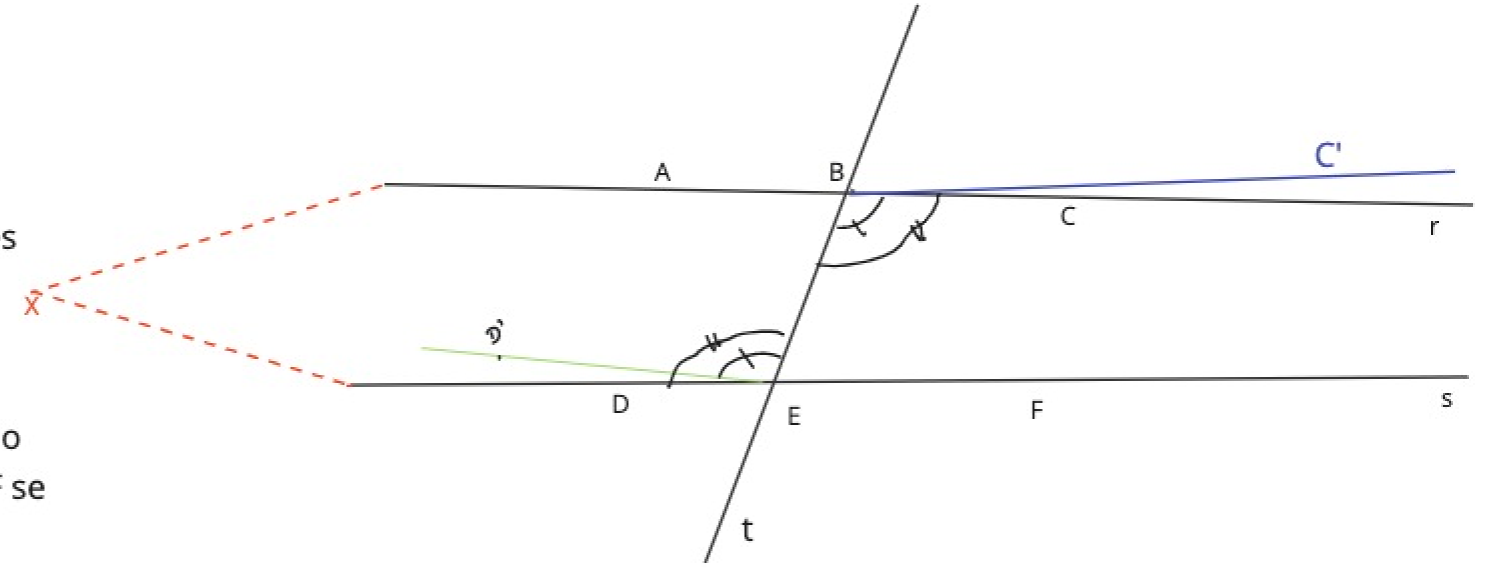
(Euc5) Fique postulado, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

(EucH) Seja t uma reta que atravessa as retas r e s, seja B o ponto de interseção de r e t, seja E o ponto de interseção de s e t, sejam ∠CBE e ∠BEF ângulos internos do mesmo lado de t. Se a soma de ∠CBE e ∠BEF for menor do que dois retos, então as semirretas BC e EF se interceptam.

Dados dois ângulos ∠BAC e ∠EDF, tome F' no lado da reta AC oposto ao de B tal que ∠CAF e ∠EDF sejam congruentes. Diremos que a soma de ∠BAC e ∠EDF´e menor do que dois retos se (i) A, B e F' não são colineares e (ii) C está no interior de ∠BAF'.

(P) Dada uma reta r e dado um ponto P que não está em r, não existe mais do que uma reta paralela a r que passe por P.

Teorema: (P) e (EucH) são equivalentes.



∠CBE + ∠BEF < 180

∠CBE < ∠BED

Retas BC e BC' distintas

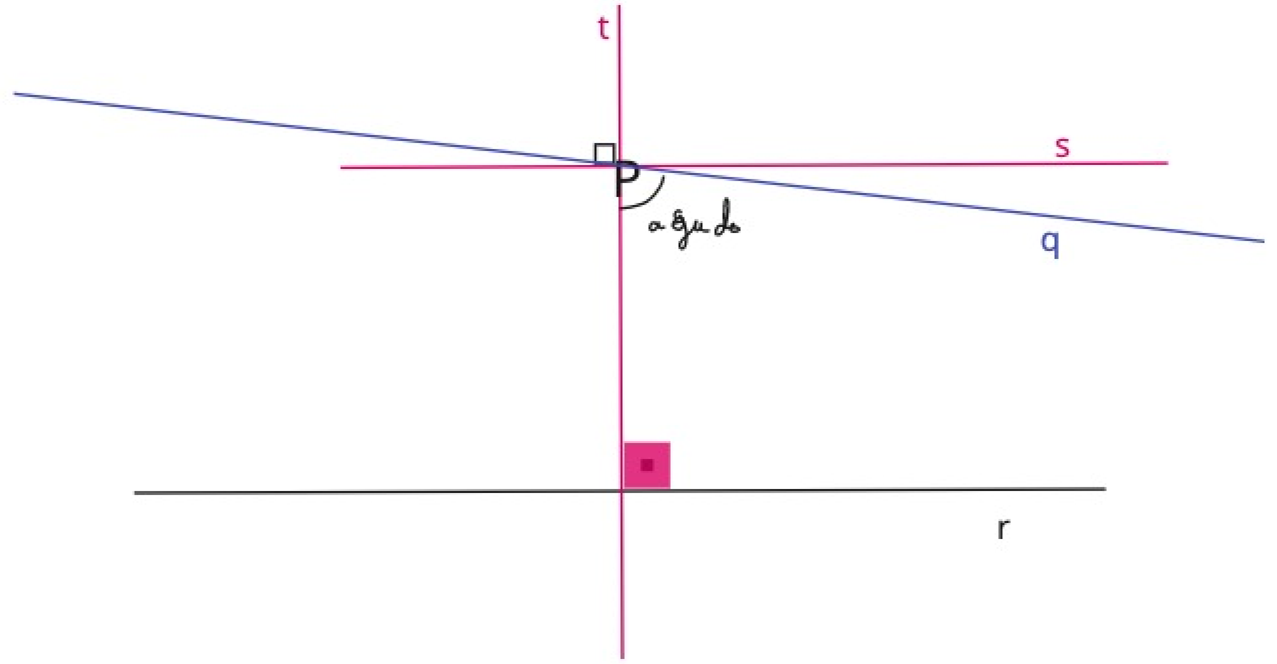
Retas BC e DE concorrentes em X

Por absurdo, X e C lados opostos de t

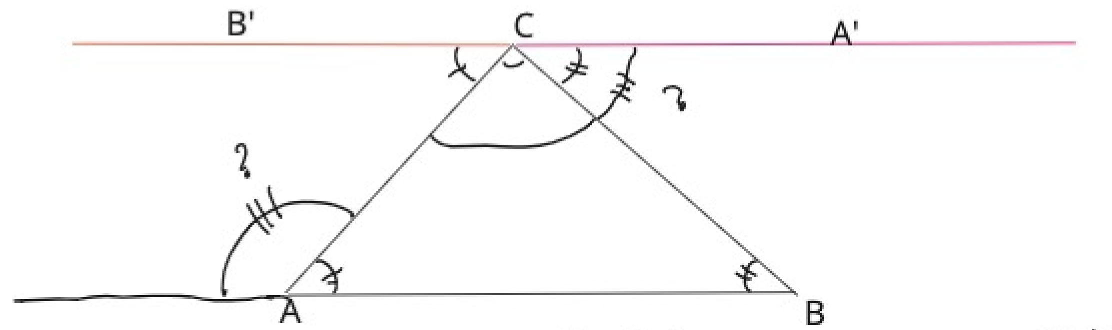
Ângulo Externo △ BEX

∠CBE é externo

∠BED = ∠BEX

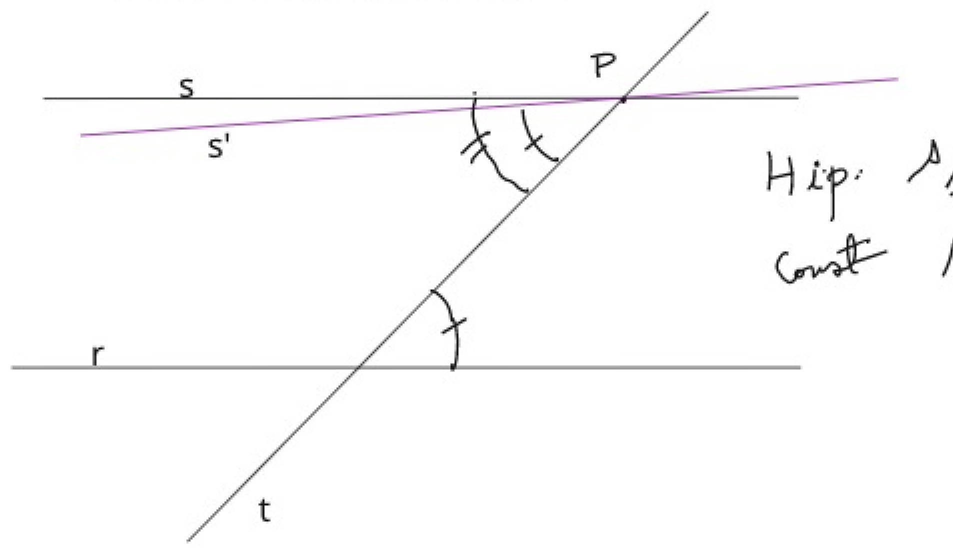


Soma dos ângulos internos de um triângulo



Geometria neutra ⟹ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ $\overleftrightarrow{A'C} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ⟹ (P) $\overleftrightarrow{B'C} = \overleftrightarrow{A'C}$

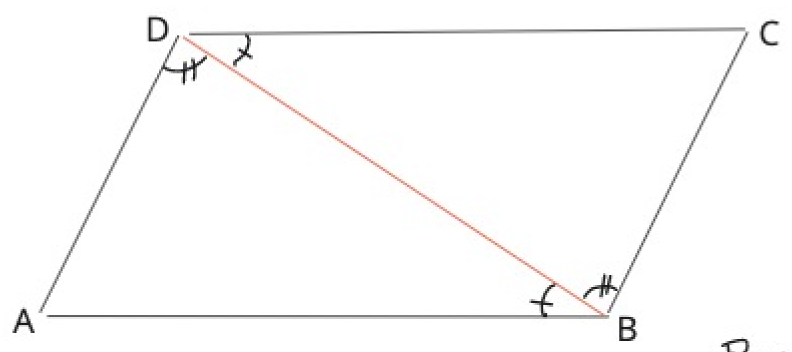
Paralelas e Alternos Internos



Hip: s // r

Const s' // r

Paralelogramos



ALA △DBA ≅ △BDC ⟹ BC ≅ AD, DC ≅ AB

Thurston

Spira

Witten

Recíproca LLL ⟹

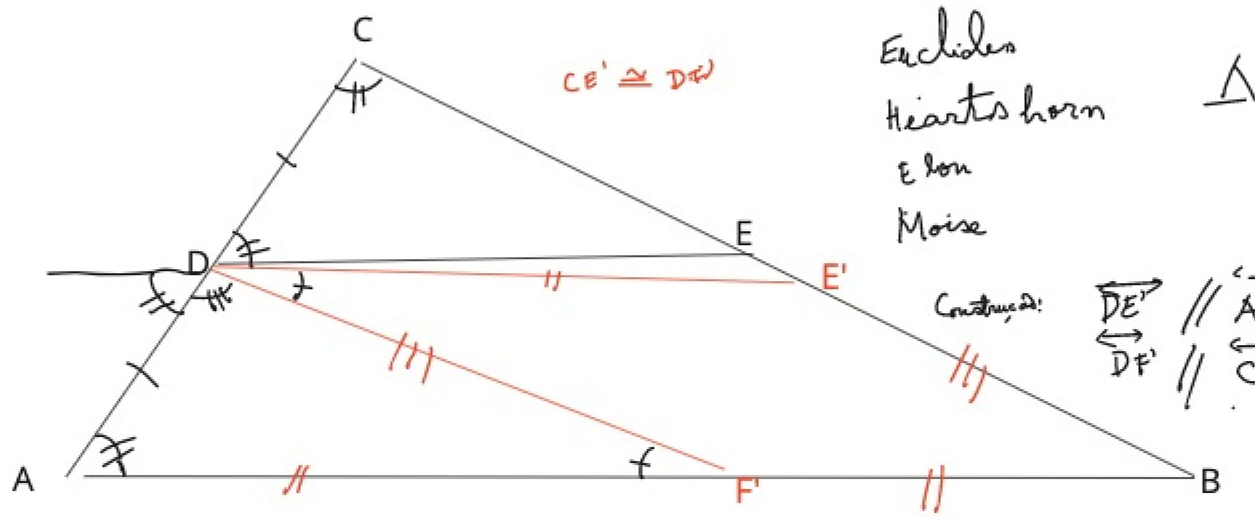
Alt int cong paralelas

Sachieri

Teorema: AB ≅ DC e AD ≅ BC

⇕

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$



Euclides

Hearts horn

Elon

Moise

ALA △CDE' ≅ △DAF

Construção: $\overleftrightarrow{DE'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DF'} \parallel \overleftrightarrow{CB}$

□ DE'BF' e paralelog

E' é ponto médio de BC

unicidade p.m ⟹ E = E'

∴ CE ∥ AB

Hipótese: D é ponto médio de AC. Daí:

E é ponto médio de CB se e somente se DE é paralelo a AB

DE' paralelo a AB, DF' paralelo a CB. Alternos internos, ALA implicam DE' e AF' congruentes. Paralelogramo, DE' e F'B congruentes, E'B e DF' congruentes. Mas DF' e CE' congruentes.