição 6.34. *Uma bijeção linear entre espaços de Hilbert é um operador unitário se e somente se U é contínua e $U^{-1} = U^*$.*

`Demonstração`: Valendo qualquer uma das duas afirmações que queremos provar que são equivalentes, U é uma bijeção linear contínua inversível. Faz sentido então a seguinte série de afirmações, que ademais são claramente verdadeiras:

$$(\,\forall x, \forall y, \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle\,) \iff (\,\forall x, \forall y, \langle U^*Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle\,)$$

$$\iff (\,\forall x, U^*Ux = x\,) \iff U^*U = I \iff U^{-1} = U^*,$$

como queríamos. $\square$

`Observação` **6.35.** Só supusemos que U era contínua, no enunciado da Proposição anterior, para que fizesse sentido falar em U^*. A 5^a questão da primeira prova mostra que a mera existência de uma aplicação (não necessariamente linear, a princípio) que faça o papel do adjunto de U implica que U é contínua e seu adjunto é linear (isto decorre do teorema do gráfico fechado). Esta afirmação vale também em uma categoria mais geral que os espaços de Hilbert, os chamados *módulos de Hilbert* [17, Lemma 15.2.3].

`Exemplo` **6.36.** Seja $U : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $U(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Embora U^*U seja igual à identidade, U não é um operador unitário, pois não é inversível. *U preserva o produto interno*, isto é, satisfaz $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$, para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em ℓ^2. A demonstração da Proposição 6.34 mostra então que $U^*U = I$. Este exemplo mostra que nem sempre a igualdade $U^*U = I$ equivale a U ser unitário. Isso vale se soubermos de antemão que U é inversível, como foi o caso na demonstração da Proposição 6.34.

Segue da identidade de polarização que um operador linear entre espaços de Hilbert U preserva o produto interno se e somente se preserva a norma. Um tal operador é chamado de *isometria*. Atenção: esta definição não é universal. Há quem só chame de isometria as aplicações *sobrejetoras* que preservam a norma, vejam por exemplo [12]. Mais geralmente, temos:

`Definição` **6.37.** *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Um operador linear contínuo $U : H_1 \to H_2$ é uma* isometria parcial *se $\|Ux\| = \|x\|$ para todo x no complemento ortogonal do núcleo de U.*

O objetivo dos quatro problemas seguintes é dar uma caracterização algébrica das isometrias parciais.

Problema **6.12.** Seja H um espaço de Hilbert e seja T um operador linear contínuo de H em si próprio. Mostre que o complemento ortogonal da imagem de T é igual ao núcleo de T^*.

Problema **6.13.** Seja X um espaço vetorial normado e seja P um operador linear contínuo de X em si próprio tal que $P^2 = P$.
(a) Mostre que todo y na imagem de P satisfaz $Py = y$.
(b) Mostre que a imagem de P é fechada.
Dica: Calcule P dos dois lados de $\lim_n Px_n = y$

Problema **6.14.** Seja H um espaço de Hilbert e seja $P : H \to H$ uma transformação linear contínua.
(a) Mostre que, se P é uma projeção ortogonal (este termo foi definido na página 29) sobre algum subespaço fechado de H, então $P = P^2 = P^*$.
(b) Mostre que, se $P = P^2 = P^*$, então P é a projeção ortogonal sobre sua imagem.
Dica: Use os Problemas 6.12 e 6.13.

Problema **6.15.** Seja U uma transformação linear contínua entre espaços de Hilbert. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
(i) U é uma isometria parcial.
(ii) U^*U é uma projeção ortogonal.
(iii) $U = UU^*U$.

Se o espaço de Hilbert for complexo, as três condições acima são também equivalentes a UU^* ser uma projeção ortogonal [13, Theorem 2.3.3]. Isso usa o *cálculo funcional contínuo.*

Proposição 6.38. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e seja $U : H_1 \to H_2$ uma transformação linear contínua. São equivalentes:*
(i) U é um operador unitário.
(ii) H_1 possui um conjunto ortonormal completo $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ tal que $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_2.
(iii) Para todo conjunto ortonormal completo $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ de H_1, $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_2.

Além disso, se H_1 e H_2 possuem conjuntos ortonormais completos indexados por um mesmo conjunto de índices, $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{y_\alpha; \alpha \in I\}$, respectivamente, então existe um único operador contínuo $U : H_1 \to H_2$ tal que $U(x_\alpha) = y_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, e este U é unitário.

`Demonstração`:
1 ((i)⇒(iii)): Seja $U : H_1 \to H_2$ um operador unitário e seja $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo de H_1. É fácil ver que $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal de H_2. Provemos que é completo. Seja $y \in H_2$ tal que $\langle y, Ux_\alpha\rangle$ para todo $\alpha \in I$. Como U é sobrejetora, existe $x \in H_1$ tal que $y = Ux$. Logo, $\langle Ux, Ux_\alpha\rangle = \langle x, x_\alpha\rangle = 0$ para todo $\alpha \in I$. Como $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é completo, $x = 0$, logo $y = 0$, como queríamos.
2 ((ii)⇒(i)): Sejam $U : H_1 \to H_2$ uma aplicação linear contínua e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo de H_1 tal que $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_2. Pelo Teorema 6.21, todo $x \in H_1$ se escreve como

$$x = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha,\ c_\alpha = \langle x_\alpha, x\rangle.$$

Segue da continuidade de U e do Problema 6.1-a que

$$Ux = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha U x_\alpha.$$

Daí decorre, usando os Teoremas 6.21 e 6.22, que

$$\|Ux\| = \sqrt{\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2} = \|x\|.$$

Isto é, U preserva a norma, logo o produto interno, pela identidade de polarização. U preservar a norma também implica que tem imagem fechada. Por outro lado, a imagem de U contém $[Ux_\alpha; \alpha \in I]$, que é denso. Logo U é uma bijeção que preserva o produto interno, isto é, U é um operador unitário.
3 ((iii)⇒(ii)): Óbvio.
Por fim, se $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{y_\alpha; \alpha \in I\}$ são conjuntos ortonormais completos de H_1 e H_2, respectivamente, os Teoremas 6.21 e 6.22 implicam que

$$U(\sum_{\alpha \in I} c_\alpha x_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha y_\alpha,\quad \sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2 < \infty,$$

define uma bijeção linear $U : H_1 \to H_2$ que preserva a norma, logo um operador unitário tal que $U(x_\alpha) = y_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. A unicidade de uma tal transformação linear contínua decorre da densidade de $[x_\alpha; \alpha \in I]$ em H_1. □

A hipótese de U ser contínua é indispensável para que (ii) implique (i) na Proposição 6.38, veja o Problema 7.1.

`Definição` **6.39.** *Um espaço métrico é* separável *se possui subconjunto enumerável denso.*

Proposição 6.40. *Um espaço de Hilbert é separável se e somente se possui um conjunto ortonormal completo enumerável.*

`Demonstração`: Vamos usar que, se S é um subconjunto enumerável de um espaço vetorial V, e se S contém algum elemento não-nulo, então S possui um subconjunto linearmente independente S' que gera o mesmo subespaço que S, isto é, $[S] = [S']$. Esta é uma afirmação puramente algébrica, que se demonstra facilmente por indução.

Seja H um espaço de Hilbert separável e seja D um subconjunto enumerável denso de H. Extraia de D um subconjunto linearmente independente B tal que $[B] = [D]$. Como $B \subset D$, B é enumerável. Aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt a B (veja o Exemplo 6.32), obtemos um conjunto ortonormal (enumerável) B' tal que $[B'] = [B]$. Como $D \subset [D] = [B] = [B']$ e D é denso em H, vem que B' é um conjunto ortonormal e $[B']$ é denso. Logo, B' é um conjunto ortonormal completo (enumerável), pelo Teorema 6.24.

Seja agora H um espaço de Hilbert que possua um conjunto ortonormal completo enumerável. Se a dimensão de H for finita e, digamos, igual a n, então o conjunto de todas as combinações lineares de de uma base com coeficientes em $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ é denso em H, e este é um conjunto com a cardinalidade de $\mathbb{Q}^{2n}$, logo enumerável. Suponha, por fim, que H possua um sistema ortonormal completo infinito e enumerável, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots\}$. Então

$$[\mathcal{B}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [v_1, \cdots, v_n]$$

é denso em H, pelo Teorema 6.24. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $[v_1, \cdots, v_n]$ possui um subconjunto enumerável denso D_n: o conjunto das combinações lineares de $\{v_1, \cdots, v_n\}$ com coeficientes em $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$. A união de todos os D_n's é, portanto, um subconjunto enumerável denso de H (pois é denso em $[\mathcal{B}]$, que é denso em H). □

A Proposição anterior, no caso em que o espaço tem dimensão infinita, é um caso particular do seguinte teorema, que implica que a *dimensão hilbertiana* está bem definida (veja a Definição 6.43).

Teorema 6.41. *Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita. H possui um conjunto ortonormal completo indexado por um conjunto S se e somente se*

(i) H possui um subconjunto denso com a mesma cardinalidade de S e

(ii) Nenhum subconjunto de H com cardinalidade menor que a de S é denso.

`Demonstração`: Suponha que H possui um conjunto ortonormal completo infinito indexado por S, $\mathcal{B} = \{x_\alpha; \alpha \in S\}$. Podemos escrever o espaço gerado por $\mathcal{B}$ como

$$[x_\alpha; \alpha \in S] \;=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n,$$

onde

$$D_n \;=\; \{\sum_{j=1}^{n} c_{\varphi(j)} x_{\varphi(j)};\ \varphi : \{1, \cdots, n\} \to S\,, c_{\varphi(j)} \in \mathbb{C}\}.$$

Pelo Teorema 6.24, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ é denso em H. Para cada $n \in N$, o conjunto

$$D'_n \;=\; \{\sum_{j=1}^{n} c_{\varphi(j)} x_{\varphi(j)};\; \varphi : \{1, \cdots, n\} \to S\,, c_{\varphi(j)} \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}.$$

é denso em D_n, logo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D'_n$ é denso em H. Para cada $n \in \mathbb{N}$, D'_n tem a cardinalidade de $\mathbb{Q}^{2n} \times S^n$. O produto cartesiano de dois conjuntos infinitos tem cardinalidade igual à do conjunto de maior cardinalidade [4, Corollary 8.6]. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, a cardinalidade de D'_n é igual à de S. A união de uma família enumerável de conjuntos infinitos de mesma cardinalidade também tem essa cardinalidade. Isto decorre de [4, Corollary 8.6], junto com [4, 8.3(a)]. Logo, a união de todos os D'_n's é um subconjunto denso de H que tem a cardinalidade de S, o que prova (i).

Seja agora D um subconjunto denso arbitrário de H e seja $\{x_\alpha; \alpha \in S\}$ um conjunto ortonormal completo. Segue da densidade de D que, para cada $\alpha \in S$, existe um $y_\alpha \in D$ tal que $\|y_\alpha - x_\alpha\| < 1/2$. Dados distintos α e β em S, temos

$$\begin{aligned}\|y_\alpha - y_\beta\| &= \|(x_\alpha - x_\beta) + (y_\alpha - x_\alpha) + (x_\beta - y_\beta)\| \\ &\geq \|x_\alpha - x_\beta\| - \|(y_\alpha - x_\alpha) + (x_\beta - y_\beta)\| \\ &\geq \|x_\alpha - x_\beta\| - (\|y_\alpha - x_\alpha\| + \|x_\beta - y_\beta\|) > \sqrt{2} - 1 > 0.\end{aligned}$$

Isto mostra que a aplicação $S \ni \alpha \mapsto y_\alpha \in D$ é injetora. Isto é, a cardinalidade [11] de S é menor ou igual à de D, o que prova (ii).

Reciprocamente, seja S um conjunto tal que vale (i) e (ii) e seja $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$ um conjunto ortonormal completo. Podemos aplicar o "somente se" do enunciado do teorema para o conjunto ortonormal completo dado. Logo, valem (i) e (ii) também se substituirmos I no lugar de S.

Por (i)-I, temos que H possui um subconjunto denso com a cardinalidade de I. Por (ii)-S, vem então que a cardinalidade de S é menor ou igual que a de I. Por outro lado, segue de (i)-S que H possui um subconjunto denso com a cardinalidade de S. Segue então de (ii)-I que a cardinalidade de I é menor ou igual à de S. Como a classe dos números cardinais é totalmente ordenada, concluímos então que S e I têm a mesma cardinalidade. □

Corolário 6.42. *Todas os conjuntos ortonormais completos de um espaço de Hilbert têm a mesma cardinalidade.*

`Demonstração`: Sejam $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ e $\{y_\beta; \beta \in S\}$ conjuntos ortonormais completos de H. Valem então as afirmações (i) e (ii) do enunciado do Teorema 6.41, para S e com I no lugar de S. O mesmo argumento usado no último parágrafo da demonstração do Teorema 6.41 mostra que S e I têm a mesma cardinalidade. □

`Definição` **6.43.** *A dimensão de um espaço de Hilbert* (*também chamada* dimensão hilbertiana, *se quisermos explicitar a diferença com a dimensão algébrica*) *é a cardinalidade de suas bases hilbertianas.*

[11] Aqui, como também já no enunciado do Teorema 6.41, estamos implicitamente usando que a classe de todos os números cardinais é totalmente ordenada, com ordem ordem assim definida: a cardinalidade de um conjunto X é menor ou igual que a de um conjunto Y se e somente se existe uma aplicação injetora de X em Y. Isto é o que se afirma em [4, Theorem 7.8(1)], e decorre do *Teorema de Bernstein-Schröder* [4, Corollary 7.7].

Podemos agora obter o seguinte corolário da Proposição 6.38.

Corolário 6.44. *Dois espaços de Hilbert são isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão.*

`Demonstração`: Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert com a mesma dimensão. Então eles possuem conjuntos ortonormais completos com o mesmo conjunto de índices, logo existe um operador unitário $U : H_1 \to H_2$ que aplica um conjunto ortonormal completo no outro. Reciprocamente, se $U : H_1 \to H_2$ é um operador unitário entre os espaços de Hilbert H_1 e H_2, e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_1, então $\{Ux_\alpha; \alpha \in I\}$ é um conjunto ortonormal completo de H_2 com cardinalidade igual à dimensão de H_1. $\square$

Vemos assim que a dimensão hilbertiana *classifica* os espaços de Hilbert, isto é, dois espaços de Hilbert são isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão. Isto não significa que só *haja um* espaço de Hilbert separável, por exemplo, mas apenas que tudo que se diga sobre um espaço de Hilbert separável usando apenas sua estrutura de espaço de Hilbert (ou seja, suas operações algébricas, sua norma, seu produto interno, suas sequências convergentes, seus subconjuntos abertos, etc) vale também para qualquer outro espaço de Hilbert separável. Mas para as aplicações, faz muita diferença se o espaço de Hilbert que se está usando é mesmo o ℓ^2, ou se é algum espaço de Sobolev numa variedade.

Não há um teorema que classifique os espaços de Banach a menos de isomorfismo. Por isso a geometria dos espaços de Banach é uma área tão vasta da Análise Funcional, enquanto que ninguém fala da geometria dos espaços de Hilbert como uma área de pesquisa. Afinal, talvez seja justo afirmar que, "geometria de espaços de Hilbert" resume-se a dois fatos: a existência de projeções ortogonais e a existência de bases (cuja cardinalidade classifica o espaço).

Devo aqui alertar que o que se costuma definir como *isomorfismo* de espaços de Banach é apenas uma bijeção linear contínua com inversa contínua, que não necessariamente preserva a norma (o Corolário 7.13 de certa forma justifica essa convenção). Isso causa uma pequena confusão de nomenclatura: pode acontecer de dois espaços de Hilbert serem isomorfos como espaços de Banach, mas não como espaços de Hilbert. Por exemplo, se Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ (veja o Problema 2.6), os completamentos de $C_0^1(\bar{\Omega})$ com respeito aos produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle^1$ são isomorfos como espaços de Banach (por causa da desigualdade de Poincaré), mas não como espaços de Hilbert. Outro exemplo importante é o espaço L^2 de uma variedade compacta X, isto é, $L^2(X)$ para alguma escolha de medida em X que seja localmente dada por uma função não-nula de classe C^∞ multiplicada pela medida de Lebesgue. Diferentes medidas, levam a espaços de Hilbert não-isomorfos, mas que são isomorfos como espaços de Banach.

Resultados de Teoria dos Conjuntos usados na subseção.

Sejam A, B e S conjuntos.

`Definição` **6.45.** *Se existe $f : A \to B$ bijetora, escrevemos $\#A = \#B$.*

`Definição` **6.46.** *Se existe $f : A \to B$ injetora, escrevemos $\#A \leq \#B$.*

Proposição 6.47. *(Teorema de Bernstein-Schröder) Se $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, então $\#A = \#B$.*

Proposição 6.48. *Vale $\#A \leq \#B$ ou $\#B \leq \#A$ (ou ambas afirmações).*

Proposição 6.49. *Se $\#A \leq \#B$, então $\#(A \times B) = \#B$.*

Corolário 6.50. *Se A for infinito, então $\#(A \times \mathbb{N}) = \#A$.*

Corolário 6.51. *Se $\#A_n = \#S$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\#\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \#S$.*

Corolário 6.52. *Defina $\tilde{S} = \{(x_1, \cdots, x_n); x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$. Se S for infinito, então $\#\tilde{S} = \#\tilde{S}$.*

7. O Teorema de Baire e suas consequências

Teorema 7.1. (Baire) *Um espaço métrico completo não pode ser escrito como união enumerável de fechados com interior vazio.*

Definição **7.2.** *Equivalência de normas.*

Proposição 7.3. *Todas as normas de $\mathbb{C}^n$ são equivalentes.*

Proposição 7.4. *Todo subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial normado é fechado.*

Proposição 7.5. *Todo subespaço próprio de um espaço vetorial normado tem interior vazio.*

Proposição 7.6. *Se a dimensão (algébrica) de um espaço de Banach for infinita, ela é não-enumerável. Isto é, ou uma base (algébrica) do espaço é finita ou é não-enumerável.*

Problema **7.1.** (a) Mostre que todo conjunto ortonormal completo de um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita está estritamente contido em uma base algébrica.
(b) Mostre que todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita possui um subespaço denso de codimensão finita e não-nula (veja a Definição 8.6).
(c) Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita. Mostre que, dados conjuntos ortonormais completos $\{x_1, x_2, \cdots\}$ e $\{y_1, y_2, \cdots\}$ de H_1 e de H_2, respectivamente, existe uma aplicação linear descontínua $U : H_1 \to H_2$ tal que $U(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
(d) Decida se valem as afirmações dos dois primeiros itens se não se supuser que o espaço é separável.

Limitação Uniforme.

Teorema 7.7. (Banach-Steinhaus) *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, sendo X completo, e seja $\mathcal{F}$ uma família de aplicações lineares contínuas de X em Y. Se*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty, \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|T\| \leq C$ para todo $T \in \mathcal{F}$.

Problema **7.2.** Sejam X um espaço de Banach e D um subespaço denso de X. Sejam T_n, $n \in \mathbb{N}$, transformações lineares contínuas de X em um espaço vetorial normado Y tais que $T_n x \to 0$ para todo $x \in D$. Mostre que $T_n x \to 0$ para todo $x \in X$ se e somente se existe $C \geq 0$ tal que $\|T_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema **7.3.** Sejam X um espaço de Banach, seja Y um espaço vetorial normado, sejam $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, transformações lineares contínuas. Mostre que, se existe

$$\lim_n T_n x, \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

então existe um único $T : X \to Y$ linear e contínuo tal que

$$Tx \;=\; \lim_n T_n x, \quad \textit{para todo} \quad x \in X,$$

Aplicação Aberta.

Definição **7.8.** *Seja X um espaço métrico. A bola aberta de centro $a \in X$ e raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos de X cuja distância a a é menor do que r. No caso em que X é um espaço normado, denotaremos por B_r a bola aberta de raio r centrada na origem. Considere um subconjunto S de X. O interior de S, denotado $int S$ é o conjunto dos pontos $a \in S$ tais que alguma bola aberta centrada em a está contida em S. Diz-se que S é aberto se $S = int S$.*

O complementar do fecho de $S \subseteq X$ é igual ao interior do complementar de S,

$$(\overline{S})^c \;=\; \mathrm{int}(S^c).$$

Problema **7.4.** *Mostre que*
(a) Um subconjunto de um espaço métrico é aberto se e somente se seu complementar é fechado (veja a Definição 1.6).
(b) Uma aplicação $f : M \to N$ entre espaços métricos é contínua se e somente se, para todo A aberto em N, $f^{-1}(A)$ é aberto em M.

Sejam X um espaço vetorial, $S \subseteq X$, $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Definimos

$$a + S = \{a + x;\, x \in S\} \quad e \quad \lambda S = \{\lambda x;\, x \in S\}.$$

Problema **7.5.** Sejam X um espaço vetorial, $S \subseteq X$, $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Mostre que
(a) $\mathrm{int}\,(a + S) \;=\; a + \mathrm{int}\, S$, $\quad \mathrm{int}\,(\lambda S) = \lambda\, \mathrm{int}(S)$,
(b) $\overline{a + S} \;=\; a + \overline{S}$, $\quad \overline{\lambda S} \;=\; \lambda \overline{S}$.

Teorema 7.9. *(Teorema da Aplicação Aberta) Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Se T é sobrejetora, então, para todo A aberto em X, $T(A)$ é aberto em Y.*

Uma aplicação que manda abertos em abertos é chamada de aplicação aberta, por isso o nome do teorema.

Vamos quebrar a demonstração do Teorema 7.9 em três proposições.

Proposição 7.10. *Sejam X e Y espaços normados e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear. São equivalentes as seguintes afirmações: (1) T é uma aplicação aberta, (2) $0 \in int T(B_r)$ para todo $r > 0$, (3) $0 \in int T(B_1)$.*

Proposição 7.11. *Sejam X e Y espaços normados, sendo Y completo. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é sobrejetor, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon \subset \overline{T(B_1)}$ e, consequentemente, $B_{t\epsilon} \subset \overline{T(B_t)}$ para todo $t > 0$.*

Demonstração: Como T é sobrejetora, podemos escrever

$$Y \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) \;\subset\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)}$$

Segue do Teorema de Baire que $\operatorname{int}\overline{T(B_{n_0})}$ é não-vazio, para algum n_0. Ou seja, existe $b \in \overline{T(B_{n_0})}$ e $r > 0$ tal que

$$\|y - b\| < r \implies y \in \overline{T(B_{n_0})}.$$

Como T é sobrejetora, podemos escrever $b = Ta$. Usando a definição de fecho e fazendo $y' = y - b$, vem

$$\|y'\| < r \implies \exists\,(x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ x_k \in X,\ \|x_k\| < n_0,\ y' = \lim_k T(x_k - a).$$

Para cada k, temos $\|x_k - a\| < \|n_0\| + \|a\|$. Provamos que

$$\|y'\| < r \implies y' \in \overline{T(B_s)},\ s := n_0 + \|a\|,$$

ou seja, $B_r \subset \overline{T(B_s)}$. Tomando $\epsilon = \frac{r}{s}$, segue da linearidade de T e do Problema 7.5 que $B_{t\epsilon} \subset \overline{T(B_t)}$ para todo $t > 0$. □

Proposição 7.12. *Sejam X e Y espaços normados, sendo X completo, seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon \subset \overline{T(B_1)}$. Então $\overline{T(B_1)} \subset B_2$.*

Teorema 7.13. *Se $T : X \to Y$ é uma bijeção contínua entre espaços de Banach, então T^{-1} é contínua.*

`Demonstração`: Segue do Teorema 7.9 e do Problema 7.4-b. □

PROBLEMA **7.6.** Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e sejam M e N subespaços fechados de X tais que $M \cap N = \{0\}$ e $X = M + N$. Mostre que $\|(m,n)\|_1 = \|m\| + \|n\|$ e $\|(m,n)\|_0 = \|m + n\|$ são normas equivalentes em $M \times N$.

PROBLEMA **7.7.** Seja X um espaço de Banach e sejam M e N subespaços fechados de X tais que $X = M \oplus N$. Mostre que existem projeções (no sentido da Definição 4.4) sobre M e sobre N.

Gráfico Fechado.

Proposição 7.14. *Se M e N são espaços métricos,*

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \;=\; d(x_1, x_2) \,+\, d(y_1, y_2)$$

é uma métrica no produto cartesiano $M \times N$ tal que, para toda função contínua $f : M \to N$, o gráfico *de f*

$$\mathtt{gr}\, f \;=\; \{(x, f(x);\, x \in M\}$$

é um subconjunto fechado de $M \times N$.

No caso em que os espaços métricos são espaços vetoriais normados, a métrica definida na Proposição 7.14 é induzida pela norma

$$\|(x, y)\|_1 \;=\; \|x\| \,+\, \|y\|. \tag{55}$$

PROBLEMA **7.8.** Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert.
(a) Mostre que

$$\|(x, y)\|_2 \;=\; \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

é uma norma em $H_1 \times H_2$, equivalente à norma $\|\cdot\|_1$ definida em (55).
(b) Mostre que a norma $\|\cdot\|_2$ provém de um produto interno, munido do qual $H_1 \times H_2$ torna-se também um espaço de Hilbert.
(c) Mostre que $J(x, y) = (-y, x)$ define um operador unitário de $H_1 \times H_2$ em $H_2 \times H_1$.

(d) Seja $T : H_1 \to H_2$ uma aplicação linear contínua. Mostre que

$$J[(\mathtt{gr}\,T)^\perp] \;=\; [J(\mathtt{gr}\,T)]^\perp \;=\; \mathtt{gr}\,T^*,$$

onde $\perp$ denota o complemento ortogonal tanto em $H_1 \times H_2$ quanto em $H_2 \times H_1$.

Teorema 7.15. `(Teorema do Gráfico Fechado)` *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Se o gráfico de T é um subespaço fechado de $X \times Y$ (com respeito à norma $\|\cdot\|_1$), então T é contínua.*

Corolário 7.16. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : D \to Y$ um operador densamente definido, $D \subseteq X$. Se T for uma bijeção e se o gráfico de T for um subespaço fechado de $X \times Y$, então T^{-1} é contínuo.*

Teorema 7.17. `(Hellinger-Toeplitz)` *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : H \to H$ uma aplicação linear. Se $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todos x e y em H, então A é contínua*

Proposição 7.18. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados, sendo os dois primeiros completos, e seja $B : X \times Y \to Z$ uma aplicação bilinear. B é separadamente contínua se e somente se B é contínua.*

`Definição` **7.19.** *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : D \to Y$ um operador densamente definido, $D \subseteq X$. T é* fechado *se o gráfico de T é fechado em $X \times Y$. T é* fechável *se o fecho do gráfico de T em $X \times Y$ é o gráfico de um operador densamente definido. Quando existe esse operador cujo gráfico é o fecho do gráfico de T, ele é chamado então de* fecho *de T e é denotado por $\bar{T}$.*

`Definição` **7.20.** *Seja $T : D \to Y$, $D \subseteq Y$ um operador fechado entre os espaços de Banach X e Y (D pode ser igual a X e, neste caso, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ pelo Teorema 7.15). O espectro de T é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(T - \lambda I) : D \to Y$ não é uma bijeção. O espectro de um operador fechável é o espectro de seu fecho.*

Segue do Corolário 7.16 que, se λ não pertence ao espectro do operador fechado T, então $(T - \lambda I)^{-1}$ é contínuo.

Proposição 7.21. *Um operador densamente definido $T : D \to Y$ é fechável se e somente se, para toda sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em D,*

$$(x_k \to 0 \;\text{ e }\; Tx_k \to y) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0.$$

`Exemplo` **7.22.** Sejam $a_1, \cdots, a_n$ funções complexas de classe C^∞ definidas em $\mathbb{R}^n$, seja $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, e seja $D = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então o operador $L : D \to H$ dado por

$$Lu(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

é fechável. Quase o mesmo argumento prova que qualquer operador diferencial parcial com coeficientes de classe C^∞ em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, visto como um operador densamente definido em $L^2(\Omega)$, é fechável. O espectro de um operador diferencial é então, por definição, o espectro desse fecho. O mesmo vale para variedades.

8. Quocientes

Lema 8.1. *Seja $S \subseteq [0, \infty)$ e suponha que existem $t_n \le s_n$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $t_n \in S$ and $s_n \longrightarrow L$. Então* $\inf S \le L$.

`Demonstração`: Sendo convergente, $(s_n)_n$ é limitada, logo $(t_n)_n$ é limitada, logo possui subsequência convergente $(t_{n_j})_j$, cujo limite é menor do que ou igual a L. Logo $L \geq \inf S$. □

Proposição 8.2. *Seja X um espaço vetorial normado, e seja M um subespaço fechado de X. Denotando por $[x]$ a classe de $x \in X$ no quociente X/M,*

$$\|[x]\| = \inf_{m \in Y} \|x - m\| \tag{56}$$

é uma norma em X/M.

`Demonstração`: Se $[x] = 0$, isto é, se $x \in M$, então $\inf_{m \in M} \|x - m\| \leq \|m - m\| = 0$, logo $\|[0]\| = 0$. Se $x \in X$ é tal que $\|[x]\| = 0$, então existe sequência $(m_k)_k$ em M tal que $\|x - m_k\| \longrightarrow 0$. Logo $x \in \overline{M} = M$, logo $[x] = 0$.

Dados $x, y \in X$, tome sequências $(m_k)_k$ e $(n_k)_k$ em M tais que $\|x - m_k\| \longrightarrow \|[x]\|$ e $\|y - n_k\| \longrightarrow \|[y]\|$. Segue de

$$\|(x + y) - (m_k + n_k)\| \leq \|x - m_k\| + \|y - n_k\| \longrightarrow \|[x]\| + \|[y]\|$$

e do Lema 8.1 que $\|[x + y]\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$.

Dados $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ e $x \in X$, temos

$$\inf_{m \in M} \|\lambda x - m\| = |\lambda| \inf_{m \in M} \|x - \frac{m}{\lambda}\| = |\lambda| \inf_{n \in M} \|x - n\|,$$

logo $\|[\lambda x]\| = |\lambda| \|[x]\|$. Claro que esta igualdade é válida também quando $\lambda = 0$. □

Proposição 8.3. *A projeção canônica de X em X/M, $\pi(x) = [x]$, $x \in X$, é um operador limitado, $\pi \in \mathcal{L}(X, X/M)$, e $\|\pi\| \leq 1$.*

`Demonstração`: Para todo $x \in X$, $\|\pi(x)\| = \inf_{m \in M} \|x - m\| \leq \|x - 0\| = \|x\|$. □

Proposição 8.4. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, e seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Denotando por $\pi : X \to X/\ker T$ a projeção canônica, existe uma única aplicação linear contínua $\tilde{T} : X/\ker T \to Y$ tal que $\tilde{T} \circ \pi = T$. Além disso, temos a igualdade das normas $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.*

`Demonstração`: Segue de

$$\pi(x) = \pi(y) \iff x - y \in \ker T \iff T(x) = T(y)$$

e da sobrejetividade de π que existe uma única aplicação $\tilde{T} : X/\ker T \to Y$ tal que $\tilde{T} \circ \pi = T$. Que $\tilde{T}$ é linear decorre da linearidade de T e de π e da sobrejetividade de π. Para todo $x \in X$ e $w \in \ker T$, temos

$$\|Tx\| = \|T(x - w)\| \leq \|T\| \|x - w\|$$

e, portanto,

$$\|\tilde{T}(\pi(x))\| = \|Tx\| \leq \|T\| \inf_{w \in \ker T} \|x - w\| = \|T\| \|\pi(x)\|,$$

para todo $x \in X$. Como π é sobrejetiva, segue que $\tilde{T}$ é limitada, $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.

Por outro lado, como $\|\pi\| \leq 1$, temos também $\|T\| = \|\tilde{T} \circ \pi\| \leq \|\tilde{T}\| \|\pi\| \leq \|\tilde{T}\|$. Logo $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. □

Proposição 8.5. *Seja X um espaço vetorial normado, e seja M um subespaço fechado de X. Se X é completo, então o quociente X/M, munido da norma definida em (56), também é completo.*

`Demonstração`: Para provar que X/M é completo basta provar (veja o Problema 6.3) que

$$x_k \in X,\ \sum_{k=1}^{\infty} \|[x_k]\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \text{existe } x \in X \text{ tal que } \sum_{k=1}^{\infty} [x_k] = x.$$

Sejam pois $x_k \in X$ tais que $\sum_{k=1}^{\infty} \inf_{m \in M} \|x_k - m\| < \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $m_k \in M$ tal que $\|x_k - m_k\| \leq 2 \inf_{m \in M} \|x_k - m_k\|$ (pois, se $\|[x_k]\| > 0$, $2\|[x_k]\|$ é maior do que $\inf_{m \in M} \|x_k - m\|$, e se $\|[x_k]\| = 0$, basta tomar $m_k = -x_k$). Sejam $y_k = x_k - m_k$. Então $[x_k] = [y_k]$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \ \leq \ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \|[x_k]\| \ < \ \infty.$$

Como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ (vimos na Proposição 6.7 que toda família absolutamente somável de elementos de um espaço de Banach é somável). Como a projeção canônica $\pi : X \longrightarrow X/M$ é contínua (Proposição 8.3), $[x] = \sum_{k=1}^{\infty} [y_k] = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k]$ (veja o Problema 6.1). □

Problema **8.1.** Mostre que o quociente de $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ pelo subespaço $C_0(a,b)$ de todas as funções de $C[a,b]$ que se anulam em a e em b é isomorfo a $\mathbb{C}^2$.

Problema **8.2.** Seja H um espaço de Hilbert e seja M um subespaço fechado de H. Seja $P : H \to H$ a projeção ortogonal sobre $M^\perp$ (como definimos pouco antes do Problema 4.2) e seja $\tilde{P}$ o operador associado a P da maneira descrita no enunciado da Proposição 8.4.
(a) Mostre que $\tilde{P}$ preserva a norma e que a imagem de $\tilde{P}$ é igual a $M^\perp$.
(b) Mostre que H/M é um espaço de Hilbert.

`Definição` **8.6.** *Seja X um espaço vetorial e seja Y um subespaço de X. A codimensão (ou codimensão algébrica) de Y em X é a dimensão algébrica do quociente X/Y.*

Teorema 8.7. *Sejam X e Y espaços de Banach, seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Denotemos a imagem de T por ImT. Se ImT tem codimensão finita, então ImT é fechada.*

`Demonstração`: Tome $v_1, \cdots, v_n$ tais que $\{[v_1], \cdots, [v_n]\}$ é uma base de $Y/(\mathrm{Im}\, T)$ (n é a codimensão de T). Então $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente e, para todo $y \in Y$, existem únicos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ e $x \in X$ tais que

$$y = Tx + (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n).$$

Considere agora o espaço de Banach $X \oplus \mathbb{C}^n$ (o produto cartesiano $X \times \mathbb{C}^n$ munido da norma $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + (|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|)$, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$) e a aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} T^\sharp : & X \oplus \mathbb{C}^n & \longrightarrow & Y \\ & (x, \lambda) & \longmapsto & Tx + (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n), \end{array}$$

Então $T^\sharp$ é sobrejetora e satisfaz, para todo (x,λ),

$$\|T^\sharp(x,\lambda)\| \le \|Tx\| + \|\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n\| \le C\|(x,\lambda)\|,\ C := \max\{\|T\|, \|v_1\|, \cdots \|v_n\|\},$$

logo $T^\sharp \in \mathcal{L}(X \oplus \mathbb{C}^n, Y)$. Uma aplicação linear contínua e sobrejetora entre dois espaços de Banach é necessariamente uma aplicação aberta (Teorema 7.9). Logo $T^\sharp$ leva fechados em $X \oplus \mathbb{C}^n$ em fechados em Y. Logo $T^\sharp(X \oplus \{0\}) = \operatorname{Im} T$ é um fechado em Y. □

`Observação` **8.8.** É possível, a partir do fato de que $T^\sharp$ é contínua e sobrejetora, concluir a demonstração do Teorema 8.7 invocando, no lugar do Teorema da Aplicação Aberta, sua consequência o Teorema 7.13 e o "Teorema do Isomorfismo para Espaços de Banach", o Teorema 8.4. Para tanto, determinemos o núcleo de $T^\sharp$. Se $T^\sharp(x,\lambda) = 0$, segue da independência linear de $\{v_1, \cdots, v_n\}$ e da unicidade da representação de $0 \in Y$ como

$$0 = Tx + (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)$$

que $Tx = 0$ e $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ou seja $\ker T^\sharp = \ker T \oplus \{0\} \subset X \oplus \mathbb{C}^n$. Logo, se impusermos a T a hipótese adicional $\ker T = \{0\}$, teremos, como consequência do Teorema 7.13 que $T^\sharp$ é um homeomorfismo, e portanto manda fechados em fechados. Como $X \oplus \{0\}$ é fechado em $X \oplus \mathbb{C}^n$ e $T^\sharp(X \oplus \{0\}) = \operatorname{Im} T$, temos que Im T é um fechado em Y. No caso geral, em que T não é necessariamente injetora, podemos tomar a fatoração dada pelo Teorema 8.4, $T = \tilde{T} \circ \pi$, e aplicar a parte já demonstrada do teorema para $\tilde{T}$ (que é injetiva e tem imagem igual à de T), e assim concluir que $\operatorname{Im} T$ é fechada.

9. Hahn-Banach

Teorema 9.1. *Seja X um espaço vetorial real e seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todos x e y em X e para todo $\alpha \in [0,1]$, tem-se*

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y). \tag{57}$$

Seja Y um subespaço de X e suponha que existe uma aplicação linear $\lambda : Y \to \mathbb{R}$ tal que $\lambda(x) \le p(x)$ para todo $x \in Y$. Então existe uma aplicação linear $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ cuja restrição a Y é igual a λ e que satisfaz $\Lambda(x) \le p(x)$ para todo $x \in X$.

`Demonstração`: O primeiro passo é estender λ a um subespaço da forma $Y \oplus [z]$, em que $[z]$ denota o subespaço gerado por algum $z \in X \setminus Y$. Qualquer extensão $\tilde{\lambda}$ de λ a $Y \oplus [z]$ é da forma $\tilde{\lambda}(y + tz) = \lambda(y) + tL$, em que $L = \tilde{\lambda}(z) \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda(y) + tL \le p(y + tz)$, para todos $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$. Temos

$$\lambda(y) + tL \le p(y+tz),\ \text{para todos } y \in Y,\ t \in \mathbb{R} \quad \iff$$
$$\frac{\lambda(y) - p(y - sz)}{s} \le L \le \frac{p(y+tz) - \lambda(y)}{t},\ \text{para todos } y \in Y,\ t, s > 0 \quad \iff$$
$$\sup_{y \in Y, s > 0} \frac{\lambda(y) - p(y - sz)}{s} \le L \le \inf_{y \in Y, t > 0} \frac{p(y+tz) - \lambda(y)}{t}.$$

Existe um tal L se e somente se

$$\frac{\lambda(y_1) - p(y_1 - sz)}{s} \le \frac{p(y_2 + tz) - \lambda(y_2)}{t},\ \text{para todos } y_1, y_2 \in Y,\ t, s > 0. \tag{58}$$

Esta última afirmação, por sua vez é equivalente a

$$t\lambda(y_1) + s\lambda(y_2) \le tp(y_1 - sz) + sp(y_2 + tz),\ \text{para todos } y_1, y_2 \in Y,\ t, s > 0.$$

Temos, para todos $y_1, y_2 \in Y$, $s, t > 0$:

$$t\lambda(y_1) + s\lambda(y_2) \;=\; (s+t)\,\lambda\!\left(\frac{t}{s+t}(y_1 - sz) + \frac{s}{s+t}(y_2 + tz)\right).$$

Mas $\frac{t}{s+t} + \frac{t}{s+t} = 1$. Logo podemos aplicar (57) ao segundo membro da igualdade e obter

$$t\lambda(y_1) + s\lambda(y_2) \le tp(y_1 - sz) + sp(y_2 + tz),$$

o que prova (58).

Assim mostramos que, para todo $z \notin Y$, λ possui uma extensão $\tilde{\lambda}$ a $Y \oplus [z]$ tal que $\tilde{\lambda}(x) \le p(x)$, para todo $x \in Y \oplus [z]$.

Considere o conjunto $\mathfrak{S} = \{(Z,\rho);\ Z$ é um subespaço de X contendo Y, $\rho : Z \to \mathbb{R}$ é linear, ρ estende λ e satisfaz $\rho(x) \le p(x)$, para todo $x \in Z\}$, munido da seguinte ordem parcial: $(Z,\rho) \prec (W,\eta)$ se somente se $Z \subseteq W$ e η é uma extensão de ρ. Agora o leitor deve perceber que segue do lema de Zorn que $\mathfrak{S}$ possui um elemento maximal. Se um elemento (Z,ρ) de $\mathfrak{S}$ é tal que $Z \neq X$, então (Z,ρ) não é maximal, pela primeira parte da demonstração. Logo existe um elemento de $\mathfrak{S}$ da forma (X,Λ), que é o que desejávamos mostrar. □

Teorema 9.2. `(Hahn-Banach)` *Seja X um espaço vetorial complexo e seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todos x e y em X e para todos complexos α e β tais que $|\alpha| + |\beta| = 1$, tem-se*

$$p(\alpha x + \beta y) \;\le\; |\alpha| p(x) + |\beta| p(y). \tag{59}$$

Seja Y um subespaço de X e suponha que existe uma aplicação linear $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ tal que $|\lambda(x)| \le p(x)$ para todo $x \in Y$. Então existe uma aplicação linear $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ cuja restrição a Y é igual a λ e que satisfaz $|\Lambda(x)| \le p(x)$ para todo $x \in X$.

`Demonstração`: Restringindo a multiplicação por escalar aos reais, X torna-se um espaço vetorial real, e $l(x) := \operatorname{Re}\lambda(x)$, $x \in Y$, é um funcional linear real sobre Y satisfazendo $l(x) \le p(x)$ para todo $x \in Y$. A hipótese (59) implica que p também satisfaz a hipótese sobre do Teorema 9.1. Segue então que existe um funcional linear real $L : X \to \mathbb{R}$ cuja restrição a Y é igual a l e satisfaz $L(x) \le p(x)$ para todo $x \in X$. Definindo $\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$, $x \in X$, temos que Λ é um funcional linear complexo sobre X cuja restrição a Y é igual a λ.

Resta provar que, para todo $x \in X$, $|\Lambda(x)| \le p(x)$. Tome $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\Lambda(x) = e^{i\theta}|\Lambda(x)|$. Temos então

$$|\Lambda(x)| \;=\; \Lambda(e^{-i\theta}x) \;=\; L(e^{-i\theta}x) \;\le\; p(e^{-i\theta}x) \;\le\; p(x)$$

(na segunda igualdade, usamos que $|\Lambda(x)|$ é real; na última desigualdade, usamos (59) com $\alpha = e^{-i\theta}$ e $\beta = 0$). □

Extensões de funcionais lineares.

Corolário 9.3. *Sejam X um espaço vetorial normado complexo, $Y \subseteq X$ um subespaço e $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ uma aplicação linear contínua. Existe uma aplicação linear contínua $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ cuja restrição a Y é igual a λ e tal que $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}$.*

`Demonstração`: Considere $p(x) = \|\lambda\|\,\|x\|$, $x \in X$. Segue do Teorema 9.2 que existe um funcional linear $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ satisfazendo $|\Lambda(x)| \le \|\lambda\|\|x\|$ para todo $x \in X$. Daí, Λ é contínuo e $\|\Lambda\| \le \|\lambda\|$. Por outro lado,

$$\|\lambda\| \;=\; \sup_{y \in Y, y \neq 0} \frac{|\Lambda(y)|}{\|y\|} \;\le\; \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|\Lambda(x)|}{\|x\|} \;=\; \|\Lambda\|$$

e, portanto, $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$. □

Problema **9.1.** Enuncie e demonstre uma versão do Corolário (9.3) para espaços vetoriais normados reais.

Problema **9.2.** Seja X um espaço vetorial complexo e seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todos x e y em X e para todos complexos α e β tais que $|\alpha| + |\beta| = 1$, tem-se

$$p(\alpha x + \beta y) \; \leq \; |\alpha| p(x) + |\beta| p(y).$$

Seja Y um subespaço de X e suponha que existe uma aplicação linear $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ tal que $|\lambda(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in Y$. Mostre que p necessariamente satisfaz $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

Corolário 9.4. *Sejam X um espaço vetorial normado e x um elemento não-nulo de X. Existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\|\Lambda\| = 1$ e $\Lambda(x) = \|x\|$.*

`Demonstração`: Seja Y o subespaço gerado por x, $Y = \{\alpha x;\, \alpha \in \mathbb{C}\}$. Defina $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ por $\lambda(\alpha x) = \alpha \|x\|$. Então $\|\lambda\| = \|x\|$. Pelo Teorema 9.2, existe $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ que estende λ (em particular, $\Lambda(x) = \|x\|$) e satisfaz $\|\Lambda\| = \|\lambda\| = \|y\|$. □

Corolário 9.5. *Sejam X um espaço vetorial normado e $Z \subset X$ um subespaço. Seja $y \in X$ tal que*

$$\inf_{z \in Z} \|y - z\| \; = \; d > 0,$$

então existe $\Lambda \in X^*$ que é nulo em Z e tal que $\|\Lambda\| = 1$ e $\Lambda(y) = d$.

`Demonstração`: Em $Y \coloneqq \{z + \alpha y;\, z \in Z,\, \alpha \in \mathbb{C}\}$, defina o funcional linear $\lambda : Y \to \mathbb{C}$ por $\lambda(z + \alpha y) = \alpha d$. Então, para todo $z + \alpha y \in Y$, temos

$$|\lambda(z + \alpha y)| \; = \; |\alpha|\, d \; \leq \; |\alpha| \left\| \frac{z}{\alpha} + y \right\| \; = \; \|z + \alpha y\|$$

e, portanto, $|\lambda| \leq 1$. Agora tome sequência $z_n \in Z$ tal que $\|y - z_n\| \longrightarrow d$. Daí

$$\frac{|\lambda(-z_n + y)|}{\| - z_n + y\|} \longrightarrow 1 \;\text{ e, portanto, }\; \|\lambda\| = \sup_{x \in Y, x \neq 0} \frac{|\lambda(x)|}{\|x\|} \geq 1.$$

Provamos que $\|\lambda\| = 1$. Pelo Teorema 9.2, existe $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ linear e contínuo que estende λ e satisfaz $\|\Lambda\| = \|\lambda\| = 1$. □

Problema **9.3.** *Mostre que os funcionais lineares Λ, cuja existência é garantida pelos Corolários 9.3, 9.4, e 9.5, são únicos, no caso em que X é um espaço de Hilbert.*

Mergulho no bidual.

Proposição 9.6. *Seja X um espaço vetorial normado. Para cada $x \in X$, a aplicação $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{x}(\lambda) = \lambda(x)$ é uma aplicação linear contínua de norma igual a $\|x\|$.*

`Demonstração`: Segue da definição da norma em X^* que, para todo $\lambda \in X^*$, $|\hat{x}(\lambda)| = |\lambda(x)| \leq \|\lambda\| \|x\| = \|x\| \|\lambda\|$ e, portanto, $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$. Tome $\Lambda \in X^*$, $\|\Lambda\| = 1$, tal que $\Lambda(x) = \|x\|$ (a existência de um tal Λ é garantida pelo Corolário 9.4). Então $\|\hat{x}(\Lambda)\| = \|x\| \|\Lambda\|$ e, portanto, $\|\hat{x}\| \geq \|x\|$. □

Dado X um espaço normado, considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \wedge: & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & x & \longmapsto & \hat{x} \end{array}, \tag{60}$$

onde X^{**} denota o bidual de X, isto é, o dual de X^*. A Proposição 9.6 afirma que $\wedge$ é uma isometria. Se X for completo, a imagem de $\wedge$, $\operatorname{Im} \wedge = \{\hat{x};\, x \in X\}$, é um subespaço fechado de X^{**} isométrico a X. Se X for um espaço vetorial normado qualquer, então o fecho da imagem de $\wedge$ é um espaço de Banach (mais especificamente, um subespaço fechado de X^{**}) que contém uma cópia isométrica de X, isto é, $(\overline{\operatorname{Im} \wedge}, \wedge)$ é um completamento de X. Ou seja, usando-se o Teorema de Hahn-Banach, pode-se demonstrar o Teorema 1.17 sem se fazer aquela construção explícita com classes de equivalência de sequências de Cauchy.

Espaços reflexivos.

`Definição` **9.7.** *Um espaço de Banach é reflexivo se a aplicação $\wedge$ definida em* (60) *for sobrejetora.*

A Proposição 9.6 implica que, se X é reflexivo, então X é isometricamente isomorfo a X^{**}. Entretanto, X ser isometricamente isomorfo a seu bidual não implica que X é reflexivo. Em 1951 foi dado um contraexemplo [9].

`Exemplo` **9.8.** Todo espaço normado de dimensão finita é reflexivo.

`Exemplo` **9.9.** Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Teorema de Liouville para funções de $\mathbb{C}$ em um espaço de Banach.

O Teorema de Hanh-Banach pode ser usado para generalizar os resultados básicos da teoria das funções complexas de uma variável complexa para o caso mais geral de funções de $\mathbb{C}$ tomando valores em um espaço de Banach X. Para exemplificar essa importante aplicação, nesta subseção generalizamos o Teorema de Liouville.

`Definição` **9.10.** *Seja X um espaço de Banach. Uma função $f : \mathbb{C} \to X$ é* inteira *se, para todo $z \in C$, existe o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

f é limitada *se $\sup_z \|f(z)\|$ é finito.*

No caso em que $X = \mathbb{C}$, o teorema seguinte é o *Teorema de Liouville*, da análise complexa. O caso geral decorre do caso $X = \mathbb{C}$ e do Corolário 9.4.

Teorema 9.11. *Seja X um espaço de Banach. Se $f : \mathbb{C} \to X$ é inteira e limitada, então f é constante.*

`Demonstração`: Para cada $\lambda \in X^*$, segue da continuidade de λ que $\phi \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é inteira. Além disso, cada $\phi \circ f$ é uma função limitada, pois,

$$|\phi \circ f(z)| \;\leq\; \|\phi\| \|f(z)\| \;\leq\; \|\phi\| \sup_{z \in \mathbb{C}} \|f(z)\| \;<\; \infty, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Segue do Teorema de Liouville que, para todo $\phi \in X^*$, $\phi \circ f$ é constante.

Suponhamos por contradição que f não é constante. Logo existem $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $f(z_1) \neq f(z_2)$. Segue do Corolário 9.4 que existe $\phi \in X^*$ tal que $\phi(f(z_1) - f(z_2)) \neq 0$. Logo $\phi \circ f$ não é constante, contradizendo o que acabamos de demonstrar. □

A dualidade $X \times X^* \longrightarrow \mathbb{C}$.

Se X é um espaço vetorial normado,

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \langle \lambda, x \rangle = \lambda(x) \end{array}$$

é uma aplicação bilinear. Pelo Corolário 9.4, esta é uma aplicação bilinear não-degenerada, no seguinte sentido: se $\langle \lambda, x \rangle = 0$ para todo x, então $\lambda = 0$; e se $\langle \lambda, x \rangle = 0$ para todo λ, então $x = 0$.

Definição 9.12. *Seja X um espaço de Banach. Dado M um subespaço de X, $M^\perp = \{\lambda \in X^*; \text{ para todo } x \in M,\ \langle \lambda, x \rangle = 0\}$. Dado N um subespaço de X^*, ${}^\perp N = \{x \in X; \text{ para todo } \lambda \in N,\ \langle \lambda, x \rangle = 0\}$*

Problema **9.4.** Seja M um subespaço de um espaço de Banach X, seja N um subespaço do dual X^*. Mostre que:
(a) $M^\perp$ é um subespaço fechado de X^*.
(b) ${}^\perp N$ é um subespaço fechado de X.
(c) $(\overline{M})^\perp = M^\perp$.
(d) ${}^\perp(\overline{N}) = {}^\perp N$.
(e) ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.
(f) M é denso em X se e somente se $M^\perp = \{0\}$.
(g) Se X for reflexivo, então N é denso em X^* se e somente se ${}^\perp N = \{0\}$.
Sugestão: No (e) e no (f), use o Corolário 9.5.

Proposição 9.13. *Sejam X e Y espaços de Banach. Dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, existe um único $T' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ tal que $\langle T'\lambda, x \rangle = \langle \lambda, Tx \rangle$ para todo $\lambda \in Y^*$ e para todo $x \in X$. Além disso, $\|T'\| = \|T\|$.*

Problema **9.5.** Seja $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ a transformação linear induzida da maneira usual por A, uma matriz complexa $m \times n$. Mostre que a matriz de $(T_A)'$, com respeito às bases canônicas duais, é igual à matriz transposta de A.

Definição 9.14. *O operador T' definido na Proposição 9.13 é o* transposto *de T.*

O Problema 9.4 (compare-o com o Problema 4.1), o Problema 9.3 e a Proposição 9.13 (compare-a com o Teorema 5.5) justificam a seguinte afirmação (imprecisa): o Teorema de Hahn-Banach é, para espaços de Banach, em diversas situações, um substituto para a existência de projeções ortogonais em espaços de Hilbert.

Miscelânea.

Definição 9.15. *Um espaço métrico é* separável *se possui um subconjunto enumerável denso.*

Proposição 9.16. *Seja X um espaço de Banach. Se X^* é separável, então X é separável.*

Proposição 9.17. *Seja X um espaço de Banach. X é reflexivo se e somente se X^* é reflexivo.*

Problema **9.6.** (a) Mostre que $\mathsf{c} = \{\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n \in \mathbb{C}, \exists \lim_{n\to\infty} x_n \,\}$ e $\mathsf{c}_\circ = \{\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n \in \mathbb{C}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ são subespaços fechados de ℓ^∞.
(b) Mostre que existe $\mathbf{x} \in \mathsf{c}$ tal que $\mathsf{c} = \mathsf{c}_\circ \oplus \mathbb{C}\mathbf{x}$.
(c) Mostre que $[\mathbf{e}^k; k \in \mathbb{N}]$ é denso em $\mathsf{c}_\circ$, com $\mathbf{e}^k$ denotando as sequências definidas no Problema 6.4.

Problema **9.7.** Consideremos os subespaços de ℓ^∞: $\mathsf{c} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\, \exists \lim_{n\to\infty} x_n\}$, $\mathsf{p} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\, \exists \lim_{n\to\infty} x_{2n}\}$ e $\mathsf{m} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\, \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\}$. Claro que $\mathsf{c} \subset \mathsf{p}$. É possível mostrar que $\mathsf{c} \subset \mathsf{m}$, sendo satisfeita a igualdade

$$\lim_n \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \lim_n x_n \quad \text{se} \quad (x_n)_n \in \mathsf{c}.$$

(a) Mostre que existem funcionais lineares contínuos Λ_p e Λ_m em $(\ell^\infty)^*$ tais que $\|\Lambda_p\| = \|\Lambda_c\| = 1$, $\Lambda_p((x_n)_n) = \lim_n x_{2n}$ se $(x_n)_n \in \mathsf{p}$, e

$$\Lambda_m((x_n)_n) = \lim_n \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{se} \quad (x_n)_n \in \mathsf{m}.$$

(b) Exiba um elemento $\mathbf{x}$ de $(\mathsf{p} \cap \mathsf{m}) \setminus \mathsf{c}$ tal que $\Lambda_p(\mathbf{x}) \neq \Lambda_m(\mathbf{x})$.

Problema **9.8.** Sejam X um espaço normado e $M \subset X$ um subespaço fechado e próprio (isto é, $M \neq X$).
(a) Mostre que existe $\lambda \in X^*$ que se anula em M e tal que $\|\lambda\| = 1$.
(b) Mostre que, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$, tal que $\|x\| = 1$ e $\|x - y\| \geq 1 - \epsilon$ para todo $y \in M$. `Dica`: Obtenha $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e $|\lambda(x)| \geq 1 - \epsilon$ para o λ do item (a).
(c) Suponha que X tem dimensão infinita. Mostre que existe sequência $(x_n)_n$ em X tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n e $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ se $n \neq m$. `Sugestão`: Para escolher x_{n+1}, aplique o item (b) para $M = [x_1, \cdots, x_n]$ e $\epsilon = 1/2$.

Problema **9.9.** Seja X um espaço de Banach e seja $M \subseteq X$ um subespaço de dimensão finita.
(a) Mostre que, se $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é uma base de M, então existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in X^*$ tais que $\lambda_j(x_j) = 1$ para todo j, e $\lambda_j(x_k) = 0$ se $j \neq k$.
(b) Mostre que existe uma projeção sobre M, no sentido da Definição 4.4.

10. Duais

Proposição 10.1. *Seja X um espaço de Banach e $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ uma família absolutamente somável em X. Então*

$$\|\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\| \leq \sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\|$$

($\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ é somável em X pela Proposição 6.7, e $\{\|x_\alpha\|; \alpha \in I\}$ é somável em $\mathbb{R}$ pelo Problema 6.2).

Proposição 10.2. *Para cada $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, a aplicação*

$$\mathsf{c}_\circ \ni \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathbb{C}$$

é linear e contínua. Isto define aplicação linear contínua

$$\ell^1 \ni \lambda \longmapsto T_1(\lambda) = \Lambda \in (\mathsf{c}_\circ)^*.$$

Teorema 10.3. *A aplicação linear $T_1 : \ell^1 \to (\mathsf{c}_\circ)^*$, definida na Proposição 10.2, é uma bijeção isométrica.*

PROBLEMA **10.1.** Seja X um espaço de Banach, sejam M e N subespaços fechados de X tais que $X = M \oplus N$.
(a) Dados funcionais lineares contínuos $\lambda_1 : M \to \mathbb{C}$ e $\lambda_2 : N \to \mathbb{C}$, mostre que

$$\lambda(m+n) = \lambda_1(m) + \lambda_2(n),\ m \in M,\ n \in N,$$

é um funcional linear contínuo $\lambda : X \to \mathbb{C}$. Denote isto por $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2$.
Sugestão: Use o Problema 7.6.
(b) Mostre que todo $\lambda \in X^*$ é da forma $\lambda = \lambda_1 \oplus \lambda_2$, para algum $\lambda_1 \in M^*$ e algum $\lambda_2 \in N^*$.

PROBLEMA **10.2.** (a) Usando o Problema 9.6-b e o Problema 10.1, mostre que existe uma bijeção linear contínua $T^c : \ell^1 \to \mathsf{c}^*$.
(b) Dê uma fórmula explícita para a transformação linear $T : \ell^1 \to \ell^1$ definida assim: $T(\lambda) = (T_1)^{-1}(\rho)$, onde ρ é a restrição a $\mathsf{c}_\circ$ de $T^c(\lambda)$.
Dica: É possível definir T^c de modo que

$$T(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots) \ = \ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots).$$

Se preciso, use esta informação como uma dica também para construir T^c.
(c) Decida se o T^c que você construiu é uma isometria.

Proposição 10.4. *Para cada $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, a aplicação*

$$\ell^1 \ni \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \longmapsto \ \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathbb{C}$$

é linear e contínua. Isto define aplicação linear contínua

$$\ell^\infty \ni \lambda \ \longmapsto \ T_\infty(\lambda) = \Lambda \in (\ell^1)^*.$$

Teorema 10.5. *A aplicação linear $T_\infty : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$, definida na Proposição 10.4, é uma bijeção isométrica.*

Corolário 10.6. *$\mathsf{c}_\circ$ não é reflexivo.*

`Demonstração`: Use os Teoremas 10.3 e 10.5, juntamente com as três observações seguintes: (i) $(\mathsf{c}_\circ)^{**} \ni \eta \mapsto \eta \circ T_1 \in (\ell^1)^*$ é uma bijeção linear isométrica (isto decorre de T_1 ser uma bijeção linear isométrica), (ii) para todo $\mathbf{x} \in \mathsf{c}_\circ$, $\hat{\mathbf{x}} \circ T_1 = T_\infty(\mathbf{x})$ e (iii) $\mathsf{c}_\circ \neq \ell^\infty$. □

PROBLEMA **10.3.** Mostre que c não é reflexivo.

Os argumentos da demonstração dada em sala para a Proposição 10.2 mostram também o seguinte:

Proposição 10.7. *Para cada $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, a aplicação*

$$\ell^\infty \ni \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \longmapsto \ \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathbb{C}$$

é linear e contínua. Isto define aplicação linear contínua

$$\ell^1 \ni \lambda \ \longmapsto \ S_1(\lambda) = \Lambda \in (\ell^\infty)^*.$$

Tal como no Teorema 10.3, demonstra-se que a aplicação S_1 definida na Proposição 10.7 preserva norma, isto é, satisfaz $\|S_1(\lambda)\|_{(\ell^\infty)^*} = \|\lambda\|_{\ell^1}$ para todo $\lambda \in \ell^1$. Vejamos em seguida porque S_1 não é sobrejetora.

Tal como na demonstração do Corolário 10.6, vê-se que, a menos da identificação de $(\ell^1)^*$ com ℓ^∞ dada pelo Teorema 10.5, a aplicação S_1 é a mesma coisa que a aplicação $\hat{}\,: \ell^1 \to (\ell^1)^{**}$ (definida em (60) para um espaço vetorial normado qualquer). Assim, S_1 não ser sobrejetora é equivalente a ℓ^1 não ser reflexivo.

Podemos concluir que ℓ^1 não é reflexivo de duas maneiras, usando argumentos abstratos. Primeiro, porque se ℓ^1 fosse reflexivo, $(\mathsf{c}_\circ)^*$ também seria (pelo Teorema 10.3). Logo, $\mathsf{c}_\circ$ seria reflexivo (pela Proposição 9.17); o que é falso, pelo Corolário 10.6. Segundo porque, se ℓ^1 fosse reflexivo, então S_1 seria sobrejetora, e daí o dual de ℓ^∞ seria isomorfo a ℓ^1, logo separável pelo Problema 10.5-a. Logo, pela Proposição 9.16, ℓ^∞ seria separável; o que é falso, pelo Problema 10.5-b.

Uma maneira "concreta" de se provar que ℓ^1 não é reflexivo é mostrando diretamente que S_1 não é sobrejetora. Isto é o que peço que vocês provem no Problema 10.4

Problema **10.4.** Dê exemplo de um funcional linear contínuo $\lambda : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ que não pertença à imagem de S_1.

Problema **10.5.** (a) Mostre que ℓ^1 é separável. (b) Mostre que ℓ^∞ não é separável.

`Exemplo` **10.8.** Seja p real, $p > 1$, e seja q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Para cada $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$, a aplicação

$$\ell^p \ni \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in \mathbb{C}$$

é linear e contínua. Isto define aplicação linear contínua

$$\ell^q \ni \lambda \longmapsto T_q(\lambda) = \Lambda \in (\ell^p)^*.$$

Demonstra-se que T_q é uma bijeção isométrica entre ℓ^q e $(\ell^p)^*$. Trocando os papéis de p e q, vemos que ℓ^p é isometricamente isomorfo a $(\ell^p)^{**}$. O isomorfismo assim obtido é a aplicação $\hat{}$ para ℓ^p. Logo, ℓ^p é reflexivo.

Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, o dual de $L^p(\Omega)$, p e q como no parágrafo anterior, é isometricamente isomorfo a $L^q(\Omega)$, e portanto $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

11. Operadores Compactos

`Definição` **11.1.** *Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ entre os espaços normados X e Y é um operador compacto se o fecho em Y de $\{Tx;\ \|x\| \le 1\}$ é um conjunto compacto. Denotamos por $\mathcal{K}(X,Y)$ o conjunto de todos os operadores compactos de X em Y. Quando $X = Y$, denotamos $\mathcal{K}(X,X)$ por $\mathcal{K}(X)$.*

A seguinte proposição segue facilmente do fato de que um subconjunto S de um espaço métrico é compacto se e somente se toda sequência em S possui uma subsequência convergente, com limite pertencente a S.

Proposição 11.2. *Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se e somente se, para toda sequência limitada $(x_n)_n$ em X, $(Tx_n)_n$ possui uma subsequência convergente.*

Daí segue:

Proposição 11.3. *Sejam X, Y, U, V espaços normados. Então $\mathcal{K}(X,Y)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(X,Y)$. Além disso, se $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y,V)$, $S \in \mathcal{L}(U,X)$, então $R \circ T \circ S \in \mathcal{K}(U,V)$.*

Corolário 11.4. *Seja X um espaço normado. Então $\mathcal{K}(X)$ é um ideal bilateral da álgebra $\mathcal{L}(X)$.*

Teorema 11.5. *Sejam X e Y espaços normados. Se X for completo, $\mathcal{K}(X,Y)$ é fechado em $\mathcal{L}(X,Y)$.*

`Exemplo` **11.6.** Sejam X e Y espaços normados e seja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ um operador limitado cuja imagem tem dimensão finita, $\dim T = n$ (dizemos então que T tem posto finito). Então T é compacto, porque o espaço normado $\operatorname{Im} T$ é isomorfo a $\mathbb{C}^n$ para algum n, e em $\mathbb{C}^n$ toda sequência limitada possui uma subsequência convergente. Se Y é completo e se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é limite de operadores limitados, então T é compacto.

Em espaços de Hilbert, vale a *propriedade da aproximação*, expressa no seguinte teorema.

Teorema 11.7. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(H)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, exite T_ϵ limitado e de posto finito tal que $\|T - T_\epsilon\| < \epsilon$.*

Teorema 11.8. *Seja X um espaço normado. Se a identidade I_X em X for um operador compacto em X, então a dimensão de X é finita.*

`Demonstração`: Se a dimensão de X for infinita, segue do Problema 9.8-c que existe sequência $(x_n)_n$ em X tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n e $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ se $n \neq m$. Logo $(x_n)_n$ é uma sequência limitada tal que $(I_X x_n)_n$ não possui subsequência convergente. $\square$

Proposição 11.9. *Sejam X um espaço normado, $T \in \mathcal{K}(X)$ e $M \subset X$ um subespaço fechado, invariante por T (i.e., $Tx \in M$ para todo $x \in M$). Então a restrição de T a M, $T|_M : M \longrightarrow M$, pertence a $\mathcal{K}(M)$.*

`Demonstração`: Seja $(x_n)_n$ uma sequência limitada em M. Segue da compacidade de $T : X \longrightarrow X$ que $(Tx_n)_n$ possui uma subsequência $(Tx_{n_j})_j$ em X. Como $Tx_{n_j} \in M$ para todo j e M é fechado, então $\lim_j Tx_{n_j} \in M$. Logo $(T|_M x_{n_j})_j$ possui subsequência convergente (em M), o que prova que $T|_M \in \mathcal{K}(M)$. $\square$

Proposição 11.10. *Sejam X um espaço normado, $T \in \mathcal{K}(X)$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, for um autovalor, então o autoespaço $E_\lambda := \ker(T - \lambda I)$ tem dimensão finita.*

`Demonstração`: Se $v \in E_\lambda$, então $Tv = \lambda v \in E_\lambda$. A restrição $\frac{T}{\lambda}$ é o operador indentidade de E_λ e é compacto pela Proposição 11.9. Segue do Teorema 11.8 que a dimensão de E_λ é finita.

Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos.

Todo operador autoadjunto em um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita possui uma base ortonormal de autovetores. Nosso objetivo nesta subseção é generalizar esse resultado para espaços de Hilbert arbitrários, no caso em que o operador autoadjunto é compacto.

Não é verdade que todo operador limitado autoadjunto em um espaço de Hilbert possui uma base ortonormal de autovetores (por exemplo, o operador $M : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, $(Mf)(x) = xf(x)$, é autoadjunto e não possui autovetores). É possível, entretanto, generalizar uma reformulação (que não menciona autovetores) do teorema espectral da Álgebra Linear para operadores autoadjuntos não-compactos em espaços de Hilbert de dimensão infinita. [14]

Vamos supor que o espaço é complexo, mas uma análise cuidadosa da demonstração do Teorema 11.14 revela que o teorema vale também para espaços de Hilbert reais.

Seja H um espaço de Hilbert. Um operador limitado $T \in \mathcal{L}(H)$ é *autoadjunto* se $T = T^*$.

Proposição 11.11. *Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto, seja $M \subset H$ um subespaço fechado invariante por T. Então o complemento ortogonal $M^\perp$ também é invariante por T. Além disso, as restrições $T_M \in \mathcal{L}(M)$ e $T_{M^\perp} \in \mathcal{L}(M^\perp)$ são operadores autoadjuntos.*

Proposição 11.12. *Todo autovalor de um operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ é real. Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Lema 11.13. *Seja $T \in \mathcal{K}(H)$ um operador autoadjunto. T possui um autovalor μ_1 satisfazendo $|\mu_1| = \|T\|$.*

Teorema 11.14. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$, $T \neq 0$. Existem um conjunto de índices I, que pode ser $I = \{1, 2, 3, \cdots\}$ ou $I = \{1, 2, \cdots, N\}$ para algum inteiro positivo N, e sequências $(x_j)_{j\in I}$ e $(\mu_j)_{j\in I}$, $x_j \in H$ e $\mu_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ para todo $j \in I$, tais que $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ é um conjunto ortonormal, $\lim_j \mu_j = 0$, e temos*

$$Tx \;=\; \sum_{j\in I} \mu_j \,\langle x_j, x\rangle\, x_j, \quad \textit{para todo} \quad x \in H. \tag{61}$$

No caso em que o conjunto I é infinito, para todo $x \in H$, a soma em (61) é incondicionalmente convergente em H (no sentido da Definição 6.1). Além disso, o núcleo de T coincide com o complemento ortogonal do subespaço gerado por $\{x_j,\, j \in I\}$.

Exemplos. Problemas.

Problema **11.1.** (a) Dados $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\sup_n |\alpha_n|$ é finito, mostre que existe um único $S \in \mathcal{L}(\ell^2)$ tal que $S\mathbf{e}^n = \alpha_n \mathbf{e}^{n+1}$.
(b) Mostre que $\|S\| = \sup_n |\alpha_n|$.
(c) Mostre que, se $\lim \alpha_n = 0$, então S é compacto. Sugestão: Truncando a sequência e usando o item (b), mostre que S é limite de operadores de posto finito.
(d) Mostre que S só é compacto se $\lim \alpha_n = 0$. Sugestão: Negue que o limite é nulo e obtenha então uma sequência na bola unitária cuja imagem não tem subsequência convergente.

Problema **11.2.** Dados $a_{jk} \in \mathbb{C}$, $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, tais que

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} |a_{jk}|^2$$

é finito, mostre que

$$A(\,(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\,) \;=\; (\,\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k\,)_{j\in\mathbb{N}}$$

define um operador compacto em ℓ^2.
Sugestão: Para provar que A é limitado e estimar sua norma, tente imitar o que fizemos em sala para o operador integral com núcleo em $C([0,1]\times[0,1])$ agindo em $L^2[0,1]$. Feito isso, provar que A é limite de operadores de posto finito é mais fácil aqui, no caso discreto.

Problema **11.3.** (a) Dados $a_{jk} \in \mathbb{C}$, $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, tais que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{jk}| \quad \text{e} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{jk}| \tag{62}$$

são finitos, mostre que

$$A(\,(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\,) \;=\; (\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k\,)_{j\in\mathbb{N}}$$

define um operador limitado $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ satisfazendo $\|A\| \leq \sqrt{C_1C_2}$, onde C_1 e C_2 denotam, nesta ordem, os dois supremos que aparecem em (62).
Dica: Para cada j, aplique Cauchy-Schwarz às sequências

$$(\,\sqrt{|a_{jk}|}\,)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad (\,\sqrt{|a_{jk}|}\cdot|x_k|\,)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Depois, eleve ao quadrado, use a hipótese, some em j, use de novo a hipótese, e tome a raiz quadrada (se não nesta, talvez noutra ordem).
(b) Mostre que o adjunto de A também é dado por uma matriz infinita satisfazendo a mesma hipótese.
(c) Mostre que, se

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{j\geq m} \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{jk}| \;=\; 0,$$

então A é compacto. Dica: Esta hipótese implica que A pode ser aproximado por operadores de posto finito, dados por finitas linhas da matriz.
(d) Mostre que, se

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{k\geq m} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{jk}| \;=\; 0,$$

então A é compacto. Sugestão: Use os itens (b) e (c) e que A^* é compacto se A o for.

Problema **11.4.** Dado $K \in C([0,1]\times[0,1])$, mostre que

$$Tu(x) \;=\; \int_0^1 K(x,y)u(y)dy$$

define um operador compacto em $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.
Sugestão: Use o Teorema de Arzelá-Ascoli [11, Teorema X-22].

Problema **11.5.** Decida se o operador de Volterra (definido no Problema 3.6) é compacto.

Problema **11.6.** Seja H um espaço de Hilbert. Mostre que, se $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$, então

$$\|T\| \;=\; \{\,|\langle Tx, x\rangle|\,;\; \|x\| = 1\,\}.$$

Dica: Polarização e paralelogramo, veja [14, Problema VI-9a].

12. Mais Problemas

1ª Questão. Calcule a norma dos seguintes operadores.
(a) $V : (C[0,2], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,2], \|\cdot\|_\infty)$ definido por $Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in [0,2]$.
(b) $T : (C[0,2], \|\cdot\|_2) \to (C[0,2], \|\cdot\|_2)$ definido por $Tf(x) = xf(x)$, $x \in [0,2]$.

2ª Questão. (a) Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam u e v pertencentes a H. Calcule a norma e ache o adjunto do operador $T : H \to H$ definido por $T(x) = \langle u, x \rangle v$
(b) Mostre que o operador identidade de $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ em $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ não é contínuo, nem tem inversa contínua.

3ª Questão. Sejam X e Y espaços vetoriais normados, sendo X completo. Para cada $a > 0$, denote por B_a a bola aberta em X ou em Y de centro na origem e raio a. Seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua.
(a) Mostre que, se ϵ e δ são reais positivos tais que $B_\delta \subset \overline{T(B_\epsilon)}$, então $B_{t\delta} \subset \overline{T(B_{t\epsilon})}$ para todo $t > 0$.
(b) Assuma que T satisfaz: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta \subset \overline{T(B_\epsilon)}$. Mostre que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta \subset T(B_\epsilon)$. `Sugestão`: Dado $y \in B_\delta$, construa sequência $x_k \in X$ tal que $(y - \sum_{j=1}^{k} Tx_j)$ tenda a zero e $\|x_k\| < \epsilon/2^{k-1}$.

4ª Questão. (a) Seja $(\mathbf{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, uma sequência convergente em ℓ^2, o espaço das sequências complexas de quadrado somável. Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{C}$.
(b) Seja $D = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2; (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}$ e seja $T : D \to \ell^2$ definido por $T(x_n) = (nx_n)$. Mostre que o gráfico de T é fechado em $\ell^2 \times \ell^2$ e que T não é contínuo.

5ª Questão. Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $T : H \to H$ uma aplicação linear. Suponha que existe uma aplicação $S : H \to H$ tal que $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para todos x e y em H. Mostre então que S é linear e que S e T são contínuas. `Sugestão`: Dada sequência x_k tal que x_k e Tx_k convergem, calcule $\lim_k \langle z, Tx_k \rangle$ para cada $z \in H$.

6ª Questão. Seja X um espaço de Banach e seja $M \subseteq X$ um subespaço de dimensão finita.
(a) Mostre que, se $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é uma base de M, então existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in X^*$ tais que $\lambda_j(x_j) = 1$ para todo j, e $\lambda_j(x_k) = 0$ se $j \neq k$.
(b) Mostre que $T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j(x)$ define um operador contínuo em X, $T^2 = T$, e a imagem de T é igual a M.

7ª Questão. Seja $\mathsf{c} = \{\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{C}, \exists \lim_{n\to\infty} x_n \,\}$.
(a) Mostre que existe pelo menos um funcional linear contínuo $\lambda \in (\ell^\infty)^*$ tal que, para todo $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{c}$, $\lambda(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} x_n$.
(b) Mostre que existe mais de um funcional como pedido no item (a).

8ª Questão. (a) Mostre que existe um conjunto ortonormal $\{f_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ em $L^2(\mathbb{R})$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos: (i) $f_n \in C_c(\mathbb{R})$, (ii) $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e (iii) $f_n(x) = 0$ se $x \notin [2^{-n}, 2^{1-n}]$.
(b) Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada satisfazendo $a(x) \geq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Mostre que $Af(x) = a(x)f(x)$ define um operador linear contínuo não-compacto em $L^2(\mathbb{R})$.
(c) Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, limitada e não-nula. Mostre que $Af(x) = a(x)f(x)$ define um operador linear contínuo não-compacto em $L^2(\mathbb{R})$.
Observação: No item (c), basta esboçar os argumentos que forem muito parecidos com os usados antes.

9ª Questão. Seja H um espaço de Hilbert e seja T um operador compacto auto-adjunto em H.
(a) Mostre que, se $T - \lambda I$ é inversível para todo $\mathbb{C} \ni \lambda \neq 0$, então $T = 0$.
(b) Mostre que, se H não for separável, então o núcleo de T tem dimensão hilbertiana não enumerável.
Sugestão: Use o teorema espectral.

10ª Questão. Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ linear e contínua. Mostre que:
(a) Se existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$, então a imagem de T é fechada em Y.
(b) Se T é injetora e se sua imagem é fechada em Y, então existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$.
Sugestão: No item (b), use o Teorema da Aplicação Aberta.

11ª Questão. Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um dado elemento de ℓ^1.
(a) Mostre que $\Lambda((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ define um funcional linear contínuo em $\mathsf{c}_\circ = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{C}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$.
(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n \in \mathbb{C}$ tal que $|a_n| = 1$ e $|\lambda_n| = \lambda_n a_n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\mathbf{x}^k$ a sequência $\mathbf{x}^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n^k = a_n$ se $n \leq k$, e $x_n^k = 0$ se $n > k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, calcule o valor absoluto de $\Lambda(\mathbf{x}^k)$.
(c) Calcule a norma em $\mathsf{c}_\circ^*$ do funcional Λ definido no item (a).

12ª Questão. (a) Seja H um espaço de Hilbert e sejam x e y elementos de H tais que $y \neq 0$, $\|x\| = 1$ e $\langle x, y\rangle = \|y\|$. Mostre que $x = y/\|y\|$.
Sugestão: Escreva y como a soma de dois vetores, um paralelo e outro perpendicular a x.
(b) Seja H um espaço de Hilbert e seja M um subespaço fechado de H. Mostre que, para cada $y \notin M$, existe um único $\Lambda \in H^*$ tal que: (i) Λ se anula em M, (ii) $\|\Lambda\| = 1$ e (iii) $\Lambda(y) = \inf\limits_{z\in M} \|y - z\|$.

13ª Questão. Seja X o espaço vetorial de todas as funções complexas contínuas e limitadas definidas em $\mathbb{R}$, munido da norma do supremo.
(a) Mostre que existe pelo menos um funcional linear contínuo $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ de norma igual a 1 satisfazendo: se $f \in X$ é tal que existem e são iguais os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, então $\Lambda(f) = L$.
(b) Mostre que existem pelo menos dois funcionais lineares como no item (a).

Dica: Use sem provar que $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ e $\lim_{x\to-\infty} |f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, desde que existam os limites.

14ª Questão. (a) Sejam X e Y espaços de Banach e sejam $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, aplicações lineares e contínuas. Supondo que, para cada $x \in X$, existe em Y o limite $\lim_{n\to\infty} T_n x$, mostre que existe uma aplicação linear contínua $T : X \to Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$.
Sugestão: Use o Princípio da Limitação Uniforme.
(b) Seja H um espaço de Hilbert e sejam $T_n : H \to H$, $n \in \mathbb{N}$, aplicações lineares contínuas. Supondo que, para cada $x \in H$ e para cada $y \in H$, existe o limite $\lim_{n\to\infty} \langle T_n x, y\rangle$, mostre que existe uma aplicação linear $T : H \to H$ tal que $\lim_{n\to\infty} \langle T_n x, t\rangle = \langle Tx, y$, para todo $x \in H$ e todo $y \in H$.
Sugestão: Para cada $x \in H$, aplique o item (a), junto com o Lema de Riesz, a $\langle T_n x, \cdot\rangle : H \to \mathbb{C}$.

Referências

[1] N. Bourbaki, Topological Vector Spaces, Springer, 1987.
[2] J. Dixmier, C*-Algebras, North Holland, 1982.
[3] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, 1972.
[4] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
[5] G. B. Folland, Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications, John Wiley & Sons, 1984.
[6] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations, Springer, 1983.
[7] A. Gonçalves, Introdução à Álgebra, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
[8] C. S. Hönig, Análise Funcional e Aplicações, IME-USP, 1970.
[9] R. C. James, *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 174-177, 1951.
[10] F. John, Partial Differential Equations, Springer, 1982.
[11] E. Lima, Curso de Análise I, IMPA, 1976.
[12] E.L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Livros Técnicos e Científicos, 1976.
[13] G. J. Murphy, C*-Algebras and Operator Theory, Academic Press, 1990.
[14] M. Reed & B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I (Functional Analysis), Academic Press, 1980.
[15] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1978.
[16] F. Treves, Basic Linear Partial Differential Equations, Academic Press, 1975.
[17] N. E. Wegge-Olsen, K-theory and C*-algebras, Oxford University Press, 1994.