NOTAS DE AULA

MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1
2° SEMESTRE DE 2022
IME - USP
SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

Sumário

1. Os Postulados de Euclides (para geometria plana) 2

2. Axiomas de Incidência 5

3. Modelos 6

O Plano de Descartes 6

O Plano de Poincaré 7

Geometrias finitas 7

A esfera de Riemann 8

Planos projetivos 8

4. Axiomas de Ordenamento 9

Separação do plano 10

Ordenamento de quatro pontos 11

Separação da reta 12

Postulado de Pasch. Teorema da Barra Transversal 13

5. Axiomas de Congruência 14

Caso LAL de congruência 15

O Teorema do Triângulo Isósceles 16

6. Consequências dos Axiomas de Congruência 16

Subtração de segmentos 16

Adição e subtração de ângulos 17

Casos ALA e LLL de congruência 19

7. Pons Asinorum 20

Segunda demonstração da Proposição 5.4, o "Teorema do Triângulo Isósceles" 21

8. Continuidade 21

Desigualdades entre segmentos e entre ângulos 22

Axioma sobre interseção de círculos 23

Construção de um triângulo equilátero 24

9. Geometria sem o Quinto Postulado (mais alguns resultados) 25

Existência da perpendicular, o Quarto Postulado de Euclides 25

Ângulos externos, unicidade da perpendicular, existência da paralela 27

Alternos internos, critério LAA, existência de ponto médio 28

Bissetrizes 30

10. O Quinto Postulado e algumas de suas consequências 31

Referências 32

1. Os Postulados de Euclides (para geometria plana)

O ponto de partida da geometria euclideana são os seguintes termos ou frases que aceitamos sem definição: (1) ponto, (2) reta, (3) congruência, (4) um ponto está em uma reta, (5) um ponto está entre dois pontos. Dizer que a reta r passa pelo ponto P é o mesmo que dizer que o ponto P está na reta r. Denotaremos congruência por $\cong$.

As noções de congruência, de "estar entre" e de "estar em" serão sujeitas a certos axiomas, oportunamente enunciados. Nos Elementos [1], os axiomas sobre a noção de estar entre e diversos axiomas sobre as noções de estar em e de congruência são assumidos apenas implicitamente. Alguns dos axiomas sobre congruência são incluídos por Euclides nas "noções comuns" que antecedem o enunciado da sua primeira proposição.

Postulado 1. *Dados* [1] *dois pontos P e Q, existe uma única reta que passa por P e Q. Essa reta é denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$.*

Claro que $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 1.1. *Se o ponto C está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e é distinto de A e de B, então as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são iguais a $\overleftrightarrow{AB}$.*

`Demonstração`: As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ passam por A e C. Pelo Postulado 1, existe uma única reta que passa por A e por C. Logo $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são a mesma reta. Trocando os nomes de algumas letras, o mesmo argumento garante que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são a mesma reta. $\square$

[1] Sempre que nos referirmos a dois pontos, ou duas coisas quaisquer, ficará implícito que os dois pontos, ou as duas coisas, são distintos.

Na Seção 4, vamos enunciar todos os axiomas sobre o "estar entre". Para enunciar os demais postulados de Euclides precisamos antecipar o seguinte axioma, que será posteriormente incluído no que chamaremos de "Axioma B1".

Postulado X. Se o ponto B está entre A e C, então B está na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Definição 1.1. *Dados dois pontos A e B, o segmento de extremidades A e B, que denotaremos por AB, é o conjunto de pontos que consiste de: A, B e de todos os pontos que estão entre A e B.*

Segue do Postulado X que todos os pontos de AB estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A formulação original [1] do segundo postulado de Euclides é "fique postulado prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta" (reta limitada é como Euclides chamava um segmento). Seguindo Greenberg [2], adotaremos aqui a seguinte interpretação do que Euclides queria dizer:

Postulado 2. *Dado o segmento AB, para todo segmento CD existe um ponto E tal que B está entre A e E e BE é congruente a CD, o que denotamos por $BE \simeq CD$.*

Em outras palavras, todo segmento pode ser estendido indefinidamente, a partir de cada uma de suas extremidades.

Definição 1.2. *Dados dois pontos O e A, o círculo de centro O que passa por A é o conjunto dos pontos P tais que $OP \cong OA$. O segmento OA é um raio do círculo (consequentemente, todo segmento OP com P no círculo também é um raio).*

O enunciado original do terceiro postulado de Euclides é: "fique postulado, com todo centro e distância, descrever um círculo" [1]. Para os padrões modernos de rigor, seria necessário antes definir distância. Mas, para isso, precisaríamos antes definir os números reais. O livro-texto [2] que seguimos nestas notas adota a abordagem de Hilbert, que evita o uso de números reais e trata apenas da congruência de segmentos. Adotamos então a seguinte formulação do terceiro postulado.

Postulado 3 *Dados dois pontos O e A, existe o círculo de centro O e raio OA*

O Postulado 3 é consequência imediata dos axiomas da Teoria dos Conjuntos. Poderia portanto ser substituído por uma definição numa abordagem moderna.

Os Postulados 1 e 3 podem ser vistos também como postulados do desenho geométrico. A régua euclideana é o instrumento ideal que permite obter a reta determinada por dois pontos. O compasso euclideano é o instrumento ideal que permite obter o círculo com centro em um ponto que passa por um segundo ponto dado.

Definição 1.3. *Dados dois pontos A e B, a semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos pontos P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que P pertence ao segmento AB ou B está entre A e P. Diremos então que A é o vértice da semirreta, ou que a semirreta se origina em A.*

Só depois de enunciarmos os postulados da noção "estar entre" seremos capazes de provar a seguinte proposição: "se C é distinto de A e pertence a $\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$".

Definição 1.4. *As semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são iguais.*

Definição 1.5. *Um ângulo com vértice em A é a união de duas semirretas (distintas) e não opostas que se originam em A. As duas semirretas são chamadas de lados do ângulo. Denotamos por $\angle BAC$ ou $\angle CAB$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.*

Definição 1.6. *Os dois ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ são suplementares se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas.*

Definição 1.7. *Um ângulo é reto se é congruente a um ângulo suplementar a ele.*

Postulado 4. *Todos os ângulos retos são congruentes entre si.*

É importante frisar que os dois ângulos retos do enunciado do Postulado 4 não são necessariamente suplementares. Um deles pode estar aqui do nosso lado e o outro em outra galáxia. Num certo sentido, este postulado impõe que o espaço seja homogêneo.

Na geometria métrica de Birkoff [6], que é a abordagem da geometria euclideana adotada em todos os livros de geometria para o Ensino Médio ou Fundamental, postula-se que todo ângulo possui uma medida, e define-se que dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida e que um ângulo é reto se mede 90 graus. Nessa abordagem, o Postulado 4 é uma proposição trivial. Antes de Birkoff, sem usar números reais, Hilbert explicitou diversos postulados implicitamente assumidos por Euclides (sobre congruência de ângulos, sobre a propriedade da reta separar um plano em dois semiplanos, etc) e, usando-os, demonstrou [6, Theorem 8.2.3] o Postulado 4; ou seja, mostrou que ele é um postulado supérfluo também na *geometria sintética* (a geometria que não supõe a existência dos números reais).

Definição 1.8. *Duas retas r e s são paralelas se nunca se encontram, ou seja, se nenhum ponto está simultaneamente em r e em s.*

Na geometria espacial, exige-se também que duas retas paralelas sejam coplanares, mas, como já foi dito, estas notas tratam apenas da geometria plana.

Postulado 5. *Dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma única reta paralela a r que passa por P.*

A formulação original do Quinto Postulado é: "fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos". Em outras palavras, suponha que sejam dadas três retas r, s e t, que t intersecta r e s, e que, em um dos lados de t a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Então r e s se encontram no lado de t em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos. Para formular seu postulado nesses termos, Euclides assumiu implicitamente diversos postulados sobre congruência de ângulos e sobre os dois lados que uma reta define no plano. Oportunamente, explicitaremos todos esses postulados implícitos e mostraremos que a formulação original e este enunciado do Postulado 5 que adotamos aqui são equivalentes.

Embora os quatro primeiros postulados de Euclides tenham sido, desde o começo, aceitos como verdades autoevidentes, o quinto postulado sempre foi controverso. Ao longo de mais de dois milênios, leitores de Euclides tentaram demonstrar o Postulado 5 a partir dos demais postulados. Esses esforços, que à primeira vista poderiam ser injustamente considerados infrutíferos, na verdade provocaram grandes avanços na Geometria. Esse processo culminou na descoberta das geometrias não-euclideanas no século 19.

O matemático francês Adrien Marie Legendre, que viveu de 1752 a 1833 e deu importantes contribuições à Mecânica e à Geometria, acreditou que tinha demonstrado o Quinto Postulado. Vamos listar em seguida os passos de uma de suas "demonstrações", sendo dadas a reta r e um ponto P que não está em r. A figura quase indispensável para acompanhar o argumento será omitida neste documento. A leitora pode pegar papel e caneta e desenhar sua própria figura, ou pode consultar a Figura 1.12 de [2].

(1) Seja Q o ponto em r tal que $\overleftrightarrow{PQ}$ e r sejam perpendiculares.
(2) Seja s a reta que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$. Então s é paralela a r.
(3) Seja t uma reta que passa por P e é diferente de s. Queremos provar que t e r se interceptam.
(4) Seja R um ponto que está em t e está no mesmo lado de s que r.
(5) Seja R' um ponto do lado oposto ao de R relativamente à reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tal que $\angle QPR \simeq \angle QPR'$.
(6) O ponto Q está no interior do ângulo $\angle RPR'$, logo a reta r, que passa por Q, intesecta um dos lados desse ângulo, $\overrightarrow{PR}$ ou $\overrightarrow{PR'}$.
(7) Se a reta r intersecta $\overrightarrow{PR}$, está provado o que queríamos, pois P e R são pontos de t.

(8) Suponha que r intersecta $\overrightarrow{PR'}$ e chame sua interseção de A. Tome B pertencente a $\overrightarrow{PR}$ tal que $PA \simeq PB$.
(9) Pelo criério LAL de congruência de triângulos, $\Delta PQA \simeq \Delta PQB$. Logo $\angle PQA$ é congruente a $\angle PQB$.
(10) O ângulo $\angle PQA$ é reto, porque as retas r e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares.
(11) Logo $\angle PQB$ também é reto e portanto as semirretas $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{QB}$ são opostas.
(12) Como Q e A estão em r, B também está em r e é portanto o ponto de encontro das retas r e t.

Temos diversos desafios pela frente: justificar os passos corretos desta sucessão de argumentos, e detectar em que momento Legendre usou sem perceber um fato que só possa ser demonstrado supondo válido o Quinto Postulado, o que torna este um argumento inválido por ser circular. Vamos voltar a esta "demonstração errada" muitas vezes à medida em que formos desenvolvendo a teoria. Veremos, em particular, que a demonstração da existência de uma paralela a r passando por P está correta, de modo que apenas a unicidade da paralela é de fato um postulado indispensável para a geometria euclideana.

2. Axiomas de Incidência

São apenas três os termos ou frases adotados sem definição na geometria de incidência: (1) ponto, (2) reta, (3) um ponto está em uma reta. A partir desses termos *primitivos*, outros termos podem ser definidos: (1) uma reta r passa por P se P está em r, (2) os pontos $P, Q, R, \cdots$ são *colineares* se existe uma reta r na qual eles todos estão, (3) as retas $r, s, t, \cdots$ são *concorrentes* se existe um ponto P que está em todas elas, (4) duas retas são *paralelas* se não são concorrentes.

São três os axiomas da Geometria de Incidência:

(I1) Dados dois pontos P e Q, existe uma única reta r que passa por P e por Q.
(I2) Dada uma reta r, existem pelo menos dois pontos que estão em r.
(I3) Existem pelo menos três pontos não colineares.

A reta r determinada por P e Q será denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$ ou $\overleftrightarrow{QP}$.

Proposição 2.1. *O ponto R, distinto de P, está em $\overleftrightarrow{PQ}$ se e somente se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$.*

`Demonstração`: Se o ponto R está em $\overleftrightarrow{PQ}$, então a única reta determinada por P e R é $\overleftrightarrow{PQ}$, ou seja, $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{PQ}$.

Por definição, R é um ponto de $\overleftrightarrow{PR}$. Logo, se $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR}$, então R é um ponto de $\overleftrightarrow{PQ}$. $\square$

Proposição 2.2. *Dadas duas retas concorrentes r e s, existe apenas um ponto P que está nas duas.*

`Demonstração`: Se existissem dois pontos P e Q ambos pertencentes às retas r e s, pela unicidade postulada no Axioma I1, r e s seriam a mesma reta. Mas, por hipótese, elas são duas retas. $\square$

Proposição 2.3. *Existem (pelo menos) três retas não-concorrentes.*

`Demonstração`: O Axioma (I3) garante que existem três pontos não-colineares A, B e C. Afirmo que as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$ são distintas e não-colineares. De fato, são três retas distintas porque se duas delas fossem iguais, os três pontos seriam colineares (Proposição 2.1). E, pela Proposição 2.2, B é o único ponto que pertence simultaneamente a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{BC}$. Logo, se as três retas fossem concorrentes, B pertenceria a $\overleftrightarrow{AC}$, contradizendo o fato de que A, B e C não sãocolineares. $\square$

Proposição 2.4. *Dada uma reta r, existe pelo menos um ponto P que não está em r.*

`Demonstração`: O Axioma (I3) garante que existem três pontos não-colineares A, B e C. Pelo menos um dos três pontos não está em r, caso contrário, os três pontos seriam colineares. $\square$

Proposição 2.5. *Dado um ponto P, existe pelo menos uma reta que não passa por P.*

`Demonstração`: Se todas as retas passassem por P, não existiriam três retas não-concorrentes, contrariando a Proposição 2.3. □

Proposição 2.6. *Dado um ponto P, existem pelo menos duas retas que passam por P.*

Problema 2.1. Demonstre a Proposição 2.6.

3. Modelos

Dado um sistema axiomático, tal como a geometria de incidência, uma *interpretação* do sistema é a atribuição de significados aos termos adotados sem definição. Se os axiomas, com essa interpretação, são afirmações verdadeiras, essa interpretação é um *modelo*. Os axiomas da geometria de incidência são tão frouxos que permitem a existência de modelos completamente diferentes entre si, como veremos a seguir. Em todos os exemplos, usaremos teoria dos conjuntos. Em dois deles, usaremos os números reais.

As proposições que se demonstrem usando apenas os axiomas (I1), (I2) e (I3) e suas consequências são automaticamente válidas em qualquer modelo da Geometria de Incidência.

O Plano de Descartes. Os pontos são os elementos de $\mathbb{R}^2$. As retas são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$L_{a,b,c} \coloneqq \{(x,y);\ ax+by=c\},\quad a,b,c\in\mathbb{R},\ (a,b)\neq(0,0).$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. As Proposiões 3.1 e 3.2 expressam que, para esta interpretação, os axiomas (I1) e (I2) são satisfeitos. Os pontos $A=(0,0)$, $B=(1,0)$ e $C=(0,1)$ não são colineares pois $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta de equação $y=0$, que não passa pelo ponto C. Isto mostra que o *plano cartesiano* é um modelo da Geometria de Incidência (leia mais sobre isso em [5, Section 2.1] e [6, Chapter 2]).

Proposição 3.1. *Dados dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em $\mathbb{R}^2$, existe uma única reta r que passa por (x_1,y_1) e (x_2,y_2).*

`Demonstração`: Dados dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em $\mathbb{R}^2$, é imediato verificar que a reta de equação

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1) \iff (y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y=(y_2-y_1)x_1+(x_1-x_2)y_1 \tag{1}$$

passa pelos dois pontos dados. O par de coeficientes de x e de y, (y_2-y_1, x_1-x_2), é diferente de $(0,0)$ porque os pontos são distintos. Logo (1) é a equação de uma reta. Isto prova a existência.

Suponha que $ax+by=c$ é a equação de uma reta que passa pelos dois pontos dados, (x_1,y_1) e (x_2,y_2). Substituindo as coordenadas dos dois pontos na equação e subtraindo as duas equações assim obtidas, obtemos

$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0. \tag{2}$$

Se $x_1=x_2$ e $y_2\neq y_1$, segue de (2) que $b=0$ e, então, pois $(a,b)\neq(0,0)$, que $a\neq 0$. A equação $ax+by=c$ se reduz portanto a $ax=c$ ou, equivalentemente, $x=\frac{c}{a}$. Como essa reta passa por (x_1,y_1), segue que $\frac{c}{a}=x_1$ e portanto a equação pode ser reescrita como $x=x_1$, que é o que se obtém fazendo $x_1=x_2$ em (1) e cancelando (y_2-y_1), que é diferente de zero. O mesmo argumento, trocando as letras, também mostra que, se $x_1\neq x_2$ e $y_2=y_1$, então a equação (2) se reduz a $y=y_1$, que é o que se obtém em (1) fazendo $x_1=x_2$, tendo $y_1\neq y_2$. Resta considerar o caso em que x_2-x_1 e y_2-y_1 são não nulos (o caso em que ambos são nulos não ocorre porque os pontos são distintos). Segue de (2) que a e b são diferentes de zero e que $b=a\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}$. Substituindo esta igualdade em $ax+by=c$, vem

$$ax+a\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}y=c.$$

Como o ponto (x_1,y_1) satisfaz esta equação, vem

$$ax_1+a\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}y_1=c.$$

Igualando os dois primeiros membros das duas últimas equações e cancelando o a, vem
$$x + \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y = x_1 + \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} y_1,$$
que é equivalente ao segundo membro da equivalência em (1). Isto prova a unicidade. $\square$

Proposição 3.2. *Toda reta do Plano de Descartes possui pelo menos dois pontos.*

`Demonstração`: Seja r a reta de equação $ax + by = c$. Queremos provar que r possui pelo menos dois pontos. Separemos a demonstração em casos.

Caso 1. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{c}{b})$ e $(\frac{c}{a}, 0)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então $(\frac{c}{a}, 0)$ e $(\frac{c}{a}, 1)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 3. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{b}{a})$ e $(1, \frac{b}{a})$ são dois pontos distintos de r. $\square$

O Plano de Poincaré. Os pontos são os elementos do conjunto $P \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$. As retas são os subconjuntos de P da forma L_a, $a \in \mathbb{R}$, ou $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definidos por
$$L_a \coloneqq \{(x, y) \in P;\ x = a\}, \quad L_{a,r} \coloneqq \{(x, y) \in P;\ (x - a)^2 + y^2 = r^2\}.$$
Um ponto P está na reta r se $P \in r$.

Veriquemos que os axiomas da Geometria de Incidência são satisfeitos no Plano de Poincaré. Considere dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em P. Dois casos devem ser considerados: (1) $x_1 = x_2$, (2) $x_1 \neq x_2$. No primeiro caso, a reta L_c, $c = x_1 = x_2$, passa por (x_1, y_1) e por (x_2, y_2). Nenhuma reta L_b, com $b \neq c$ passa por (c, y_1) ou (c, y_2). Quaisquer dois pontos numa reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, possuem abscissas distintas. Logo L_c é a única reta passando por (c, x_1) e (c, x_2). No segundo caso, por terem abscissas distintas, os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) não podem estar em uma mesma reta L_a, $a \in \mathbb{R}$. E eles estão em uma reta $L_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se e somente se o sistema de equações
$$\begin{cases} (x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2 \\ (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r^2 \end{cases}$$
é satisfeito, o que acontece se e somente se
$$a = \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)} \quad \text{e} \quad r = \sqrt{\left[x_1 - \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2(x_2 - x_1)}\right]^2 + y_1^2}$$
Isto prova que existem únicos a e r tais que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) estão em $L_{a,r}$. Isto conclui a demonstração de que o Axioma (I1) é satisfeito nesta interpretação da Geometria de Incidência.

Para provar que o axioma (I2) é satisfeito para esta interpretação, de novo é preciso separar em dois casos. Dada uma reta do tipo L_a, $a \in \mathbb{R}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, (a, t), $t > 0$. Dada uma reta do tipo $L_{a,r}$, existem infinitos pontos na reta, a saber, $(t, \sqrt{r^2 - t^2})$, $-r < t - a < r$. Logo toda reta possui pelo menos dois pontos.

A única reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (0, 2)$ é L_0. Considere o ponto $C = (1, 1)$. Se A, B e C estivessem em uma mesma reta, pela unicidade de (I1) aplicado aos pontos A e B, essa reta seria a reta $\overleftrightarrow{AB} = L_0$ e portanto C pertenceria a L_0. Mas C não pertence a L_0, pois sua abscissa é diferente de 0. Logo A, B e C não são colineares. Logo axioma (I3) é satisfeito.

Geometrias finitas.

O modelo mais simples para a geometria de incidência consiste em declarar que os pontos são os elementos de um conjunto S com pelo menos três elementos, que as retas são os subconjuntos de dois elementos de S e que um ponto P está na reta r se $P \in r$. O caso em que S é finito já fornece um exemplo interessante. Chamaremos de "geometria de n pontos" o modelo associado a S no caso em que S possui n elementos.

Problema 3.1. Mostre que: (a) na geometria de três pontos não existem retas paralelas, (b) na geometria de quatro pontos, o Quinto Postulado de Euclides é satisfeito, (c) na geometria de cinco pontos, dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existem pelo menos duas paralelas a r passando por P.

`O Plano de Fano`. Os pontos são os elementos do conjunto $S := \{A, B, C, D, E, F, G\}$. As retas são os seguintes subconjuntos de três pontos de S:

$$\{A, B, D\}, \quad \{A, F, E\}, \quad \{A, C, D\}, \quad \{G, F, B\}, \quad \{G, E, D\}, \quad \{D, F, C\}, \quad \{C, B, E\}.$$

Um ponto P está na reta r se $P \in r$. Este é o Exemplo 6 de [2, Chapter 2], veja lá uma figura ilustrativa. Você pode ler sobre isso também no verbete "Fano plane" da Wikipedia em inglês ou no verbete "Plano de Fano" da Wikipedia em espanhol. O Plano de Fano é um modelo da geometria de incidência em que todas as retas se encontram, cada reta passa por três pontos e por cada ponto passam três retas.

`A geometria dual da geometria de três pontos`. As retas são os elementos do conjunto de três elementos $S := \{A, B, C\}$. Os pontos são os subconjuntos de dois elementos de S. Um ponto P está na reta r se $r \in P$.

A esfera de Riemann.

Os pontos são os elementos de uma esfera, as retas são os *círculos máximos*, ou seja, círculos contidos na esfera e com centro igual ao centro da esfera. Não existem retas paralelas. Mas esta interpretação não é um modelo da geometria de incidência, pois existem infinitas retas passando dois pontos antipodais dados. Uma maneira de transformar essa interpretação imperfeita em um modelo da geometria de incidência é chamar de pontos os elementos do quociente da esfera pela relação de equivalência que identifica antípodas. As retas são as imagens dos círculos máximos no quociente.

Planos projetivos.

Proposição 3.3. *Seja $\mathcal{P}$ um modelo da geometria de incidência em que é válido o quinto postulado de Euclides: dados uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma única reta s que passa por P e é paralela a r. Sejam r, s e t três retas em P tais que r é paralela a s e s é paralela a t. Então r é paralela a t.*

`Demonstração`: Suponha que r não é paralela a t e seja P o ponto que está em r e em t. Então r e t são duas paralelas a s passando por P, o que contradiz o Quinto Postulado. $\square$

Seja $\mathcal{P}$ um modelo da geometria de incidência em que é válido o quinto postulado de Euclides, sejam r e s retas em $\mathcal{P}$ (não-necessariamente distintas). Definimos: $r \equiv s$ se e somente se $r = s$ ou r é paralela a s. Segue da Proposição 3.3 que $\equiv$ é uma relação de equivalência. Como é de costume, para cada reta r de $\mathcal{P}$, denotamos

$$[r] \;=\; \{s;\, s \text{ é reta de } \mathcal{P} \text{ e } s \equiv r\}$$

Seja $\mathcal{P}^*$ a união disjunta

$$\mathcal{P}^* \;:=\; \{P;\, P \text{ é ponto de } \mathcal{P}\} \,\cup\, \{[r];\, r \text{ é reta de } \mathcal{P}\}$$

O *plano projetivo* definido por $\mathcal{P}$ é o seguinte modelo da geometria de incidência. Os pontos são os elementos de $\mathcal{P}^*$. Para cada reta r de $\mathcal{P}$, o subconjunto de $\mathcal{P}^*$ da forma $\{P;\, P \text{ está em } r\} \,\cup\, \{[r]\}$ é uma reta. Além destas, que podem ser imaginadas como sendo uma reta de $\mathcal{P}$ acrescida de um *ponto no infinito*, também declaramos que o conjunto $\{[r];\, r \text{ é reta de } \mathcal{P}\}$ é uma reta desse novo modelo. Duas retas sempre se intesectam neste modelo. Dizemos que $\mathcal{P}^*$ é o completamento projetivo de $\mathcal{P}$. Pedindo uma licença poética, diremos que duas retas paralelas de $\mathcal{P}$ agora se encontram no infinito.

O Plano de Fano, acima definido, é o completamento projetivo do modelo mais simples de geometria de incidência que satisfaz o Quinto Postulado, a geometria de quatro pontos descrita acima. Para uma interpretação geométrica do completamento projetivo do Plano de Euclides (ou de Descartes), veja [2, Exemplo 2.7, Figura 2.8].

4. Axiomas de Ordenamento

Nesta seção, acrescentamos à formulação axiomática da Geometria iniciada na Seção 2 o termo primitivo "estar entre", enunciamos os axiomas [2] satisfeitos por esse novo termo primitivo e exploramos algumas de suas consequências.

A expressão $A * B * C$ denota a afirmação "B está entre A e C". São os seguintes os três primeiros axiomas satisfeitos por essa relação:

(B1) Se $A * B * C$, então (i) A, B e C são três pontos colineares e (ii) $C * B * A$.
(B2) Dados dois pontos B e D, existem pontos A, C e E tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.
(B3) Dados três pontos colineares, um e apenas um deles está entre os outros dois.

Dados dois pontos A e B, denotamos por AB o segmento com extremidades A e B e por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A que passa por B (veja as Definições 1.1 e 1.3). Podemos escrever

$$AB := \{A, B\} \cup \{P;\ A * P * B\} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AB} := AB \cup \{P;\ A * B * P\} \tag{3}$$

Note que AB e $\overrightarrow{AB}$ são subconjuntos do conjunto [3] de todos os pontos que estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$,

$$\{\overleftrightarrow{AB}\} := \{P;\ P \text{ é um ponto que está em } \overleftrightarrow{AB}\}.$$

Proposição 4.1. *Dados dois pontos A e B, temos $AB = BA$.*

`Demonstração`: Os pontos extremos dos dois segmentos são os mesmos, logo basta provar que, dado um ponto P, $A * P * B \iff B * P * A$. Mas isto é consequência imediata do item (ii) do axioma (B1). □

Proposição 4.2. *Sejam dados três pontos colineares Q, A e B. Então $Q * A * B$ se e somente se $Q \notin \overrightarrow{AB}$.*

`Demonstração`: Segue de (3) que Q pertence a $\overrightarrow{AB}$ se e somente se uma das seguintes afirmações são verdadeiras: (1) $Q = A$, (2) $Q = B$, (3) $A * Q * B$, ou (4) $A * B * Q$.

Se $Q * A * B$, temos: (5) $Q \neq A$ e $Q \neq B$, pelo axioma (B1), e (6) $A * Q * B$ não ocorre, nem $A * B * Q$, pelo axioma (B3). Logo são falsas as afirmações (1), (2), (3) e (4) e, portanto, $Q \notin \overrightarrow{AB}$.

Se $Q \notin \overrightarrow{AB}$, então as afirmações (1), (2), (3) e (4) não são satisfeitas. Sendo falsas (3) e (4), segue do axioma (B3) e da colinearidade dos três pontos que $Q * A * B$. □

Proposição 4.3. *Dados dois pontos A e B, temos $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.*

`Demonstração`: Segue de (3) que $AB \subset \overrightarrow{AB}$. Segue de (3) e da Proposição 4.1 que $AB = BA \subset \overrightarrow{BA}$. Logo $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

Suponha que $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Queremos provar que $Q \in AB$. Vamos dividir em casos. Se $Q = A$ ou $Q = B$, então segue da definição de segmento que $Q \in AB$. Se Q é diferente de A e diferente de B, então, como todos os pontos das duas semirretas são pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, os três pontos A, B e Q são colineares, e podemos portanto invocar o axioma (B3) para concluir que uma e apenas uma das seguintes alternativas ocorre:

(i) $Q * A * B$,

[2]David Hilbert [4] chamou de *Axiome der Anordnung* os axiomas satisfeitos pela noção de "estar entre". Em inglês, em particular nas referências [2, 5, 6] nas quais se baseiam estas notas, usa-se o substantivo abstrato "betweenness" para se referir a essa noção.

[3]Na abordagem de [2], que adotamos nestas notas de aula, uma reta é apenas um termo primitivo, que não se define. Com uma única exceção, nos modelos discutidos na Seção 2 uma reta é interpretada como sendo um conjunto de pontos e o termo primitivo "estar em" é interpretado como o "pertence" da teoria dos conjuntos. Mas há modelos da geometria de incidência em que retas não são subconjuntos de pontos e o termo primitivo "estar em" não é interpretado como o "pertence" da teoria dos conjuntos.

(ii) $A * Q * B$,
(iii) $A * B * Q$.

Se ocorrer (i), segue da Proposição 4.2 que $Q \notin \overrightarrow{AB}$. Se ocorrer (iii), então $Q * B * A$, pelo axioma (B1), logo $Q \notin \overrightarrow{BA}$, pela Proposição 4.2. Logo, se valer $Q \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, então não vale (i), nem vale (iii). Logo vale (ii), o que implica que $Q \in AB$. □

Problema 4.1. Dados dois pontos A e B, mostre que $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P;\ P \text{ está em } \overleftrightarrow{AB}\}$.

Definição 4.1. Seja r uma reta e AB um segmento. Dizemos que r e AB se interceptam se algum ponto de AB está na reta r.

Definição 4.2. Sejam r uma reta e A e B pontos que não estão em r. Dizemos que (i) os pontos A e B estão do mesmo lado de r se $A = B$ ou se AB e r não se interceptam, e (ii) os pontos A e B estão em lados opostos de r se AB e r se interceptam.

Note que nós não definimos o que é um lado de uma reta, mas apenas o significado das frases "A e B estão do mesmo lado de r" e "A e B estão em lados opostos de r". Note também que dados dois pontos A e B que não estão numa reta r, uma e apenas uma das duas possibilidades ocorre: ou A e B estão do mesmo lado de r, ou A e B estão em lados opostos de r.

Estamos prontos para enunciar o quarto axioma de ordenamento:

(B4) Seja r uma reta e sejam A, B e C três pontos que não estão em r. (i) Se os pontos A e B estão do mesmo lado da reta r, e os pontos B e C estão do mesmo lado da reta r, então os pontos A e C estão do mesmo lado da reta r. (ii) Se os pontos A e B estão em lados opostos da reta r, e os pontos B e C estão em lados opostos da reta r, então os pontos A e C estão do mesmo lado da reta r.

Dada uma afirmação X, denotamos por $\neg X$ a negação de X, ou seja, a afirmação "X é falsa". Na demonstração da Proposição 4.4 vamos usar a seguinte regra de lógica: provar que as afirmações X e Y implicam a afirmação Z é equivalente a provar que $\neg Z$ e Y implicam $\neg X$.

Proposição 4.4. *Seja r uma reta e sejam A, B e C pontos que não estão em r. Se os pontos A e B estão em lados opostos da reta r, e os pontos B e C estão do mesmo lado da reta r, então os pontos A e C estão em lados opostos da reta r.*

`Demonstração`: Se A e C estivessem do mesmo lado de r, usando a hipótese que B e C estão do mesmo lado de r e invocando o axioma (B4)-i, concluiríamos que A e B do mesmo lado de r, o que é falso, por hipótese. Logo A e C não estão do mesmo lado de r, ou seja, estão em lados opostos de r. □

Separação do plano.

Definição 4.3. Dada uma reta r e um ponto A que não está em r, o *semiplano* limitado por r que contém A é o conjunto de pontos $H_A \coloneqq \{C;\ C \text{ não está em } r \text{ e } A \text{ e } B \text{ estão do mesmo lado de } r\}$. Um *lado* de r é algum semiplano limitado por r que contenha um ponto que não está em r.

Proposição 4.5. *Sejam r uma reta e A e B dois pontos que não estão em r. Se $B \in H_A$, então $H_A = H_B$.*

`Demonstração`: Por hipótese, A e B estão do mesmo lado de r. Logo, pelo Axioma (B4)-i, C e A estão do mesmo lado de r se e somente se C e B estão do mesmo lado de r. Provamos que $C \in H_A$ se e somente se $C \in H_A$. □

Proposição 4.6. *Toda reta limita exatamente dois semiplanos, e eles não possuem ponto em comum.*

`Demonstração`:

(1) Existe um ponto A que não está em r (Proposição 2.4).
(2) Existe um ponto O em r (Axioma (I2)).
(3) Existe um ponto B tal que $B * O * A$ (Axioma (B2)).
(4) A e B estão em lados opostos de r; logo r tem pelo menos dois lados.
(5) Seja C um ponto que não está em r. Se $C \notin H_B$, então C e B estão em lados opostos de r. Além disso, A e B estão em lados opostos de r, pelo item (4). Logo A e C estão do mesmo lado de r (Axioma B4-ii). Logo $C \in H_A$. Isto prova que o conjunto dos pontos que não estão em r é igual à união $H_A \cup H_B$.
(6) Seja C um ponto que não está em r. Se $C \in H_B$, então C e B estão do mesmo lado de r. Além disso A e B estão em lados opostos de r, pelo item (4). Segue da Proposição 4.4 que A e C estão em lados opostos de r. Logo $C \notin H_A$. Isto prova que a interseção $H_A \cap H_B$ é vazia.

Provamos que o conjunto dos pontos que não estão em r é a união disjunta de dois lados de r, H_A e H_B. Se H_C é um lado de r, então: ou $C \in H_A$ (e, portanto, $H_C = H_A$, pela Proposição 4.5) ou $C \in H_B$ (e, portanto, $H_C = H_B$). Logo H_A e H_B são os dois únicos lados de r. $\square$

Em seguida vamos usar que cada reta divide o plano em dois semiplanos para compreender como se pode ordenar mais de três pontos na reta.

Ordenamento de quatro pontos.

Proposição 4.7. *Se $A * B * C$ e $A * C * D$, então vale $B * C * D$ e $A * B * D$.*

`Demonstração`: Segue das hipóteses e do Axioma (B1) que A, B e C são três pontos distintos e que também A, C e D são três pontos distintos, ou seja, temos que

$$A \neq B, \quad A \neq C, \quad A \neq D, \quad B \neq C \quad \text{e} \quad C \neq D.$$

Também vale que $B \neq D$ pois, se B fosse igual a D, teríamos $A * B * C$ e $A * C * B$, o que violaria o Axioma (B3). Logo os pontos dados são quatro pontos distintos. Seja r a reta determinada por A e C, $r = \overleftrightarrow{AC}$. Segue do Axioma (B1) que B e D estão em r, ou seja, os quatro pontos são colineares.

Pela Proposição 2.4, existe um ponto E que não está em r. Denotemos por s a reta determinada por E e C, $s = \overleftrightarrow{EC}$. Pela Proposição 2.2, C é o único ponto que está simultaneamente em r e em s.

Segue da hipótese $A * C * D$ que A e D estão em lados opostos de s. Provemos agora que A e B estão do mesmo lado de s: se A e B estivessem em lados opostos de s, existiria um ponto X em s tal que $A * X * B$, X estaria em r pois é um ponto do segmento AB e A e B estão em r, logo X seria igual a C, mas então teríamos $A * C * B$ e $A * B * C$, o que violaria o Axioma (B3).

Vimos portanto que A e D estão em lados opostos de s e A e B estão do mesmo lado de s. Segue da Proposição 4.4 que B e D estão em lados opostos de s. Logo existe Y em s tal que $B * Y * D$. Mas $B * Y * D$ implica que Y está na reta r (Axioma (B1)). Logo Y é o único ponto de interseção de r e s, $Y = C$. Logo $B * C * D$.

A prova de que vale $A * B * D$ é análoga e será apenas esboçada. Sejam r e E como na primeira parte demonstração. Façamos $t := \overleftrightarrow{EB}$. Então A e C estão em lados opostos de t e C e D estão do mesmo lado de t. Logo A e D estão em lados opostos de t. O ponto de interseção do segmento AD com a reta t tem de ser igual a B, pois ele é a interseção das retas r e t. Logo $A * B * D$. $\square$

O argumento que usamos duas vezes na demonstração da Proposição 4.7 pode ser usado mais duas vezes para demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 4.8. *Se $A * B * C$ e $B * C * D$, então vale $A * B * D$ e $A * C * D$.*

`Demonstração`: Seja r a reta que passa pelo quatro pontos dados, seja E um ponto que não está em r, seja s a reta que passa por E e C, seja t a reta que passa por E e B. Então B e D estão em lados opostos de s, A

e B estão do mesmo lado de s, logo A e D estão em lados opostos de s e portanto $A * C * D$. Além disso, A e C estão em lados opostos de t, C e D estão do mesmo lado de t, logo A e D estão em lados opostos de t e portanto $A * B * D$. □.

Definição 4.4. *Dizemos que $A * B * C * D$ se valem as quatro seguintes afirmações: $A * B * C$, $A * B * D$, $A * C * D$ e $B * C * D$.*

Os enunciados das Proposições 4.7 e 4.8 podem ser resumidos esquematicamente como:

$$(A * B * C \ \wedge \ A * C * D) \ \vee \ (A * B * C \ \wedge \ B * C * D) \implies A * B * C * D \tag{4}$$

(o símbolos $\wedge$ e $\vee$ denotam “e” e “ou”, respectivamente).

Problema 4.2. Mostre que as duas condições $A * B * D$ e $A * C * D$ podem ser satisfeitas sem que valha $A * B * C * D$.

Problema 4.3. Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Separação da reta.

Combinando as Proposições 4.2 e 4.7, obteremos agora (compare com o Problema 4.1):

Proposição 4.9. *Suponha que $C * A * B$ e seja r a reta que passa por A, B e C. Então temos*

$$\{P;\ P \textit{ está em } r\} = \overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}.$$

`Demonstração`: Sabemos que todos os pontos de $\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{AB}$ estão em r. Queremos provar que, se P está em r, vale a implicação

$$P \notin \overrightarrow{AB} \implies P \in \overrightarrow{AC}, \tag{5}$$

Como $P \notin \overrightarrow{AB}$, P é diferente de A e de B. Sem perda de generalidade, podemos também supor que $P \neq C$, pois $C \in \overrightarrow{AC}$ pela definição de semirreta. Neste caso, supondo $P \neq C$, segue da Proposição 4.2 que (5) é equivalente a:

$$P * A * B \implies \neg(C * A * P). \tag{6}$$

Para provar (6), vamos supor que vale $C * A * P$ e usar as hipóteses $C * A * B$ e $P * A * B$ para chegar a uma contradição.

Os três pontos P, C e B são colineares. Segue do Axioma (B3) que uma das três afirmações seguintes é satisfeita: (i) $P * C * B$, (ii) $C * P * B$ e (iii) $C * B * P$. Se valer (i), $P * C * B$ e $C * A * B$ implicam, pela Proposição 4.7, que vale $P * C * A$, contradizendo $C * A * P$ (de novo o Axioma (B3)). Se valer (ii), $C * P * B$ e $P * A * B$ implicam que vale $C * P * A$, contradizendo $C * A * P$. Se valer (iii), $C * B * P$ e $B * A * P$ implicam que vale $C * B * A$, contradizendo $C * A * B$. □

De acordo com a Definição 1.4, as duas semirretas distintas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são *opostas* se $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. Usando o Problema 4.3, podemos obter uma definição equivalente mais conveniente.

Proposição 4.10. *As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se e somente se $B * A * C$.*

`Demonstração`: Suponha que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas. Sendo distintas, segue do Problema 4.3 que $C \notin \overrightarrow{AB}$ e, em particular, que os pontos A, B e C são distintos. Como $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$, temos que A, B e C são colineares. Segue de $C \notin \overrightarrow{AB}$ e da Proposição 4.2 que $C * A * B$.

Reciprocamente, suponha que $C*A*B$. Sendo colineares os três pontos, segue do Axioma (I1) que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são distintas porque $C \notin \overrightarrow{AB}$, pelo Problema 4.3. □

A Proposição 4.9 nos diz portanto que a união de duas semirretas opostas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é igual ao conjunto de todos os pontos que estão na reta $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$.

Postulado de Pasch. Teorema da Barra Transversal.

O Teorema 4.11 foi adotado como um postulado, primeiramente por Pasch, depois por Hilbert. Aqui vamos demonstrá-lo usando a Proposição 4.4, que é uma consequência imediata do Axioma (B4).

Teorema 4.11. *Sejam A, B e C pontos não-colineares e seja r uma reta que não passa por nenhum dos três pontos. Se a reta r passa por algum ponto dos três segmentos determinados por A, B e C, ela cruza também um, e apenas um, dos outros dois.*

`Demonstração`: Suponha que r cruza AB e que não cruza BC. Então B e C estão do mesmo lado de r, enquanto que A e B estão em lados opostos de r. Segue da Proposição 4.4 que A e C estão em lados opostos de r, o que significa, por definição, que r passa por algum ponto do segmento AC, distinto de A e de C. □

Definição 4.5. *Sejam A, B e C três pontos não-colineares. O triângulo de vértices A, B e C, denotado por ΔABC, é a união dos segmentos AB, BC e AC, que são chamados de lados do triângulo.*

Proposição 4.12. *Suponha que a reta r intercepta o lado AB do triângulo ΔABC, $r \neq \overleftrightarrow{AB}$. Então r intercepta pelo menos um dos outros dois lados do triângulo. Só intercepta os outros dois lados se C estiver em r.*

`Demonstração`: No caso em que r não passa por A, B, nem C, esta proposição diz exatamente o que diz o Teorema 4.11. Nos casos em que r passa por um ou dois dos vértices, as afirmações que queremos demonstrar são consequências imediatas da definição de lado de um triângulo e do fato de que os vértices de um triângulo não são colineares. □

Recorde que estamos denotando (veja a Definição 1.5) por $\angle BAC$ o ângulo que consiste da união das duas semirretas não-opostas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Definimos agora o *interior* do ângulo $\angle BAC$ como sendo a interseção de dois dos semiplanos determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$:

Definição 4.6. *O interior do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto dos pontos P que satisfazem: (i) B e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ e (ii) C e P estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$.*

O Teorema 4.14 abaixo é conhecido como o Teorema da Barra Transversal. Em sua demonstração usaremos um argumento que já foi usado na demonstração da Proposição 4.7 e que aqui enunciamos como o seguinte lema.

Lema 4.13. *Sejam r uma reta, P um ponto em r e Q um ponto fora de r. Seja Z um ponto distinto de P na semirreta $\overrightarrow{PQ}$. Então Z e Q estão do mesmo lado de r.*

`Demonstração`: Se Z e Q estivessem em lados opostos de r, existiria W em r tal que $Z * W * Q$. Esse ponto W teria de ser distinto de P pois, se valesse $Z * P * Q$, não valeria $Z \in \overrightarrow{PQ}$ (pela Proposição 4.2). Daí, as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e r seriam iguais, contrariando a hipótese que Q não está em r. □

A demonstração seguinte é uma versão detalhada de uma que encontrei na página de Bruce Conrad, professor emérito da Universidade de Temple, Filadélfia. Vale a pena olhar o original, especialmente por causa da figura: https://math.temple.edu/∼conrad/crossbar.

Teorema 4.14. *Seja X um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Então a semirreta $\overrightarrow{AX}$ passa por algum ponto do segmento BC (claramente distinto de B e de C).*

`Demonstração`: Pelo Axioma (B2), existe um ponto D tal que $D * A * B$. A reta $\overleftrightarrow{AX}$ cruza o segmento BD em A. Os pontos B, C e D não são colineares, pois D está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e C não está. Segue então do

Teorema 4.11 aplicado aos pontos B, C e D que a reta $\overleftrightarrow{AX}$ cruza ou o segmento BC ou o segmento CD. Seja Y um ponto tal que $Y * A * X$. Segue da Proposição 4.9 que todo ponto da reta $\overleftrightarrow{AX}$ pertence a $\overrightarrow{AX}$ ou a $\overrightarrow{AY}$. Para provar que $\overrightarrow{AX}$ cruza BC, basta provar que $\overrightarrow{AY}$ não cruza BC nem DC, e $\overrightarrow{AX}$ não cruza DC.

O segmento XY e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ se encontram em A, logo X e Y estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Por hipótese, X e C estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Logo, Y e C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Pelo Lema 4.13 e pelo Axioma (B4), se Z_1 e Z_2 são tais que $D * Z_1 * C$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AY}$, então Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, em particular $Z_1 \neq Z_2$, e portanto $\overrightarrow{AY}$ não cruza DC.

O segmento XY e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ se encontram em A, logo X e Y estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Por hipótese, X e B estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Logo, Y e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$. Pelo Lema 4.13 e pelo Axioma (B4), se Z_1 e Z_2 são tais que $B * Z_1 * C$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AY}$, então Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, em particular $Z_1 \neq Z_2$, e portanto $\overrightarrow{AY}$ não cruza BC.

O ponto D e o ponto B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$ (pois DB e $\overleftrightarrow{AC}$ se encontram em A). O ponto B e o ponto X estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$, por hipótese. Pelo Lema 4.13 e pelo Axioma (B4), se Z_1 e Z_2 são tais que $D * Z_1 * C$ e $Z_2 \in \overrightarrow{AX}$, então Z_1 e Z_2 estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$, em particular $Z_1 \neq Z_2$, e portanto $\overrightarrow{AX}$ não cruza DC. □

Problema 4.4. Seja D um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$ se e somente se $B * D * C$.

Problema 4.5. Seja D um ponto do interior do ângulo $\angle BAC$. Mostre que todos os pontos da semirreta $\overrightarrow{AD}$ distintos de A também estão no interior de $\angle BAC$.

Problema 4.6. Considere as semirretas opostas $\overrightarrow{OK}$ e $\overrightarrow{OJ}$ e os pontos H e L fora da reta $\overleftrightarrow{KJ}$. Mostre que, se H está no interior de $\angle KOL$, então L está no interior de $\angle HOJ$.

5. Axiomas de Congruência

A rigor, o termo primitivo "congruência" (ou "congruente") são na verdade dois termos primitivos, congruência de segmentos e congruência de ângulos. Aceitamos sem definição as frases "o segmento PQ é congruente ao segmento RS" e "o ângulo $\angle BAC$ é congruente ao ângulo $\angle EDF$", o que será denotado por $PQ \cong RS$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, e listamos os axiomas que governam o uso dessas expressões.

A ideia intuitiva de congruência, se a gente pensa em geometria como uma descrição do espaço físico a nossa volta, é que duas figuras são congruentes se podem ser levadas de uma até a outra sem deformação, de modo que, quando superpostas, elas coincidam exatamente. Nosso objetivo é tratar congruência formalmente, sem que nossos argumentos dependam dessa ideia intuitiva, que entretanto pode ser usada, cautelosamente, apenas como uma bússola para apontar o caminho.

- **(C1)** Sejam A e B dois pontos. Dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'X}$, existe um único ponto $B' \in \overrightarrow{A'X}$, $B' \neq A'$, tal que $AB \cong A'B'$.
- **(C2)** Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$. Além disso, todo segmento é congruente a si próprio.
- **(C3)** Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.
- **(C4)** Considere o ângulo $\angle BAC$. Dados uma semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ e um semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ com $C' \in H$ tal que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.
- **(C5)** Se $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle BAC \cong \angle HGI$, então $\angle EDF \cong \angle HGI$. Além disso, todo ângulo é congruente a si próprio.

Pelo Problema 4.3, se C'' for qualquer ponto distinto de A' da semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, então $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C''}$ e portanto são iguais os ângulos $\angle B'A'C'$ e $\angle B'A'C''$. Por isso falamos em unicidade da semirreta $\overrightarrow{A'C'}$, e não do ponto C' no enunciado do Axioma (C3).

A *régua euclideana* é um instrumento ideal que executa o que o Primeiro Postulado de Euclides afirma que é possível fazer: dados dois pontos, traça a única reta que passa por eles. O *compasso euclideano* executa o que o Terceiro Postulado prescreve: dados dois pontos O e A, traça o círculo com centro em O e raio OA. O compasso euclidiano, entretanto, só funciona quando suas duas pontas estão no papel. Ao ser retirado do lugar em que o círculo foi traçado, ele fica frouxo e não preserva o registro do "comprimento" do segmento OA. Para transportar distâncias, os arquitetos usam como ferramenta o *compasso balaústre*, um compasso munido de um parafuso na articulação que permite prender os dois braços do compasso em uma abertura fixa. Os Axiomas (C1) e (C4) poderiam ser interpretados como construções com compasso balaústre e régua. O interessante é que a construção dos pontos cujas existências são garantidas por esses dois axiomas pode ser feita também, em múltiplos passos, apenas com a régua e o compasso euclideanos. Para fazer construções com régua e compasso (euclideano ou balaústre), é preciso assumir a existência de pontos de interseção de retas com círculos, assunto que será discutido na próxima seção.

Enunciamos agora duas consequências imediatas dos Axiomas (C2) e (C5).

Proposição 5.1. *Se $AB \cong CD$, então $CD \cong AB$.*

`Demonstração`: Por hipótese, $AB \cong CD$. Pela segunda parte de (C2), $AB \cong AB$. Pela primeira parte de (C2), $CD \cong AB$. □

Proposição 5.2. *Se $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\angle EDF \cong \angle BAC$.*

`Demonstração`: Por hipótese, $\angle BAC \cong \angle EDF$. Pela segunda parte de (C5), $\angle BAC \cong \angle BAC$. Pela primeira parte de (C5), $\angle EDF \cong \angle BAC$. □

O conteúdo dos Axiomas (C2) e (C5) e das Proposições 5.1 e 5.2 pode ser resumido na sentença "congruência de segmentos e congruência de ângulos são relações de equivalência".

Se $A * B * C$, diz-se que AC é a *adição* dos segmentos AB e BC. Os Axiomas (C1) e (C3) nos dizem que se pode definir a adição de duas classes de equivalência de segmentos. É possível se definir também a multiplicação de classes de equivalência de segmentos e demonstrar que essas operações são comutativas, associativas, distributivas, formando o que se chama de *aritmética dos segmentos* [3, Chapter 4].

Para enunciar o sexto axioma de congruência, precisamos antes definir a noção de congruência de triângulos.

Definição 5.1. *Diremos que os triângulos ΔABC e ΔDEF são congruentes, o que denotaremos por $\Delta ABC \cong \Delta CDE$, se os lados correspondentes são dois-a-dois congruentes e se os ângulos correspondentes são dois-a-dois congruentes, isto é, se*

$$AB \cong DE, \quad BC \cong EF, \quad CA \cong FD, \quad \angle ABC \cong \angle DEF, \quad \angle BCA \cong \angle EFD \quad e \quad \angle CAB \cong \angle FDE.$$

É importante observar que a relação congruência de triângulos não se define para pares de triângulos, mas sim para pares de triângulos com vértices ordenados. Se, por exemplo, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ e BC e AC não forem congruentes, ΔBAC não será congruente a ΔDEF. Embora, como conjuntos de pontos, os triângulos ΔABC e ΔBAC sejam idênticos, seus vértices estão ordenados de maneiras diferentes.

Problema 5.1. Mostre que congruência de triângulos é uma relação de equivalência. Isto é, mostre que

(1) $\Delta ABC \cong \Delta ABC$,
(2) $\Delta ABC \cong \Delta DEF \implies \Delta DEF \cong \Delta ABC$,
(3) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ e $\Delta DEF \cong \Delta GHI \implies \Delta ABC \cong \Delta GHI$

Caso LAL de congruência.

O Axioma (C6), enunciado logo a seguir, é conhecido com o *caso LAL de congruência de triângulos*, fato que é dado como uma proposição nos Elementos (Proposição 4 do Livro I). Mas, em sua demonstração, Euclides usa o conceito de área, sem definir ou postular do que se trata. É possível definir área de certas regiões do plano e demonstrar suas propriedades (veja [6, Chapter 14], por exemplo) mas, para fazer isso, em algum momento será preciso usar (C6). Hoje se compreende que o caso LAL é na verdade um postulado, e não uma proposição, como julgava Euclides.

(C6) Se $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Os axiomas (C4) e (C1) nos permitem transportar ângulos e segmentos, respectivamente. Decorre agora do critério LAL que triângulos inteiros podem ser "transportados". Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.3. *Dados triângulo ΔABC, segmento $DE \cong AB$ e semiplano H delimitado pela reta $\overleftrightarrow{DE}$, existe um único ponto F em H tal que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.*

`Demonstração`: O axioma (C4) nos fornece um ponto X em H tal que $\overrightarrow{DX}$ é a única semirreta tal que $\angle CAB \cong \angle XDE$. Seja F o ponto, cujas existência e unicidade são garantidas pelo Axioma (C1), tal que $AC \cong DF$. Segue do Problema 4.3 que $\angle FDE = \angle XDE$, logo $\angle EDF \cong \angle CAB$. Por hipótese, $AB \cong DE$. Segue do Axioma (C6) que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. □

Em [4], em vez de assumir o Axioma (C6), Hilbert assume apenas o seguinte axioma, aparentemente mais fraco:

(C6h) Se $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $\angle ACB \cong \angle DFE$.

Problema 5.2. Mostre que (C6h) implica (C6). Sugestão: (i) mudando de notação, obtenha mais uma congruência de ângulos, (ii) suponha que a terceira congruência de lados não seja satisfeita, transporte o segmento CB para a semirreta $\overrightarrow{FE}$ e note que a unicidade de (C4) terá sido violada.

O Teorema do Triângulo Isósceles.

A proposição seguinte afirma que se dois lados de um triângulo são congruentes, então os dois ângulos adjacentes ao terceiro lado são congruentes. Triângulos que têm essa propriedade são chamados de isósceles e este resultado é conhecido como o "teorema do triângulo isósceles".

Proposição 5.4. *Se A, B e C são três pontos não-colineares e $AB \cong AC$, então $\angle ABC \cong \angle ACB$.*

`Demonstração`: Considere os triângulos com vértices ordenados ΔABC e ΔACB. Por hipótese, temos $AB \cong AC$. Segue da Proposição 5.2 que $AC \cong AB$. Segue da definição de ângulo que $\angle BAC = \angle CAB$, daí, pela segunda parte do Axioma (C5), temos $\angle BAC \cong \angle CAB$. Segue do Axioma (C6) com $D = A$, $E = C$ e $F = B$ a congruência $\Delta ABC \cong \Delta ACB$. Em particular, $\angle ABC \cong \angle ACB$. □

Esta demonstração que acabamos de dar do Teorema do Triângulo Isósceles é devida a Papus, que viveu seis séculos depois de Euclides, ambos em Alexandria. A demonstração de Papus é muito mais curta do que a demonstração do mesmo teorema dada por Euclides na Proposição 5 do Livro I dos Elementos. O que permitiu a simplificação do argumento foi o uso do caso LAL de congruência de triângulos para um mesmo triângulo com os vértices ordenados de duas maneiras diferentes. Euclides só usava o LAL para dois triângulos diferentes. Papus deu um salto formal ao considerar como dois entes distintos o mesmo triângulo com os vértices ordenados de duas maneiras diferentes.

6. Consequências dos Axiomas de Congruência

Subtração de segmentos.

Provaremos na Proposição 6.3 uma afirmação análoga ao Axioma (C3) para subtração. Antes, dois lemas.

Lema 6.1. *Se $A * B * C$, então B é o único ponto de interseção das semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.*

`Demonstração`: Vamos provar primeiro que, se $Y \in \overrightarrow{BA}$ e $Y \neq B$, então $Y \notin \overrightarrow{BC}$, o que é equivalente a $Y * B * C$, pela Proposição 4.2. Segue de $Y \in \overrightarrow{BA}$ e $Y \neq B$ que: (i) $Y = A$, ou (ii) $Y * A * B$, ou (iii) $A * Y * B$. Se $Y = A$, $Y * B * C$, por hipótese. Se $Y * A * B$, segue da hipótese $A * B * C$ e da Proposição 4.8 que $Y * B * C$. Se $A * Y * B$, segue de $A * B * C$ e da Proposição 4.7 que $Y * B * C$.

A demonstração de que, se $Y \in \overrightarrow{BC}$ e $Y \neq B$, então $Y \notin \overrightarrow{BA}$, é idêntica, bastando escrever A no lugar de C e C no Lugar de A no parágrafo anterior. □

Lema 6.2. *Se $A * B * C$, a semirreta $\overrightarrow{BC}$ está contida na semirreta $\overrightarrow{AC}$.*

`Demonstração`: Se $Y \in \overrightarrow{BC}$ e $Y = C$, $Y \in \overrightarrow{AC}$ por definição de semirreta. Se $Y \in \overrightarrow{BC}$ e $Y = B$, $Y \in \overrightarrow{AC}$ porque, por hipótese, $A * B * C$. Se $Y \in \overrightarrow{BC}$ e Y é diferente de B e de C, podem ocorrer dois casos: (i) $B * Y * C$ ou (ii) $B * C * Y$. Valendo (i) e a hipótese $A * B * C$, segue da Proposição 4.7 que $A * Y * C$ e, portanto, $Y \in \overrightarrow{AC}$. Valendo (ii) e $A * B * C$, segue da Proposição 4.8 que $A * C * Y$ e, portanto, $Y \in \overrightarrow{AC}$. □

Proposição 6.3. *Se $A * B * C$, $D * E * F$, $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, então $BC \cong EF$.*

`Demonstração`: Invoquemos o Axioma (C1) para obter o único ponto $X \in \overrightarrow{EF}$, tal que $X \neq E$ e $EX \cong BC$. Como $X \in \overrightarrow{EF}$ e $X \neq E$, temos $X \notin \overrightarrow{ED}$ (pelo Lema 6.1) e, portanto, $D * E * X$ (pela Proposição 4.2). Temos, por hipótese, $AB \cong DE$ e, por construção, $BC \cong EX$. Segue do Axioma (C3) que $AC \cong DX$. Além disso, pelo Lema 6.2, $X \in \overrightarrow{DF}$. Logo X é o único ponto da semirreta $X \in \overrightarrow{DF}$ tal que $AC \cong DX$. Mas o ponto F também tem essa propriedade (por hipótese, $AC \cong DF$). Logo $X = F$. Logo $BC \cong EF$. □

Adição e subtração de ângulos.

Recorde que dois ângulos são suplementares se possuem um lado em comum e se os outros dois lados são semirretas opostas (veja a Definição 1.6). A proposição seguinte é o Teorema 13 de [4] e seu enunciado pode ser resumido na frase "os suplementares de ângulos congruentes são congruentes".

Proposição 6.4. *Sejam $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$ dois ângulos congruentes, sejam $\angle CBD$ e $\angle C'B'D'$ seus suplementares. Então vale $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$.*

`Demonstração`: Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$AB \cong A'B', \quad CB \cong C'B' \quad \text{e} \quad BD \cong B'D' \tag{7}$$

(de fato, se não fosse esse o caso, poderíamos invocar o Axioma (C1) para substituir os pontos A', B' e C' por novos pontos satisfazendo essa exigência). Segue de LAL (Axioma C6) a congruência $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Em particular, temos

$$AC \cong A'C' \quad \text{e} \quad \angle CAB \cong \angle C'A'B'. \tag{8}$$

Os pontos A, B e D satisfazem $A * B * D$ pois, como segue da definição de ângulos suplementares, $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BD}$ são semirretas opostas. Pela mesma razão, temos $A' * B' * D'$. Seguem do Problema 4.3 as igualdades de semirretas $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{D'A'}$, logo as igualdades de ângulos $\angle CAD = \angle CAB$ e $\angle C'A'D' = \angle C'A'B'$, o que, combinado às congruências de ângulos em (8) nos leva, pela reflexividade da congruência de ângulos do Axioma (C5), a

$$\angle CAD \cong \angle C'A'D'. \tag{9}$$

Segue (7), de $A * B * C$ e $A' * B' * C'$ e do Axioma (C3) que $AD \cong A'D'$. Disto, de (7), de (9) e do Axioma (C6), segue que $\Delta CAD \cong \Delta C'A'D'$. Em particular, usando o mesmo argumento de igualdade de ângulos que nos levou de (8) a (9), obtemos

$$CD \cong C'D' \quad \text{e} \quad \angle BDC \cong \angle B'D'C'. \tag{10}$$

Segue de $BD \cong B'D'$, de (10) e do Axioma (C6) que $\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'$. Em particular, temos $\angle CBD \cong \angle C'B'D'$, que é o que queríamos demonstrar. $\square$

Diremos que dois ângulos são *opostos pelo vértice* se seus quatro lados formam duas retas. Mais precisamente, temos:

Definição 6.1. *Os ângulos $\angle BAC$ e $\angle DAE$ são opostos pelo vértice se $B * A * E$ e $C * A * D$.*

Problema 6.1. Usando a Proposição 6.4, mostre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Seguindo [4], obteremos o teorema de adição de ângulos, Teorema 6.6, como consequência da subtração de ângulos (proposição seguinte) e da congruência dos suplementares de ângulos congruentes (proposição precedente).

Proposição 6.5. *Seja H um ponto no interior do ângulo $\angle KOL$, seja H' um ponto no interior do ângulo $K'O'L'$. Se $\angle KOL \cong K'O'L'$ e $\angle HOL \cong \angle H'O'L'$, então $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$.*

`Demonstração`: Pelo Teorema 4.14 (o "teorema da barra transversal"), a semirreta $\overrightarrow{OH}$ intersecta o segmento KL. Chamemos de H_1 esse ponto de interseção. Pelo Problema 4.3, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH_1}$. Pelo Problema 4.5, H_1 pertence ao interior do ângulo $\angle KOL$. Pelo Problema 4.4, temos $K * H_1 * L$. Substituindo o H dado por H_1 e mudando o nome de H_1 para H, podemos portanto supor sem perda de generalidade que $K * H * L$. Também sem perda de generalidade, podemos supor ademais que

$$OK \cong O'K', \quad OH \cong O'H' \quad \text{e} \quad OL \cong O'L' \tag{11}$$

(de fato, se não fosse esse o caso, poderíamos invocar o Axioma (C1) para substituir os pontos K', H' e L' por novos pontos satisfazendo essa exigência).

Seguem do Axioma (C6) e das hipóteses que foram adicionadas, sem perda de generalidade, no primeiro parágrafo desta demonstração as congruências

$$\Delta KOL \cong \Delta K'O'L' \quad \text{e} \quad \Delta HOL \cong \Delta H'O'L'. \tag{12}$$

Em particular, temos

$$\angle K'L'O' \cong \angle KLO = \angle HLO \cong H'L'O'$$

(na igualdade do meio, usamos $K * H * L$ e o Problema 4.3). O Axioma (C4) nos diz que existe uma única semirreta $L'X$, com X e K' no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{O'L'}$, tal que $\angle KLO \cong \angle XL'O'$. Os pontos H' e K' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{O'L'}$ porque, por hipótese, H' está no interior do ângulo $\angle K'O'L'$. Logo, tanto H' quanto K' podem fazer o papel de X, logo $\overrightarrow{L'H'} = \overrightarrow{L'K'}$, e portanto L', H' e K' são colineares. Como H' está no interior de $\angle K'O'L'$, segue do Problema 4.5 que $L' * H' * K'$.

Segue agora da Proposição 6.3 ("subtração de segmentos") que KH e $K'H'$ são congruentes ($KH \cong K'H'$ e $KL \cong K'L'$ seguem de (12)). Por (11), OK e $O'K'$ são congruentes. Segue de $\Delta KOL \cong \Delta K'O'L'$ e de $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KL}$ e $\overrightarrow{K'H'} = \overrightarrow{K'L'}$ que os ângulos $\angle OKH$ e $\angle O'K'H'$ são congruentes. Logo, por (C6), temos $\Delta OHK \cong \Delta O'H'K'$, em particular $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$. $\square$

Teorema 6.6. *Seja H um ponto no interior do ângulo $\angle KOL$, seja H' um ponto no interior de $\angle K'O'L'$. Se $\angle KOH \cong \angle K'O'H'$ e $\angle HOL \cong \angle H'O'L'$, então $\angle KOL \cong \angle K'O'L'$.*

`Demonstração`: Use o Axioma (B2) para obter um ponto J tal que $K * O * J$ e um ponto J' tal que $K' * O' * J'$. Segue do Problema 4.6 que L está no interior de $\angle HOJ$ e L' está no interior de $\angle H'O'J'$. Segue da definição de ângulo suplementar (Definição 1.6) que $\angle HOJ$ é suplementar de $\angle KOH$ e que $\angle H'O'J$ é suplementar de $\angle K'O'H'$. Segue da hipótese $\angle KOH \cong K'O'H'$ e da Proposição 6.4 que $\angle JOH \cong \angle J'O'H'$. Aplicando a Proposição 6.5 com os ângulos $\angle JOH$ e $\angle J'O'H'$ no lugar de $\angle KOL$ e $\angle K'O'L'$, concluímos que $\angle JOL \cong \angle J'O'L'$. Usando novamente a Proposição 6.4, concluímos que $\angle KOL \cong \angle K'O'L'$. $\square$

Casos ALA e LLL de congruência.

O caso ângulo-lado-ângulo de congruência de triângulos (Proposição 6.7) é uma consequência razoavelmente simples do caso lado-ângulo-lado (Axioma C6) e dos demais axiomas de congruência de segmentos e de ângulos. Poderia ter sido apresentado antes de falarmos em subtração de segmentos e soma e subtração de ângulos.

O caso lado-lado-lado é mais complicado. Daremos nesta subseção a demonstração de Hilbert [4]. O Lema 6.9 é o Teorema 17 de [4], o Teorema 6.10 é o Teorema 18 de [4].

Proposição 6.7. *Sejam A, B e C três pontos não-colineares, sejam A', B' e C' três pontos não-colineares. Se $AB \cong A'B'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

`Demonstração`: Seja X o único ponto da semirreta $\overrightarrow{B'C'}$ tal que $BC \cong B'X$ (a existência e a unicidade de X decorrem do Axioma C1). Temos, por hipótese, $AB \cong A'B'$ e $\angle ABC \cong \angle A'B'X$ ($\angle A'B'X = \angle A'B'C'$ pelo Problema 4.3, porque $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'X}$) e, por construção, $BC \cong B'X$. Segue portanto do Axioma C6 que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'X$ e, em particular, que

$$\angle CAB \cong \angle XA'B'. \tag{13}$$

O Lema 4.13 aplicado à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ e ao ponto C' implica que os pontos C' e X estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$. A hipótese $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, (13) e a unicidade do Axioma (C4) implicam a igualdade de semirretas $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'X}$, o que implica, em particular, que X é o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{A'C'}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$, ou seja, $X = C'$ e, portanto, (13) é a afirmação que queríamos demonstrar. □

Lema 6.8. *Sejam Z_1 e Z_2 dois pontos situados em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{XY}$, seja P o ponto de interseção do segmento Z_1Z_2 com a reta $\overleftrightarrow{XY}$. Temos:*

(1) *Se $X * P * Y$, então Z_1 é um ponto do interior de $\angle XZ_2Y$ e Z_2 é um ponto do interior de $\angle XZ_1Y$.*
(2) *Se $P * X * Y$, então X pertence aos interiores dos ângulos $\angle YZ_1Z_2$ e $\angle YZ_2Z_1$.*
(3) *Se $X * Y * P$, então Y pertence aos interiores dos ângulos $\angle XZ_1Z_2$ e $\angle XZ_2Z_1$.*

`Demonstração`: O ponto P é o único ponto da reta $\overleftrightarrow{XY}$ que satisfaz $Z_1 * P * Z_2$. A existência de P, dados Z_1 e Z_2 como no enunciado, decorre da definição de dois pontos estarem em lados opostos de uma reta. A unicidade decorre da Proposição 2.2 aplicada às retas $r = \overleftrightarrow{XY}$ e $s = \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$.

Se $X * P * Y$, segue do Problema 4.4 que P está no interior dos ângulos $\angle XZ_2Y$ e $\angle XZ_1Y$. Segue de $Z_1 * P * Z_2$, pela definição de semirreta, que $Z_1 \in \overrightarrow{Z_2P}$ e $Z_2 \in \overrightarrow{Z_1P}$. Daí segue, pelo Problema 4.5, que Z_1 é um ponto do interior de $\angle XZ_2Y$ e Z_2 é um ponto do interior de $\angle XZ_1Y$.

Se $P * X * Y$, segue do Problema 4.5 que X está no interior dos ângulos $\angle PZ_1Y$ e $\angle PZ_2Y$. Segue de $Z_1 * P * Z_2$ que $\angle PZ_1Y = \angle PZ_1Z_2$ e $\angle PZ_2Y = \angle PZ_2Z_1$. Isto prova a segunda afirmação do enunciado. A terceira se prova da mesma maneira, trocando os papéis de X e Y. □

Lema 6.9. *Sejam Z_1 e Z_2 dois pontos situados em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{XY}$. Se $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$, então $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$ e, portanto, $\angle XYZ_1 \cong \angle XYZ_2$.*

`Demonstração`: Seja P o ponto de interseção do segmento Z_1Z_2 com a reta $\overleftrightarrow{XY}$. Segue do Axioma B3 que podemos dividir a demonstração em cinco casos:

$$\text{(i) } P = X, \text{ (ii) } P = Y, \text{ (iii) } X * P * Y, \text{ (iv) } P * X * Y, \text{ (v) } X * Y * P.$$

No caso (i), segue da hipótese $YZ_1 \cong YZ_2$ que o triângulo ΔYZ_1Z_2 é isósceles. Segue da Proposição 5.4 e de $Z_1 * X * Z_2$ (X=P) que

$$\angle XZ_1Y = \angle Z_2Z_1Y \cong \angle Z_1Z_2Y = \angle XZ_2Y.$$

Disto e das congruências $Z_1X \cong Z_2X$ (hipótese) e $XY \cong XY$ (Axioma C2), segue pelo Axioma C6 que os triângulos ΔXZ_1Y e ΔXZ_2Y são congruentes.

No caso (ii), argumento idêntico ao do caso (i), trocando os papéis de X e Y, mostra que $\Delta XZ_1Y \cong \Delta XZ_2Y$.

Nos três casos restantes, nem X nem Y pertencem à reta $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$. Segue das hipóteses $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$ que os triângulos ΔXZ_1Z_2 e ΔYZ_1Z_2 são isósceles. Seguem então da Proposição 5.4 as congruências

$$\angle XZ_1Z_2 \cong \angle XZ_2Z_1 \quad \text{e} \quad \angle YZ_1Z_2 \cong \angle YZ_2Z_1. \tag{14}$$

No caso (iii), segue do Lema 6.8-(1) que Z_2 está no interior de $\angle XZ_1Y$ e Z_1 está no interior de $\angle XZ_2Y$. Segue então de (14) e do Teorema 6.6 que

$$\angle XZ_1Y \cong \angle XZ_2Y. \tag{15}$$

No caso (iv), segue do Lema 6.8-(2) e da Proposição 6.5 que vale (15). No caso (v), segue do Lema 6.8-(3) e da Proposição 6.5 que vale (15). Assim, nos casos (iii), (iv) e (v), vale (15). Valem também, por hipótese, $XZ_1 \cong XZ_2$ e $YZ_1 \cong YZ_2$. Daí o Axioma C6 nos permite concluir que $\Delta XYZ_1 \cong \Delta XYZ_2$. □

`Observação`: No caso em que $P = Y$ no lema precedente, os ângulos $\angle Z_1YX$ e $\angle Z_2YX$, que provamos serem congruentes, são também suplementares um do outro, pois $Z_1 * Y * Z_2$. Logo, eles são ângulos retos (veja a Definição 1.7).

Teorema 6.10. *Sejam A, B e C três pontos não-colineares, sejam A', B' e C' três pontos não-colineares. Se $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ e $CA \cong C'A'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

`Demonstração`: Usando os axiomas de transporte de ângulos e segmentos (C4) e (C1), podemos obter os (únicos) pontos B_1 e B_2 tais que:

(1) B_1 e B' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{A'C'}$,
(2) B_2 e B' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{A'C'}$,
(3) $\angle B_1A'C' \cong \angle BAC$ e $\angle B_2A'C' \cong \angle BAC$,
(4) $A'B_1 \cong AB$ e $A'B_2 \cong AB$.

Segue dos itens (3) e (4), pelo caso LAL de congruência de triângulos, que

$$\Delta A'B_1C' \cong \Delta ABC \quad \text{e} \quad \Delta A'B_2C' \cong \Delta ABC. \tag{16}$$

Queremos provar que $B_1 = B'$.

Vamos aplicar o Lema 6.9 colocando $X = C'$, $Y = A'$, $Z_1 = B'$ e $Z_2 = B_2$. Pelo item (2), B_2 e B' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{A'C'}$. Segue da segunda congruência em (16) que $BC \cong B_2C'$; por hipótese, temos $BC \cong B'C'$; daí segue pelo Axioma C2 que $B_2C' \cong B'C'$. Pelo item (4), temos $AB \cong A'B_2$; por hipótese, temos $AB \cong A'B'$, daé segue pelo Axioma C2 que $A'B' \cong A'B_2$. Podemos portanto invocar o Lema 6.9 para concluir que $\angle B_1A'C' \cong \angle C'A'B_2$. Disto e da segunda congruência do item (3), pelo Axioma C5, segue que

$$\angle B'A'C' \cong \angle B_1A'C'. \tag{17}$$

Do item (1), da primeira congruência do item (3) e de (17), pela unicidade do transporte de ângulos do Axioma C4, segue que as semirretas $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'B_1}$ são iguais. Da primeira congruência do item (4), temos $A'B_1 \cong AB$; por hipótese temos $AB \cong A'B'$; logo pela unicidade do transporte de segmentos do Axioma C1, segue que $B' = B_1$. □

7. Pons Asinorum

Apresentamos nesta seção a demonstração de Euclides do Teorema do Triângulo Isósceles (Proposição 5 do Livro I dos Elementos), em que são usadas o critério LAL de congruência de triângulos (Axioma C6), a subtração de segmentos e a congruência dos suplementares. A figura que acompanha a demonstração tem a aparência de uma ponte e em algum momento passou a ser conhecida, na Europa Latina, como “Pons Asinorum” (ponte dos asnos). O apelido não faz referência apenas à aparência da figura, mas tambbém à dificuldade de se compreender a prova de Euclides. A proposição, apresentada logo no início dos Elementos, era vista como um obstáculo para o leitor iniciante. O que me faz supor que “pons asinorum” significasse também “mata-burros”, um obstáculo feito com ripas ou caibros, comum em estradas da zona rural, que permite a passagem de veículos com rodas e seres humanos, mas não a passagem de quadrúpedes.

A esta altura, a leitora já deve estar se sentindo confiante para ultrapassar esse obstáculo.

Para escrever a demonstração de Euclides invocando apenas definições, axiomas, proposições e problemas destas Notas de Aula, convém provar primeiro o seguinte lema.

Lema 7.1. *Se temos $X * Y * Z$, $XY \cong X'Y'$ e $XZ \cong X'Z'$ e $Z' \in \overrightarrow{X'Y'}$, então vale $X' * Y' * Z'$.*

`Demonstração`: Seja Z'' o ponto, cuja existência é postulada pelo Axioma C1, pertencente à semirreta [4] oposta a $\overrightarrow{Y'X'}$ tal que $Y'Z'' \cong YZ$. Temos: $X * Y * Z$, $X' * Y' * Z''$, $XY \cong X'Y'$ (por hipótese) e $YZ \cong Y'Z''$ (por construção). Decorre daí, pelo Axioma C3, que $XZ \cong X'Z''$. O ponto Z'' pertence à semirreta $\overrightarrow{X'Y'}$, pois $X' * Y' * Z''$. Logo Z'' é o único ponto da semirreta $\overrightarrow{X'Y'}$ tal que $XZ \cong X'Z''$ (a unicidade de um tal ponto é garantida pelo Axioma C1). Mas Z' também é um tal ponto, logo $Z' = Z''$, logo $X' * Y' * Z'$. $\square$

Segunda demonstração da Proposição 5.4, o “Teorema do Triângulo Isósceles”. São dados três pontos não-colineares A, B e C tais que $AB \cong AC$. Queremos provar que $\angle ABC \cong \angle ACB$.

Pelo Axioma B2, é possível tomar um ponto F tal que $F * B * A$. Em seguida, podemos invocar o Axioma C1 para encontrar o único ponto G na semirreta $\overrightarrow{AC}$, $G \neq A$ tal que $AG \cong AF$. Pelo Problema 4.3, temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$. Temos portanto $\angle GAB = \angle FAC$, $AB \cong AC$, e $AF \cong AG$. Segue do Axioma (C6) que são congruentes os triângulos ΔGAB e ΔFAC. Em particular, temos

$$FC \cong BG \quad \text{e} \quad \angle AFC \cong \angle BGA. \tag{18}$$

Aplicando o Lema 7.1, com $X = X' = A$, $Y = B$, $Y' = C$, $Z = F$, $Z' = G$, concluímos que vale $A * C * G$. Daí, pela Proposição 6.3, vale $FB \cong CG$. Isto e (18) (notando que, pelo Problema 4.3, $\angle AFC = \angle BFC$ e $\angle BGA = \angle BGC$) implicam, pelo Axioma C6, a congruência $\Delta BCF \cong \Delta CBG$. Em particular, segue a congruência

$$\angle CBF \cong \angle BGC. \tag{19}$$

Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle CBF$ são suplementares, também são suplementares os ângulos $\angle ACB$ e $\angle BGC$. Segue portanto de (19), pela Proposição 6.4, a congruência $\angle ABC \cong \angle ACB$, que queríamos demonstrar.

8. Continuidade

Apesar de todo esforço que fizemos para axiomatizar ordem e congruência na geometria euclideana, ainda não podemos justificar rigorosamente, sem apelar para uma figura, a demonstração da primeira proposição dos Elementos, a construção com régua e compasso de um triângulo equilátero com um lado dado. Para enunciar o axioma adicional de que necessitamos, será preciso definir interior de círculo, e para isso precisamos antes tratar da desigualdade de segmentos.

[4] Sobre semirreta oposta, veja a Definição 1.4 e a Proposição 4.10.

Desigualdades entre segmentos e entre ângulos.

Usando o Lema 7.1 e o Axioma C1, vamos definir o significado de um segmento ser menor do que um outro.

Sejam AB e CD dois segmentos não-congruentes. Invocando o Axioma C1, podemos obter o único ponto E da semirreta $\overrightarrow{CD}$, $E \neq C$, tal que $AB \cong CE$, e o único ponto F da semirreta $\overrightarrow{DC}$, $F \neq D$, tal que $AB \cong DF$. É claro que $E \neq D$ e $F \neq C$ (caso contrário, AB e CD seriam congruentes).

Lema 8.1. *Com A, B, C, D, E e F como acabamos de definir, temos*

$$C * E * D \iff D * F * C \tag{20}$$

e

$$C * D * E \iff D * C * F \tag{21}$$

`Demonstração`: Temos $AB \cong CE$ e $AB \cong DF$, logo, pelo Axioma C2, segue $CE \cong DF$. Além disso, CD e DC são o mesmo segmento, logo $CD \cong DC$, também pelo Axioma C2. Podemos portanto aplicar o Lema 7.1 com $X = C$, $Y = E$, $Z = D$, $X' = D$, $Y' = F$ e $Z' = C$ e concluir que, se vale $C * E * D$, então vale $D * F * C$. A recíproca demonstra-se da mesma maneira, tomando $X = D$, $Y = F$, $Z = C$, etc, ao aplicar o Lema 7.1. Isto prova (20)

Sabemos que $E \in \overrightarrow{CD}$, $E \neq C$ e $E \neq D$. Se não valer $C * E * D$, então vale $C * D * E$. Pela mesma razão, se não valer $D * F * C$, então vale $D * F * C$. Logo (20) implica [5] (21). □

Estamos prontos para enunciar:

Definição 8.1. *Dados dois segmentos não-congruentes AB e CD, seja E o único ponto da semirreta $\overrightarrow{CD}$ tal que $AB \cong CE$. Se valer $C * E * D$, diremos que AB é menor do que CD, $AB < CD$. Se valer $C * D * E$, teremos $AB > CD$.*

O leitor deve se convencer de que segue da Definição 8.1, do Lema 8.1 e dos axiomas de ordenamento que são equivalentes as afirmações: $AB < CD$, $AB < DC$, $BA < CD$, $BA < DC$, $CD > AB$, $DC > AB$, $CD > BA$, $DC > BA$. Ou seja, as relações $<$ e $>$ estão definidas na classe dos segmentos, apesar de à primeira vista dependerem da ordem em que os extremos dos segmentos são dados e, além disso, dois segmentos satisfazem $I < J$ se e somente se $J > I$.

Proposição 8.2. *Dados dois segmentos AB e CD uma e apenas uma das três afirmações é verdadeira: (i) $AB \cong CD$, (ii) $AB < CD$, ou (iii) $AB > CD$.*

`Demonstração`: Seja E o único ponto em $\overrightarrow{CD}$, $E \neq C$ tal que $AE \cong CD$. Como já observamos no parágrafo que precede o Lema 8.1, se AB e CD não são congruentes (ou seja, se não vale (i)), temos também $E \neq D$. Logo E satisfaz uma e apenas uma das duas afirmações seguintes: (a) $C * E * D$ ou (b) $C * D * E$. Se vale (a), vale a afirmação (ii) do enunciado. Se vale (b), vale (iii). □

A demonstração da proposição seguinte é consequência imediata da Definicao 8.1 e do fato de que qualquer segmento é congruente a si próprio (Axioma C2).

Proposição 8.3. *Se $A * B * C$, então $AB < AC$.*

Usando a tricotomia determinada pela desigualdade de segmentos, podemos provar:

Proposição 8.4. *Se A, B e C são três pontos distintos e se $AB \cong AC$ e $AB \cong BC$, então A, B e C não são colineares e o triângulo ΔABC é equilátero.*

[5] Justificando essa passagem em linguagem mais formal, usamos que, dadas afirmações P e Q, provar $P \iff Q$ é equivalente a provar $\neg P \iff \neg Q$.

`Demonstração`: Pelo Axioma C2, segue de $AB \cong AC$ e $AB \cong BC$ que $AC \cong BC$. Resta provar que os três pontos não são colineares. Se fossem, um deles estaria entre os outros dois, pelo Axioma B3. Suponhamos que vale $A * B * C$. Segue então da Proposição 8.3 que $AB < AC$, contradizendo a hipótese $AB \cong AC$ (pela Proposição 8.2). Claro que o mesmo argumento se aplicaria se A ou C fosse o ponto que está entre os outros dois. □

Proposição 8.5. *Se $AB < CD$ e $CD < EF$, então $AB < EF$.*

`Demonstração`: Segue de $AB < CD$ que existe X tal que que $C * X * D$ e $AB \cong CX$. Segue de $CD < EF$ que existe Y tal que $E * Y * F$ e $CD \cong EY$. Usando o Axioma C1, podemos obter um ponto $X' \in \overrightarrow{EY}$ tal que $CX \cong EX'$. Temos portanto $CX \cong EX'$, $CD \cong EY$, $C * X * D$ e $X' \in \overrightarrow{EY}$. O Lema 7.1 implica portanto que $E * X' * Y$. Isto, junto com $E * Y * F$, implica que $E * X' * F$ (usamos a Proposição 4.7). Mas $CX \cong EX'$ e $EX \cong AB$ implicam que $AB \cong EX'$ (usamos o Axioma C2). Ou seja, provamos que existe X' tal que $AB \cong EX'$ e $E * X' * F$, ou seja $AB < EF$. □

Problema 8.1. Suponha que $AB \cong A'B'$, $CD \cong C'D'$ e $AB < CD$. Mostre que $A'B' < C'D'$.

Usando os axiomas de ordenamento e congruência, podemos também definir a noção de desigualdade entre ângulos.

Definição 8.2. *Dados dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$, seja $\overrightarrow{DX}$ a única semirreta tal que $\angle EDX \cong \angle BAC$ e X e F estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{DE}$. As semirretas $\overrightarrow{DX}$ e $\overrightarrow{DF}$ são iguais se e somente se $\angle BAC \cong \angle EDF$. Caso X pertença ao interior de $\angle EDF$, diremos que $\angle BAC < \angle EDF$. Caso X e E estejam em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{DF}$, diremos $\angle BAC > \angle EDF$.*

Tal como no caso de segmentos, vale a tricotomia, a compatibilidade com a congruência e a transitividade da desigualdade entre ângulos. A demonstração é análoga e fica para a leitora.

Problema 8.2. Dados $\angle BAC$ e $\angle EDF$ vale uma e apenas uma das seguintes três afirmações: (i) $\angle BAC \cong \angle EDF$, (ii) $\angle BAC < \angle EDF$, ou (iii) $\angle BAC > \angle EDF$.

Problema 8.3. Demonstre que a desigualdade de ângulos é compatível com a congruência de ângulos. Mais precisamente, mostre que, se $\angle BAC < \angle EDF$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle EDF \cong \angle E'D'F'$, então $\angle B'A'C' < \angle E'D'F'$.

Problema 8.4. Demonstre que a desigualdade de ângulos é transitiva. Mais precisamente, mostre que, se $\angle BAC < \angle EDF$ e $\angle EDF < \angle HGI$, então $\angle BAC < \angle HGI$.

Axioma sobre interseção de círculos.

Como já vimos na Definição 1.2, dados dois pontos O e A, o círculo com centro em O passando por A é o conjunto dos pontos P tais que $OP \cong OA$. O segmento OA é um *raio* do círculo.

Proposição 8.6. *Seja Γ o círculo de centro O passando por A. Qualquer reta r passando por O intercepta Γ exatamente em dois pontos C e C' que satisfazem $C * O * C'$.*

`Demonstração`: Sejam X e X' dois pontos de r tais que $X * O * X'$ (a existência desses dois pontos decorre dos Axiomas I2 e B2). Pelo Axioma C1, existem únicos $C \in \overrightarrow{OX}$ e $C' \in \overrightarrow{OX'}$ tais que $OC \cong OA$ e $OC' \cong OA$. Os pontos C e C' estão portanto na interseção de r com Γ. Se P é qualquer ponto da reta r distinto de O que esteja na reta r e no círculo Γ, segue pela Proposição 4.9 que ou $P \in \overrightarrow{OX}$ (neste caso $P = C$) ou $P \in \overrightarrow{OX'}$ (neste caso $P = C'$). Ou seja, C e C' são os únicos pontos de interseção de Γ com r. A demonstração de que $C * O * C'$ fica para o leitor (veja o Problema 8.5). □

Problema 8.5. Seja O, X e X' pontos tais que $X * O * X'$, seja r a reta que os contém. Mostre que, se C e C' são pontos distintos de r tais que $C \in \overrightarrow{OX}$ e $C' \in \overrightarrow{OX'}$, então vale $C * O * C'$.

Qualquer segmento CC', com C e C' como no enunciado da Proposição 8.6, é um *diâmetro* de Γ.

O centro de um dado círculo é unicamente determinado, enquanto que seu raio está determinado a menos de congruência. Mais precisamente, temos [3, Proposition 11.1]:

Proposição 8.7. *Seja Γ o círculo de centro O passando por A, seja Γ' o círculo de centro O' passando por A'. Se os dois conjuntos de pontos Γ e Γ' são iguais, então $O = O'$ e $OA \cong O'A'$.*

`Demonstração`: Suponha por absurdo que $O \neq O'$. A Proposição 8.6 nos diz que a interseção da reta $\overleftrightarrow{OO'}$ com o círculo Γ consiste de dois pontos, e igualmente para a interseção de Γ' com $\overleftrightarrow{OO'}$. Essas interseções são conjuntos idênticos, pois $\Gamma = \Gamma'$. Sejam C e C' os dois elementos desse conjunto. Sabemos que valem $C * O * C'$ e $C * O' * C'$, mas não sabemos se vale $C * O * O'$ ou $C * O' * O$. Podemos supor sem perda de generalidade que vale $C * O * O'$ (caso contrário, poderíamos trocar os nomes de C e C'). Temos portanto $C * O * O' * C'$ (veja (4)).

Segue da Proposição 8.3 que $O'C' < OC'$ e $OC < O'C$. Segue de $OC \cong OC'$ (C e C' são pontos em um círculo de centro em O) e de $OC < O'C$ que $OC' < O'C$ (Problema 8.1). Segue de $O'C' < OC'$ e $OC' < O'C$ que $O'C' < O'C$ (Proposição 8.5).

Os pontos C e C' pertencem a Γ', logo $O'C \cong O'C'$, o que seria um absurdo, pois já provamos que $O'C' < O'C$, o que violaria a tricotomia da Proposição 8.2.

Agora que sabemos que $O = O'$, segue imediatamente da definição de círculo que $OA \cong O'A'$. □

Definição 8.3. *Seja Γ um círculo, seja O o centro de Γ, seja OA um raio de Γ. O interior de Γ é o conjunto dos pontos P tais que $OP < OA$ ou $P = O$. O exterior Γ é o conjunto dos pontos Q tais que $OQ > OA$.*

Acrescentamos à nossa teoria mais um axioma, chamado em [2] de "Princípio da Continuidade Circular" que pode ser vagamente interpretado como querendo dizer que o círculo não tem buracos, e portanto é contínuo.

(E) Sejam Γ_1 e Γ_2 dois círculos. Se Γ_1 possui pelo menos um ponto no interior de Γ_2 e pelo menos um ponto no exterior de Γ_2, então Γ_1 e Γ_2 possuem exatamente dois pontos de interseção.

Construção de um triângulo equilátero.

Com o auxílio do Axioma E, podemos agora demonstrar a primeira proposição dos Elementos, que descreve a construção com régua e compasso de um triângulo equilátero com um lado dado. Na nossa linguagem, podemos reenunciar aquela proposição como o seguinte teorema, ao qual adicionamos a informação de que há duas soluções possíveis para o problema.

Teorema 8.8. *Dados dois pontos A e B, existem C e C' em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que ΔABC e $\Delta ABC'$ são equiláteros.*

`Demonstração`: Seja Γ_1 o círculo com centro em A e raio AB, seja Γ_2 o círculo com centro em B e raio BA. Seja B' tal que $B' * A * B$ e $AB' \cong AB$ (Axioma C1). Por definição, B' é um ponto de Γ_1. Segue da Proposição 8.3 que $BB' > AB$, logo B' é um ponto do exterior de Γ_2. Por outro lado, B é um ponto de Γ_1 que pertence ao interior de Γ_2. Segue do Axioma E que existem dois pontos distintos C e C' que pertencem a Γ_1 e a Γ_2. Daí, $AC \cong AB$, $BC \cong AB$, $AC' \cong AB$ e $BC' \cong AB$ (definição de círculo). vDaí segue, pela Proposição 8.4, que os triângulos ΔABC e $\Delta ABC'$ são equiláteros. Como têm um lado em comum, são congruentes, pelo critério LLL de congruência. Em particular, os ângulos $\angle CAB$ e $C'AB$ são congruentes. Se os pontos C e C' não estivessem em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$, as semirretas AC e AC' seriam idênticas, pela unicidade do Axioma C4. Daí C e C' seriam iguais, pela unicidade do Axioma C1 (pois $AC \cong AC'$). □

9. Geometria sem o Quinto Postulado (mais alguns resultados)

Os resultados geométricos que podem ser demonstrados usando apenas os axiomas de incidência, de ordenamento, de congruência e de continuidade formam o que se costuma chamar de "Geometria Neutra". A validade dessses resultados é independente do Quinto Postulado de Euclides, eles são portanto verdadeiros tanto na geometria euclideana (que assume o Quinto Postulado), quanto nas geometrias "não-euclideanas". É possível definir, por exemplo, no Plano de Poincaré noções de ordenamento e congruência que satisfaçam os axiomas de ordenamento, congruência e continuidade (na Seção 3 verificamos que os axiomas de incidência são satisfeitos). Logo, os resultados que provamos até agora (a existência de um triângulo equilátero com um lado dado, por exemplo) e que vamos provar nesta seção (existência de perpendiculares, paralelas, pontos médios, bissetrizes) são válidos também no Plano de Poincaré.

Existência da perpendicular, o Quarto Postulado de Euclides.

Duas retas que se interceptam determinam quatro ângulos. De fato, seja O o ponto de interseção das retas r e s, sejam A e C pontos de r tais que $A * O * C$, sejam B e D pontos de s tais que $B * O * D$. Os quatro ângulos formados por r e s são $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ e $\angle AOD$. Os ângulos $\angle AOD$ e $\angle BOC$ são opostos pelo vértices, logo congruentes (Problema 6.1). O mesmo vale para o par $\angle AOB$ e $\angle COD$. Os demais quatro pares de ângulos formados pelos quatro ângulos determinados por r e s são suplementares. Se um dos quatro ângulos for reto (isto é, congruente a um suplementar seu, veja a Definição 1.7), os quatro serão retos. Neste caso, dizemos que as retas r e s são perpendiculares.

Nesta subseção vamos demonstrar que, dadas uma reta r e um ponto P, existe uma reta s perpendicular a r passando por P. O caso em que P não está em r é tratado no Teorema 9.1. O caso em que P está em r segue facilmente do caso em que P não está em r e do Quarto Postulado de Euclides: "todos os ângulos retos são congruentes entre si". Em vez de, como fez Euclides, tomar esta afirmação como um axioma, vamos mostrar, com fez Hilbert, que ela decorre dos axiomas de incidência, ordenamento e congruência que já estamos supondo verdadeiros

Teorema 9.1. *Dadas uma reta r e um ponto P que não está em r, existe uma reta s perpendicular a r passando por P.*

`Demonstração`: Tomemos dois pontos A e B em r (que existem, pelo Axioma I2). Aplicando o Axioma C4 para o ângulo $\angle PAB$, a semirreta $\overrightarrow{AB}$ e o semiplano delimitado pela reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ que não contém o ponto P, obtemos uma semirreta $\overrightarrow{AX}$, com X e P em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\angle PAB \cong \angle XAB$. Aplicando o Axioma C1 para os pontos A e P e a semirreta $\overrightarrow{AX}$, obtemos um ponto $P' \in \overrightarrow{AX}$ tal que $AP \cong AP'$. O ponto P' satisfaz as propriedades: (i) P e P' estão em lados opostos de r, (ii) $\angle PAB \cong \angle P'AB$ e (iii) $AP \cong AP'$.

Seja Q o ponto de interseção do segmento PP' com a reta r. Vamos dividir o restante do argumento em dois casos: (I) $Q = A$ ou (II) $Q \neq A$. No primeiro caso, segue da definição de Q que $P * A * P'$. Logo, as semirretas $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AP'}$ são opostas, logo os ângulos $\angle PAB$ e $\angle P'AB$ são suplementares. Pela propriedade (ii), os ângulos $\angle PAB$ e $\angle P'AB$ são congruentes. Um ângulo reto é, por definição, um ângulo que é congruente a seu suplementar. Logo, os ângulos $\angle PAB$ e $\angle P'AB$ são retos e portanto a reta $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular a r e passa por P.

Se $Q \neq A$, então A não é um ponto da reta $\overleftrightarrow{PP'}$ (se fosse, as retas $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ passariam por dois pontos distintos, daí seriam iguais pelo Axioma I1, daí P seria um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$, e estamos supondo que P não está em r). Podemos portanto considerar os triângulos ΔAPQ e $\Delta AP'Q$. Pelo Axioma B3 e pela definição de semirreta, um dos dois casos ocorre: (x) $Q \in \overrightarrow{AB}$ ou (y) $Q * A * B$. No caso (x), $\angle PAQ = \angle PAB$ e $\angle P'AQ = \angle P'AB$. Segue portanto da propriedade (ii) que $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$. No caso (y), temos que $\angle PAQ$ é suplementar a $\angle PAB$ e $\angle P'AQ$ é suplementar a $\angle P'AB$. Logo, $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$, pois suplementares de congruentes são congruentes. Ou seja, em qualquer caso temos $\angle PAQ \cong \angle P'AQ$.

Os triângulos ΔAPQ e $\Delta AP'Q$ têm em comum o lado AQ, os lados AP e AP' são congruentes pela propriedade (iii), e os ângulos $\angle PAQ$ e $\angle P'AQ$ são congruentes. Por LAL (Axioma C6), ΔAPQ e $\Delta AP'Q$ são congruentes. Segue, em particular, que $\angle PAQ$ e $\angle P'AQ$ são congruentes. Segue da definição de Q que $P * Q * P'$, ou seja, as semirretas $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{QP'}$ são opostas, ou seja, os ângulos $\angle PAQ$ e $\angle P'AQ$ são congruentes e suplementares, ou seja, são retos. A reta $s := \overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular a r e passa por P também no caso em que $Q \neq A$. □

O resultado seguinte é o Teorema 21 de [4]. Hilbert atribui a ideia da demonstração a Proclus, filósofo que nasceu em Constantionopla em 412, estudou em Alexandria e morreu em Atenas em 485.

Teorema 9.2. *Dois ângulos retos quaisquer são congruentes.*

`Demonstração`: Sejam $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ dois ângulos retos, sejam $\angle CAD$ e $\angle C'A'D'$, respectivamente, seus suplementares (temos portanto $B * A * D$ e $B' * A' * D'$). Temos $\angle BAC \cong \angle CAD$ e $\angle B'A'C' \cong \angle C'A'D'$. Queremos provar que $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ são congruentes.

Seja C'' um ponto no mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que C e tal que $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$. A existência de C'' decorre do Axioma C4. Decorre também do Axioma C4 que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ se e somente se $C'' \in \overrightarrow{AC}$. Suponhamos por absurdo que $C'' \notin \overrightarrow{AC}$ (e, portanto, $C'' \notin \overleftrightarrow{AC}$, pois C'' e C estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$). Suponhamos, ademais, que A e C'' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ (o caso em que C'' e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$ é muito parecido e será omitido). C'' é então um ponto do interior de $\angle BAC$. Segue da Definição 8.2 que $\angle BAC'' < \angle BAC$. Como C'' está no interior de $\angle BAC$ e vale $B * A * D$, segue, pelo Problema 4.6, que C está no interior de $\angle C''AD$, logo vale $\angle CAD < \angle C''AD$. Por hipótese, $\angle BAC \cong \angle CAD$. Temos portanto

$$\angle BAC'' < \angle BAC \cong \angle CAD < \angle C''AD,$$

logo, pelos Problemas 8.3 e 8.4,

$$\angle BAC'' < \angle C''AD. \tag{22}$$

De $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$ segue, pela Proposição 6.4 (suplementares de congruentes são congruentes), que $\angle C'A'D' \cong \angle C''AD$. Por hipótese, $\angle B'A'C' \cong \angle C'A'D'$. Logo, pela transitividade da congruência de ângulos (Axioma C5), vem

$$\angle C''AD \cong C'A'D' \cong \angle B'A'C' \cong \angle BAC'',$$

o que contradiz (22). Logo A e C'' não estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Da mesma maneira se prova que A e C'' não estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$. Logo $C'' \in \overrightarrow{AC}$. □

A recíproca do Teorema 9.2 fica como exercício:

Problema 9.1. Seja $\angle BAC$ um ângulo reto, seja $\angle B'A'C'$ um ângulo congruente a $\angle BAC$. Então $\angle B'A'C'$ também é um ângulo reto.

Teorema 9.3. *Dada uma reta r e dado um ponto P em r, existe uma única reta s perpendicular a r passando por P.*

`Demonstração`: Seja Q um ponto qualquer que não esteja em r (a Proposição 2.5 nos garante a existência de um tal Q). Seja t uma reta perpendicular a r passando por Q. Se r passar por P, terminamos. Se r não passar por P, chamemos de X a interseção de t e r. Pelo Axioma C4, existe uma semirreta $\overrightarrow{PY}$ tal que $\angle QXP \cong \angle YPX$. Como $\angle QXP$ é reto, segue do Problema 9.1 que $\angle YPX$ é reto, logo $s := \overleftrightarrow{PY}$ é perpendicualar a r.

Para provar a unicidade, suponha que s e s' são retas perpendiculares a r passando por P. Tome Q em s e Q' em s' que estejam do mesmo lado de r e tome $X \neq P$ em r. Os ângulos $\angle QPX$ e $\angle Q'PX$ são retos, logo congruentes, pelo Teorema 9.2. Estando os pontos Q e Q' do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{PX} = r$ e sendo os ângulos $\angle QPX$ e $\angle Q'PX$ congruentes, segue pelo Axioma C4 que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$, logo $s = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PQ'} = s'$. □

Ângulos externos, unicidade da perpendicular, existência da paralela.

Nosso próximo objetivo é demonstrar que um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer dos dois ângulos internos não-adjacentes. É conveniente para a exposição considerar preliminarmente o seguinte resultado, a recíproca da Proposição 6.4:

Proposição 9.4. *Sejam $\angle XYZ$ e $\angle ZYW$ suplementares. Se W' e X' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{Y'Z'}$, $\angle X'Y'Z' \cong \angle XYZ$ e $\angle Z'Y'W' \cong \angle ZYW$, então $\angle X'Y'Z'$ e $\angle Z'Y'W'$ são suplementares.*

`Demonstração`: Seja W'' tal que $X' * Y' * W''$ (Axioma B2). Então $\angle Z'Y'W''$ e $\angle X'Y'Z'$ são suplementares. Decorre da Proposição 6.4 que $\angle Z'Y'W''$ e $\angle ZYW$ são congruentes. Por hipótese, temos $\angle Z'Y'W' \cong \angle ZYW$. Além disso W' e W'' estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{Y'Z'}$. Logo, pela unicidade do Axioma C4, temos $\overrightarrow{Y'W'} = \overrightarrow{Y'W''}$, logo $W' \in \overrightarrow{Y'W''}$, logo $X' * Y' * W'$. Ou seja, $\angle X'Y'Z'$ e $\angle Z'Y'W'$ são suplementares. □

Chamamos de *ângulo externo* de um triângulo um suplementar de um ângulo do triângulo. Os ângulos do triângulo podem ser chamados, para enfatizar a ideia, de *ângulos internos*. Mais detalhamente, dado o triângulo ΔABC, sejam A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 pontos tais que $A_1 * A * B$, $A_2 * A * C$, $B_1 * B * C$, $B_2 * B * A$, $C_1 * C * A$ e $C_2 * C * B$ (Axioma B2). Os seis ângulos externos de ΔABC são: $\angle A_1AC$, $\angle A_2AB$, $\angle B_1BA$, $\angle B_2BC$, $\angle C_1CB$ e $\angle C_2CA$.

O seguinte resultado é o Teorema 22 de [4]. Hilbert o chama de "Teorema do Ângulo Externo".

Teorema 9.5. *Um ângulo exterior de um triângulo é maior do que qualquer ângulo interno que não lhe seja adjacente.*

`Demonstração`: Dado o triângulo ΔABC, tome D tal que $D * A * B$ e $AD \cong BC$ (Axiomas B2 e C1).

Vamos primeiramente provar que $\angle ACB$ e $\angle CAD$ não são congruentes. Suponha por absurdo que são. Nesse caso, temos $AD \cong CB$, $AC \cong CA$ e $\angle DAC \cong \angle BCA$. Pelo criério LAL (Axioma C6), segue $\Delta DAC \cong \Delta BCA$, logo $\angle ACD \cong \angle CAB$. Como $\angle DAC$ e $\angle CAB$ são suplementares e D eB estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AC}$, segue, pela Proposição 9.4, que $\angle ACB$ e $\angle ACD$ são suplementares, logo D está em $\overleftrightarrow{CB}$ e em $\overleftrightarrow{AB}$ simultaneamente, logo $D = B$ e $D * A * B$, o que é absurdo.

Para provar que $\angle CAD > \angle ACB$, suponhamos por absurdo que temos $\angle CAD < \angle ACB$. Pela definição de desigualdade de ângulos (Definição 8.2), segue que existe X no interior de $\angle ACB$ tal que $\angle XCA \cong \angle CAD$. Pelo teorema da barra transversal (Teorema 4.14), segue que a semirreta $\overrightarrow{CX}$ e o segmento AB se interceptam no ponto que chamaremos de B'. O ângulo $\angle CAD$ é um ângulo externo do triângulo $\Delta ACB'$. Segue pela parte do teorema que já foi demonstrada, aplicada ao triângulo $\Delta ACB'$, que $\angle ACB'$ não é congruente a $\angle CAD$. Mas $\angle ACB' = \angle ACX \cong \angle CAD$, absurdo!

Provamos que $\angle DAC > \angle ACB$. Resta provar que $\angle DAC > \angle ABC$. Seja D' tal que $D' * A * C$. Então, por serem opostos pelo vértice, os ângulos $\angle DAC$ e $\angle D'AB$ são congruentes. Pela parte do teorema que já está demonstrada, segue que $\angle D'AB > \angle ABC$. Logo, $\angle DAC > \angle ABC$, pelo Problema 8.3. □

Definição 9.1. *Um ângulo maior do que um reto é chamado de obtuso, um menor do que um reto, de agudo.*

Proposição 9.6. *O suplementar de um ângulo agudo é obtuso, e vice-versa.*

`Demonstração`: Considere o par de ângulos suplementares $\angle ABC$ e $\angle CBA$. Suponha que $\angle ABC$ é obtuso. Logo existe X no interior de $\angle ABC$ tal $\angle ABX$ é reto. Como X está no interior de $\angle ABC$, C está no interior de $\angle XBD$ (Problema 4.6). Logo $\angle CBD < \angle XBD$, que é reto. Logo $\angle CBD$ é agudo. Se $\angle ABC$ for agudo, um argumento quase idêntico mostra que $\angle CBD$ é obtuso. □

Seguem do teorema do ângulo externo as seguintes proposições.

Proposição 9.7. *Pelo menos dois ângulos de um triângulo são agudos.*

`Demonstração`: No triângulo ΔABC, suponha que $\angle CAB$ não seja agudo. Então o ângulo externo no vértice A ou é reto ou é obtuso. Em qualquer caso, os ângulos internos em B e em C serão menores do que um reto, pelo Teorema 9.5. □

Proposição 9.8. *Dada uma reta r e um ponto P fora de r, existe no máximo uma reta s perpendicular a r passando por P.*

`Demonstração`: Suponha que existam duas retas distintas s e s' passando por P e perpendiculares a r. Os pontos de interseção de s e s' com r são distintos, pois s e s' já possuem o ponto P em comum, e P está fora de r (estamos usando consequências do Axioma I1). Chamemos esses dois pontos de interseção de Q e Q'. Os três pontos P, Q e Q' são não colineares, pois Q e Q' estão em r e P não está. Podemos portanto considerar o triâgulo $\Delta PQQ'$. Esse triâgulo teria dois ângulos retos, contradizendo a Proposição 9.7. □

Os enunciados do Teorema 9.1, do Teorema 9.3 e da Proposição 9.8 podem ser unificados na seguinte sentença:

Teorema 9.9. *Dada uma reta r e um ponto P, existe uma única reta s passando por P e perpendicular a r.*

A existência de perpendiculares implica na existência de paralelas.

Teorema 9.10. *Dada uma reta r e um ponto P fora de r, existe (pelo menos) uma reta s paralela a r passando por P.*

`Demonstração`: Seja t a reta perpendicular a r passando por P. Chamemos de Q a interseção de r e t. Seja s a reta perpendicular a t passando por P. Suponhamos por absurdo que s e r não sejam paralelas. Chamemos de R a interseção de s e r. O triângulo ΔPQR teria então dois ângulos retos, o que é um absurdo, pela Proposição 9.7. Logo s e r são paralelas e s passa por P. □

Alternos internos, critério LAA, existência de ponto médio.

Definição 9.2. Seja t uma reta transversal às retas r e s, ou seja, suponha que a reta t intercepta r e s nos pontos B e E, respectivamente. Sejam A e C pontos de r, D e F pontos de s, tais que $A * B * C$ e $D * E * F$, A e D estão do mesmo lado de t, C e E estão do mesmo lado de t. Os ângulos $\angle ABE$, $\angle BEF$, $\angle CBE$ e $\angle BED$ são chamados de ângulos internos. Os pares ($\angle ABE$, $\angle BEF$) e ($\angle CBE$, $\angle BED$) são chamados pares de ângulos alternos internos.

Proposição 9.11. *Se duas retas interceptadas por uma transversal possuem um par de ângulos alternos internos congruentes, então elas são paralelas.*

`Demonstração`: Usando a notação da Definição 9.2, suponha que as retas r e s se encontram em um ponto P do mesmo lado de t que A e D. Então $\angle PBE = \angle ABE$ e $\angle PEB = \angle DEB$ são ângulos internos do triângulo ΔBEP. O ângulo $\angle BEF$, sendo suplementar a $\angle DEB$ é um ângulo externo de ΔBEP. Pelo Teorema 9.5, os ângulos $\angle ABE$ e $\angle BEF$ não são congruentes. Do mesmo modo, se as retas r e s se inteceptarem em um ponto do mesmo lado de t que C e F, então os ângulos $\angle BEF$ e $\angle ABE$ também não serão congruentes, pois o primeiro deles será um ângulo interno de um triângulo e o segundo um ângulo externo não-adjacente ao primeiro.

Do mesmo modo demonstra-se que, se r e s se interceptarem, então $\angle CBE$ e $\angle BED$ não serão congruentes. Provamos a contrapositiva do enunciado. □

O Teorema do Ângulo Externo tem como consequência mais um critério de congruência de triângulos, o Lado-Ângulo-Ângulo, enunciado como o Teorema 25 de [4] e demonstrada em seguida como a Proposição 9.12. A demonstração do critério LAA nos livros didáticos da escola básica usa que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus. Essa afirmação sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo depende, naturalmente, de que se defina medida de ângulos, ou ao menos que se dê um significado sintético (sem usar números reais) para a afirmação. Entretanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo só é igual a 180 graus se supusermos válido o Quinto Postulado de Euclides. A demonstração que damos aqui (baseada no Exercício 10 do Capítulo 4 de [2]) não depende do Quinto Postulado, é portanto um resultado de geometria neutra.

O critério LAA terá como consequência a existência do ponto médio de um segmento e a existência da bissetriz de um ângulo.

Proposição 9.12. *Se $AC \cong A'C'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ e $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

`Demonstração`: Primeiramente provemos que por absurdo que AB não é maior do que $A'B'$. Suponha que seja. Então existe X, $A * X * B$, tal que $AX \cong A'B'$. Temos $\angle CAX = \angle CAB \cong \angle C'A'B'$, $AC \cong A'C'$, $AX \cong A'B'$. Segue pelo Axioma C6 (LAL) que $\Delta ACX \cong \Delta A'C'B'$, logo $\angle AXC \cong \angle A'B'C' \cong \angle ABC$. Provamos que o ângulo externo $\angle CXA$ do triângulo ΔCXB é congruente ao ângulo interno $\angle CBX = \angle ABC$ do mesmo triângulo, o que contradiz o Teorema 9.5, pois $\angle CXA$ e $\angle CBX$ não são adjacentes. Analogamente se demonstra que AB não é menor do que $A'B'$ e, portanto, que $AB \cong A'B'$. Segue por LAL que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. ☐

Note que a Proposição 9.12 não usou o Axioma (E) nem suas consequências.

Definição 9.3. *O ponto M é um ponto médio do segmento AB se $A * M * B$ e $AM \cong BM$.*

Para trocar o artigo indefinido "um" pelo artigo definido "o" nesta definição, é preciso provar que o ponto médio de um segmento, se existir, é único. De fato, temos:

Proposição 9.13. *Sejam A, B, M e M' pontos tais que $A * M * B$, $A * M' * B$, $AM \cong BM$ e $AM' \cong BM'$. Então $M = M'$.*

`Demonstração`: Suponha por absurdo que $M \neq M'$. Segue das hipóteses e do Problema 4.3 que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$. Logo um e apenas um dos dois casos seguintes ocorre: (i) $A * M * M'$ ou (ii) $A * M' * M$. Suponha primeiramente que vale $A * M * M'$. Como temos também que $A * M' * B$, segue pela Proposição 4.7 que $M * M' * B$. Segue de $A * M * M'$, pela Proposição 8.3, que $AM < AM'$. Da mesma maneira, segue de $M * M' * B$ que $BM' < BM$. Combinando essas duas desigualdades às hipóteses, vem

$$AM' \cong BM' < BM \cong AM < AM'$$

Daí, usando a Proposição 8.5 e o Problema 8.1, segue que $AM' < AM'$, o que é um absurdo (veja a Proposição 8.2).

No caso em que $A * M' * M$, chegamos a um absurdo com os mesmos argumentos, trocando os papéis de M e M'. ☐

A existência do ponto médio é o Teorema 26 de [4], que demonstramos a seguir, seguindo o roteiro do Exercício 12 do Capítulo 4 de [2]. A demonstração deste teorema não apenas garante a existência do ponto médio, mas também descreve uma construção para obtê-lo.

Teorema 9.14. *O ponto médio de qualquer segmento de reta existe.*

`Demonstração`: Dado AB tome arbitrariamente ponto C fora de AB. Usando os Axiomas C1 e C4, obtenha um ponto C' tal que $AC \cong BC'$, $\angle CAB \cong \angle C'BA$ e C e C' estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Seja M o ponto de interseção de CC' com $\overleftrightarrow{AB}$. Nosso próximo objetivo é provar que vale $A * M * B$, daí seguirá a tese.

Segue do Axioma B3 que uma e apenas uma das seguintes afirmações é satisfeita: (i) $M = A$, (ii) $M = B$, (iii) $M * A * B$, (iv) $A * B * M$, ou (v) $A * M * B$.

As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são atravessadas pela reta $\overleftrightarrow{AB}$. Os ângulos alternos internos $\angle CAB$ e $\angle C'BA$ são congruentes, por construção. Daí segue, pela Proposição 9.11 que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são paralelas. Se valesse (i), as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AM}$ seriam iguais (Axioma I1), logo C' seria um ponto de $\overleftrightarrow{AC}$, o que não ocorre porque as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são paralelas. Pelo mesmo argumento também não ocorre (ii) pois, se ocorresse, C seria um ponto de $\overleftrightarrow{BC'}$. Se valesse (iii), a reta $\overleftrightarrow{AC}$ interceptaria o segmento MB no ponto A. O "postulado de Pasch" (que nestas notas é o Teorema 4.11) aplicado ao triângulo $\Delta MBC'$ (veja a Figura 4.26 de [2]), implica que a reta $\overleftrightarrow{AC}$ intecepta também ou a reta $\overleftrightarrow{MC'}$ ou a reta $\overleftrightarrow{BC'}$. Já provamos que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ não se interceptam. Se $\overleftrightarrow{AC}$ interceptasse $\overleftrightarrow{MC'}$, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ teriam dois pontos em comum, o que é impossível pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são paralelas. Logo, não vale (iii). Argumento idêntico aplicado a outros pontos mostra que não vale (iv). Isto prova que vale (v), ou seja, $A * M * B$.

Temos portanto $A*M*B$ e $C*M*C'$, logo os ângulos $\angle CMA$ e $\angle C'MB$ são opostos pelo vértice, logo são congruentes (Problema 6.1). Temos portanto $AC \cong BC'$, $\angle AMC \cong \angle MBC'$ e $\angle CAM = \angle CAB \cong \angle ABC' = \angle MBC'$. Pelo criétrio LAA de congruência de triângulos (Proposição 9.12), segue $\Delta ACM \cong \Delta BC'M$ e, em particular, $AM \cong BM$. □

A parte da demonstração do Teorema 9.14 que depende apenas dos axiomas de incidência e de ordenamento demonstra a afirmação enunciada a seguir.

Problema 9.2. Suponha que os pontos C e C' estejam em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ sejam paralelas. Mostre que o ponto de interseção do segmento CC' com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está entre A e B.

Bissetrizes.

Definição 9.4. *Dizemos que a semirreta $\overrightarrow{AM}$ é uma bissetriz do ângulo $\angle BAC$ se M pertence ao interior de $\angle BAC$ e $\angle BAM \cong \angle MAC$.*

Não existem duas bissetrizes distintas de um mesmo ângulo:

Problema 9.3. Mostre que, se $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AM'}$ são bissetrizes de $\angle BAC$, então $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'}$.
`Sugestão`: Mostre que não é perda de generalidade supor que B, C, M e M' estão na mesma reta. Daí use as propriedades de desigualdades de ângulos para chegar a um absurdo se M e M' forem distintos.

Antes de provar que todo ângulo tem uma bissetriz, talvez convenha demonstrar separadamente a seguinte afirmação mais simples:

Lema 9.15. *Sejam A e M pontos em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$ tais que $AB \cong AC$ e $MB \cong MC$. Então M não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$ nem na reta $\overleftrightarrow{AC}$.*

`Demonstração`: Vamos provar por absurdo, separando em casos. Se M for um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$, então vale $M*B*A$, pois M e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$. Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle CBM$ são portanto suplementares. Pelo teorema do triângulo isósceles, $\angle ABC \cong \angle ACB$ e $\angle CBM \cong \angle BCM$. Logo, $\angle ACB$ e $\angle BCM$ são suplementares (Proposição 9.4). Logo M está também em $\overleftrightarrow{AC}$, logo $M = A$, o que é um absurdo, pois $M * B * A$. Do mesmo modo se chega a um absurdo partindo-se de $M * C * A$. □

Até aqui, só usamos o Axioma E (sobre interseção de círculos) para demonstrar a existência de triângulos equiláteros (Teorema 8.8). Agora vamos usar o Teorema 8.8 para demonstrar a existência da bissetriz de um ângulo, como faz Euclides na Proposição 9 do Livro I [1].

Teorema 9.16. *Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$, existe M no interior de $\angle BAC$ tal que $\angle BAM \cong \angle MAC$.*

`Demonstração`: Modificando, se necessário, a posição de B ou C em um dos dois lados do ângulo $\angle BAC$ (usando o Axioma C1), podemos supor, sem perda de generalidade, que AB e AC são congruentes.

O Teorema 8.8 nos garante a existência de M, no lado de $\overleftrightarrow{BC}$ oposto a A tal que $BM \cong CM$. Temos $AB \cong AC$, $BM \cong CM$ e $AM \cong AM$. Pelo critério LLL de congruência, segue que ΔABM e ΔACM são congruentes e, portanto, temos $\angle ABM \cong \angle ACM$.

Resta provar que M pertence ao interior de $\angle BAC$. Segue do Lema 9.15 que M não está nem na reta $\overleftrightarrow{AB}$ nem na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

Se M e C estiverem em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$, então existe N em $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $M * N * C$. Como M e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$, N e A também estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ (Lema 4.13). Como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm apenas um ponto em comum, a interseção de AN com $\overleftrightarrow{BC}$ é o ponto B e, portanto, $A * B * N$. A reta $\overleftrightarrow{AN}$ só intercepta $\overleftrightarrow{AM}$ em A, logo o segmento BN não intercepta $\overleftrightarrow{AM}$. Pela mesma razão, BN não intercepta $\overleftrightarrow{AC}$. Logo,

$$B \text{ e } N \text{ estão do mesmo lado de } \overleftrightarrow{AC} \tag{23}$$

e

$$B \text{ e } N \text{ estão do mesmo lado de } \overleftrightarrow{AM}. \tag{24}$$

O ponto de interseção de $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ é C e $M * N * C$, logo M e N estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Segue de (23) que B e M estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. O ponto de interseção de $\overleftrightarrow{NC}$ e $\overleftrightarrow{AM}$ é M e $M * N * C$, logo N e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AM}$. Segue de (24) que B e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AM}$.

Provamos que (i) se M e C não estiverem do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, então B está no interior de $\angle MAC$. Do mesmo jeito se prova que, (ii) se M e B não estiverem do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$, então C está no interior de $\angle BAM$. No caso (i), teremos $\angle ABM < \angle ACM$. No caso (ii), $\angle ACM < \angle ABM$. Nos dois casos, chegamos a um absurdo, pois já provameos que $\angle ABM \cong \angle ACM$. Logo M pertence ao interior de $\angle BAC$. $\square$

Problema 9.4. Dê uma demonstração da existência da bissetriz de um ângulo que não dependa do Axioma E. `Sugestão`: Mostre que o ponto M da demonstração do Teorema 9.16 existe tomando primeiro um ponto M' qualquer no semiplano desejado; daí, se BM' não for congruente a CM', use a recíproca do teorema do triângulo isósceles para concluir que um dos dois ângulos adjacentes a BC é menor do que o outro; daí, use a definição de desigualdade de ângulos, o teorema da barra transversal e de novo a recíproca do teorema do triângulo isósceles para obter o ponto M.

10. O Quinto Postulado e algumas de suas consequências

Usando os axiomas de incidência, ordenamento e congruência, mostramos no Teorema 9.10 que, dada uma reta r e dado um ponto P que não está em r, existe uma reta paralela a r passando por P. A formulação moderna do Quinto Postulado de Euclides, devida a Hilbert, é:

(P) Dada uma reta r e dado um ponto P que não está em r, não existe mais do que uma reta paralela a r que passe por P.

A formulação original, dada na segunda página dos Elementos, em tradução de Irineu Bicudo, é:

(Euc5) Fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Para provar que o postulado das paralelas de Hilbert é equivalente ao Quinto Postulado de Euclides, precisamos "traduzir" **(Euc5)** para a linguagem de Hilbert. Primeiro diremos o que significa dois ângulos serem menores do que dois retos:

Definição 10.1. *Dados dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$, tome F' no lado de $\overleftrightarrow{AC}$ oposto ao de B tal que $\angle CAF' \cong \angle EDF$. Diremos que a soma de $\angle BAC$ e $\angle EDF$ é menor do que dois retos se (i) $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{AF'}$ e (ii) C está no interior de $\angle BAF'$.*

Esta é uma boa definição devido ao Axioma (C4). Usando a Definição 9.2, podemos agora reinterpretar **(Euc5)** como:

(EucH) Seja t uma reta que atravessa as retas r e s, seja B o ponto de interseção de r e t, seja E o ponto de interseção de s e t, sejam $\angle CBE$ e $\angle BEF$ ângulos internos do mesmo lado de t. Se a soma de $\angle CBE$ e $\angle BEF$ for menor do que dois retos, então as semirretas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{EF}$ se interceptam.

O seguinte teorema é o Theorem 4.5 de [2]. Vale a pena olhar as duas figuras que ilustram sua demonstração.

Teorema 10.1. *Os axiomas* **(P)** *e* **(EucH)** *são equivalentes.*

`Demonstração`: Suponha que o Axioma P é satisfeito. Queremos provar que o Axioma EucH também é satisfeito. Para tanto, tomemos uma reta t transversal às retas r e s, chamemos de B o ponto de interseção de r e t, de E o ponto de interseção de s e t, e suponhamos que os ângulos internos $\angle CBE$ e $\angle BEF$ estejam do mesmo lado de t e somem menos de dois retos. Seja D um ponto tal que $D * E * F$. Como a soma de $\angle CBE$ e $\angle BEF$ é menor do que dois retos, $\angle CBE < \angle BED$ (use a Definição 10.1, o Problema 4.6 e a Definição 8.2 para justificar esta afirmação). Pelo Axioma (C4), existe uma única semirreta $\overrightarrow{BC'}$ tal que C' e C estão do mesmo lado de t e $\angle C'BE \cong \angle BED$. Pela Proposição 9.11, as retas $\overleftrightarrow{BC'}$ e s são paralelas. Temos $\angle CBE < \angle BED \cong \angle C'BE$, daí as retas $r = \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ são distintas. Segue do Axioma P que r e s não são paralelas. Seja X a interseção de r e s. Queremos provar que X e C estão do mesmo lado de t. Por absurdo, suponha que X e D estejam do mesmo lado de t. Daí, $\angle CBE$ é um ângulo externo ao triângulo ΔBEX, não-adjacente ao ângulo interno $\angle BEX = \angle BED$. Mas já vimoe que $\angle CBE < \angle BED$, o que contradiz o Teorema 9.5. Isto prova que X está do mesmo lado de t que E e F e que as semirretas $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{EF}$ se encontram em X. Ou seja, provamos que vale o Axioma EucH.

Reciprocamente, suponha que o Axioma EucH é satisfeito, sejam P um ponto fora da reta r, seja t a única reta perpendicular a r passando por P, e seja s a única reta perpendicular a t passando por P (Teorema 9.9). As retas r e s são paralelas, pela demonstração do Teorema 9.10. Seja q uma reta distinta de s passando por P. Como q não é perpendicular a t, dois dos ângulos determinados por q e t são agudos, opostos pelo vértice. Um desses dois é um ângulo interno relativamente ao cruzamento de q e r. O outro ângulo interno do mesmo lado de t é reto, pois é um ângulo formado pelas retas perpendiculares r e t. Logo, a soma desses dois ângulos internos é menor do que dois retos. Pelo Axioma EucH, as retas q e r se encontram. Provamos que qualquer reta q diferente de s que passe por P não é paralela a r, ou seja, s é a única paralela a r que passa por P. Provamos que é válido o Axioma P. $\square$

É importante frisar que o Axioma P pode ser formulado fazendo menção apenas aos axiomas de incidência, enquanto que o Axioma EucH depende também dos axiomas de ordenamento e congruência. Só faz sentido, portanto, formular (e demonstrar) a equivalência entre os dois postulados num sistema axiomático que englobe ordenamento e congruência. Mas, como vimos no Problema 3.1, por exemplo, faz sentido investigar se o Axioma P é, ou não, válido em modelos de geometria de incidência que não estejam munidos das noções de ordenamento e congruência. Vimos também, na Subseção "Planos Projetivos" da Seção 3 que a construção clássica de plano projetivo pode ser feita também em qualquer geometria de incidência que satisfaça o Axioma P.

Referências

[1] Os Elementos de Euclides, tradução de Irineu Bicudo. Editora da Unesp, 2009.
[2] M. J. Greenberg. Euclidean and Non-Euclidean Geometries, 3^a edição. W. H. Freeman, 2003.
[3] R. Hartshorne. Geometry: Euclid and Beyond. Springer, 1997.
[4] D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie, 1903.
Traduções para o inglês e o espanhol: Foundations of Geometry, Fundamentos de la Geometría.
[5] R. Millman & G. Parker. Geometry – a metric approach with models. Springer, 1991.
[6] Edwin Moise. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison Wesley, 1963.