Livro I

Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.

16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois.
18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.
19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.
21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.
22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Postulados

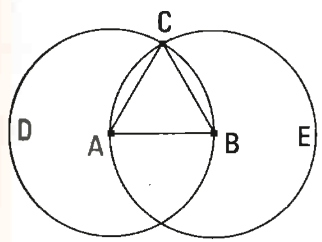
1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
[4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.]
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

I.

Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.



Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.

E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

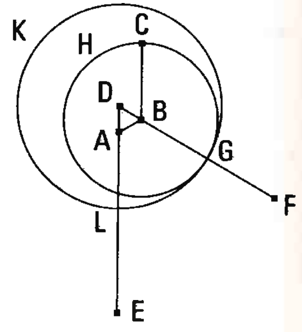
Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.

[Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer.

2.

Pôr, no ponto dado, uma reta igual à reta dada.

Sejam, por um lado, o ponto dado A, e, por outro lado, a reta dada BC; é preciso, então, pôr, no ponto A, uma reta igual à reta dada BC.



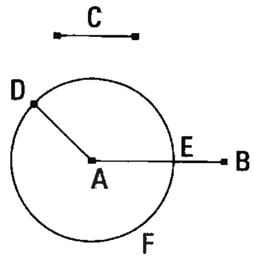
Fique, pois, ligada, do ponto A até o ponto B, a reta AB, e fique construído sobre ela o triângulo equilátero DAB, e fiquem prolongadas sobre uma reta com as DA, DB as retas AE, BF, e, por um lado, com o centro B e, por outro lado, com a distância BC, fique descrito o círculo CGH, e, de novo, com o centro D e a distância DG, fique descrito o círculo GKL.

Como, de fato, o ponto B é centro do círculo CGH, a BC é igual à BG. De novo, como o ponto D é centro do círculo KLG, a DL é igual à DG, das quais a DA é igual à DB. Portanto, a restante AL é igual à restante BG. Mas também a BC foi provada igual à BG; portanto, cada uma das AL, BC é igual à BG. Mas as coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si; portanto, também a AL é igual à BC.

Portanto, no ponto dado A, foi posta a reta AL igual à reta dada BC; o que era preciso fazer.

3.

Dadas duas retas desiguais, subtrair da maior uma reta igual à menor.



Sejam as duas retas desiguais dadas AB, C, das quais seja maior a AB; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual à menor C.

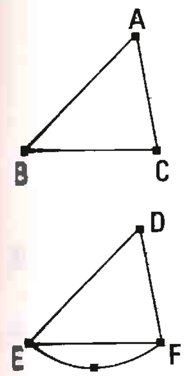
Fique posta no ponto A a AD igual à C; e, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AD, fique descrito o círculo DEF.

E, como o ponto A é centro do círculo DEF, a AE é igual à AD; mas também a C é igual à AD. Portanto, cada uma das AE, C é igual à AD; desse modo, também a AE é igual à C.

Portanto, dadas as duas retas desiguais AB, C, foi subtraída da maior AB a AE igual à menor C; o que era preciso fazer.

4.

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais.



Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB ao DE, e, por outro lado, o AC ao DF, e o ângulo sob BAC igual ao ângulo sob EDF. Digo que também a base BC é igual à base EF, e o triângulo ABC será igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais, por um lado, o sob ABC ao sob o DEF e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE.

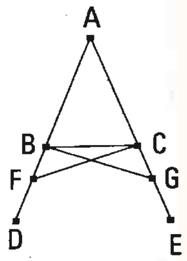
Pois, o triângulo ABC, sendo ajustado sobre o triângulo DEF, e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustará sobre o E, por ser a AB igual à DE; então, tendo se ajustado a AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; desse modo, também o ponto C se ajustará sobre o ponto F, por ser, de novo, a AC igual à DF. Mas, por certo, também o B ajustou-se sobre o E; desse modo, a base BC se ajustará sobre a base EF. Pois se a base BC, tendo, por um lado, o B se ajustado sobre o E, e, por outro lado, o C sobre o F, não se ajustar sobre a EF, duas retas conterão uma área; o que é impossível. Portanto, a base BC ajustar-se-á sobre a EF e será igual a ela;

desse modo, também o triângulo ABC todo se ajustará sobre o triângulo DEF todo e será igual a ele, e os ângulos restantes ajustar-se-ão sobre os ângulos restantes e serão iguais a eles, por um lado, o sob ABC ao sob DEF, e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; o que era preciso provar.

5.

Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si.



Seja o triângulo isósceles ABC, tendo o lado AB igual ao lado AC, e fiquem prolongadas ainda mais as retas BD, CE sobre uma reta com as AB, AC; digo que, por um lado, o ângulo sob ABC é igual ao sob ACB, e, por outro lado, o sob CBD, ao sob BCE.

Fique, pois, tomado sobre a BD o ponto F, encontrado ao acaso, e fique subtraída da maior AE a AG igual à menor AF, e fiquem ligadas as retas FC, GB.

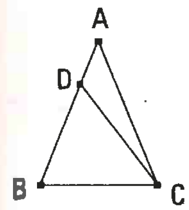
Como, de fato, por um lado, a AF é igual à AG, e, por outro lado, a AB, à AC, então, as duas FA, AC são iguais às duas GA, AB, cada uma a cada uma; e contêm o ângulo sob FAG comum; portanto, a base FC é igual à base GB, e o triângulo AFC será igual ao triângulo AGB, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais, por um lado, o sob ACF ao sob ABG, e, por outro lado, o sob AFC ao sob AGB. E, como a AF toda é igual à AG toda, das quais a AB é igual à AC, portanto, a restante BF é igual à restante CG. Mas também a FC foi provada igual à GB; então, as duas BF, FC são iguais às duas CG, GB, cada uma a cada uma; também o ângulo sob BFC é igual ao ângulo sob

CGB, e a base BC deles é comum; portanto, também o triângulo BFC será igual ao triângulo CGB, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, por um lado, o sob FBC é igual ao sob GCB, e, por outro lado, o sob BCF ao sob CBG. Como, de fato, o ângulo sob ABG todo foi provado igual ao ângulo sob ACF todo, dos quais o sob CBG é igual ao sob BCF, portanto, o sob ABC restante é igual ao sob ACB restante; e estão junto à base do triângulo ABC. Mas foi provado também o sob FBC igual ao sob GCB; e estão sob a base.

Portanto, os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si; o que era preciso provar.

6.

Caso os dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, também os lados que se estendem sob os ângulos iguais serão iguais entre si.



Seja o triângulo ABC, tendo o ângulo sob ABC igual ao ângulo sob ACB; digo que também o lado AB é igual ao lado AC.

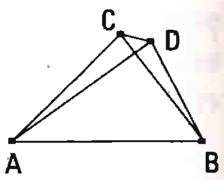
Pois, se a AB é desigual à AC, uma delas é maior. Seja maior a AB, e fique subtraída da maior AB a DB igual à menor AC, e fique ligada a DC.

Como, de fato, a DB é igual à AC, e a BC é comum, então, as duas DB, BC são iguais às duas AC, CB, cada uma a cada uma, e o ângulo sob DBC é igual ao ângulo sob ACB; portanto, a base DC é igual à base AB e o triângulo DBC será igual ao triângulo ACB, o menor, ao maior; o que é absurdo; portanto, a AB não é desigual à AC; portanto, é igual.

Portanto, caso os dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, também os lados que se estendem sob os ângulos iguais serão iguais entre si; o que era preciso provar.

7.

Sobre a mesma reta não serão construídas duas outras retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades que as retas do começo.



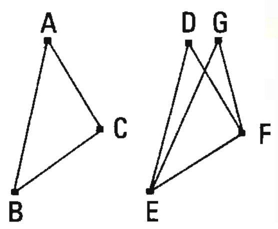
Pois, se possível, sobre a mesma reta AB fiquem construídas as duas retas AD, DB, iguais às mesmas retas AC, CB, cada uma a cada uma, sobre um e outro ponto, tanto o C quanto D, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades, de modo a ser, por um lado, a CA igual à DA, tendo a mesma extremidade A com ela, e, por outro lado, a CB, à DB, tendo a mesma extremidade B com ela, e fique ligada a CD.

Como, de fato, a AC é igual à AD, também o ângulo sob ACD é igual ao sob ADC; portanto, o sob ADC é maior do que o sob DCB; portanto, o sob CDB é, por muito, maior do que o sob DCB. De novo, como a CB é igual à DB, também o ângulo sob CDB é igual ao ângulo sob DCB. Mas foi também provado maior, por muito, do que ele; o que é impossível.

Portanto, sobre a mesma reta não serão construídas duas outras retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades que as retas do começo; o que era preciso provar.

8.

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham também a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais.



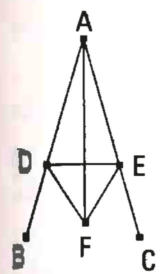
Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB, ao DE, e, por outro lado, o AC, ao DF; tenham, também a base BC igual à base EF; digo que o ângulo sob BAC é igual ao ângulo sob EDF.

Sendo, pois, ajustado o triângulo ABC sobre o triângulo DEF e, sendo postos, por um lado, o ponto B sobre o ponto E, e, por outro lado, a reta BC sobre a EF, também o ponto C se ajustará sobre o F, por ser a BC igual à EF; então, tendo se ajustado a BC sobre a EF, também se ajustarão as BA, CA sobre as ED, DF. Se, pois, por um lado, a base BC se ajustar sobre a base EF, e, por outro lado, os lados BA, AC não se ajustarem sobre os ED, DF, mas passarem além, como as EG, GF, serão construídas sobre a mesma reta duas retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, sobre o mesmo lado, tendo as mesmas extremidades. Mas não são construídas; não, portanto, sendo ajustada a base BC sobre a base EF, não se ajustarão também os lados BA, AC sobre os ED, DF. Portanto, ajustar-se-ão; desse modo, também o ângulo sob BAC ajustar-se-á sobre o ângulo sob EDF e será igual a ele.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais; o que era preciso provar.

9.

Cortar em dois o ângulo retilíneo dado.

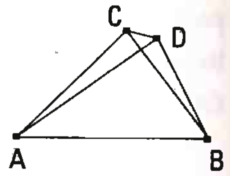


Seja o ângulo retilíneo d...
cortá-lo em dois.
Fique to...
e fic...
DE, ...
DEF, ...
cortado
Pois, como a AD é ig...
são iguais às duas EA, AF,
a base EF; portanto, o ângu...
Portanto, o ângulo retilín...
reta AF; o que era preciso faze...

lad... HC
parti... igual
retos c... C. E são
Fique ... reta, faça
do ao acaso, ...uais é reto, e
construído so... que se alteou.
digo que foi tra... ...tada dada AB, a
a partir do ponto ... era preciso fazer.
Pois, como a DC ...
são iguais às duas EC, ...
FE; portanto, o ângulo so...
tes. Mas quando uma reta, ...

7.

Sobre a mesma reta não serão construídas duas outras retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades que as retas do começo.



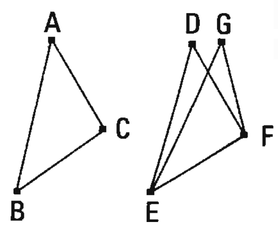
Pois, se possível, sobre a mesma reta AB fiquem construídas as duas retas AD, DB, iguais às mesmas retas AC, CB, cada uma a cada uma, sobre um e outro ponto, tanto o C quanto D, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades, de modo a ser, por um lado, a CA igual à DA, tendo a mesma extremidade A com ela, e, por outro lado, a CB, à DB, tendo a mesma extremidade B com ela, e fique ligada a CD.

Como, de fato, a AC é igual à AD, também o ângulo sob ACD é igual ao sob ADC; portanto, o sob ADC é maior do que o sob DCB; portanto, o sob CDB é, por muito, maior do que o sob DCB. De novo, como a CB é igual à DB, também o ângulo sob CDB é igual ao ângulo sob DCB. Mas foi também provado maior, por muito, do que ele; o que é impossível.

Portanto, sobre a mesma reta não serão construídas duas outras retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades que as retas do começo; o que era preciso provar.

8.

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham também a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais.



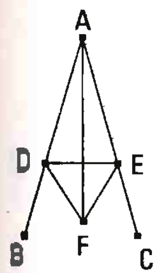
Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB, ao DE, e, por outro lado, o AC, ao DF; tenham, também a base BC igual à base EF; digo que o ângulo sob BAC é igual ao ângulo sob EDF.

Sendo, pois, ajustado o triângulo ABC sobre o triângulo DEF e, sendo postos, por um lado, o ponto B sobre o ponto E, e, por outro lado, a reta BC sobre a EF, também o ponto C se ajustará sobre o F, por ser a BC igual à EF; então, tendo se ajustado a BC sobre a EF, também se ajustarão as BA, CA sobre as ED, DF. Se, pois, por um lado, a base BC se ajustar sobre a base EF, e, por outro lado, os lados BA, AC não se ajustarem sobre os ED, DF, mas passarem além, como as EG, GF, serão construídas sobre a mesma reta duas retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, sobre o mesmo lado, tendo as mesmas extremidades. Mas não são construídas; não, portanto, sendo ajustada a base BC sobre a base EF, não se ajustarão também os lados BA, AC sobre os ED, DF. Portanto, ajustar-se-ão; desse modo, também o ângulo sob BAC ajustar-se-á sobre o ângulo sob EDF e será igual a ele.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais; o que era preciso provar.

9.

Cortar em dois o ângulo retilíneo dado.



Seja o ângulo retilíneo dado o sob BAC; é preciso, então, cortá-lo em dois.

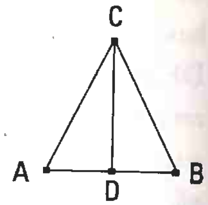
Fique tomado sobre a AB o ponto D, encontrado ao acaso, e fique subtraída da AC a AE igual à AD, e fique ligada a DE, e fique construído sobre a DE o triângulo equilátero DEF, e fique ligada a AF; digo que o ângulo sob BAC foi cortado em dois pela reta AF.

Pois, como a AD é igual à AE, e a AF é comum, então, as duas DA, AF são iguais às duas EA, AF, cada uma a cada uma. Também a base DF é igual à base EF; portanto, o ângulo sob DAF é igual ao ângulo sob EAF.

Portanto, o ângulo retilíneo dado, o sob BAC, foi cortado em dois pela reta AF; o que era preciso fazer.

10.

Cortar em duas a reta limitada dada.



Seja a reta limitada dada AB; é preciso, então, cortar a reta limitada AB em duas.

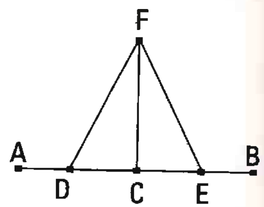
Fique construído sobre ela o triângulo equilátero ABC, e fique cortado o ângulo sob ACB em dois pela reta CD; digo que a reta AB foi cortada em duas no ponto D.

Pois, como a AC é igual à CB, e a CD é comum, então, as duas AC, CD são iguais às duas BC, CD, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ACD é igual ao ângulo sob BCD; portanto, a base AD é igual à base BD.

Portanto, a reta limitada dada AB foi cortada em duas no D; o que era preciso fazer.

11.

Traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta dada a partir do ponto dado sobre ela.



Sejam, por um lado, a reta dada AB, e, por outro lado, o ponto dado C sobre ela; é preciso, então, a partir do ponto C, traçar uma linha reta em ângulos retos com a reta AB.

Fique tomado sobre a AC o ponto D, encontrado ao acaso, e fique posta a CE igual à CD, e fique construído sobre a DE o triângulo equilátero FDE, e fique ligada a FC; digo que foi traçada a linha reta FC em ângulos retos com a reta dada AB, a partir do ponto dado C sobre ela.

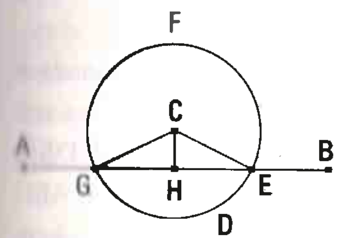
Pois, como a DC é igual à CE, e a CF é comum, então, as duas DC, CF são iguais às duas EC, CF, cada uma a cada uma; e a base DF é igual à base FE; portanto, o ângulo sob DCF é igual ao ângulo sob ECF; e são adjacentes. Mas quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos

adjacentes iguais entre si, cada um dos ângulos iguais é reto; portanto, cada um dos sob DCF, FCE é reto.

Portanto, foi traçada a linha reta CF em ângulos retos com a reta dada AB, a partir do ponto dado C sobre ela; o que era preciso fazer.

12.

Traçar uma linha reta perpendicular à reta ilimitada dada, a partir do ponto dado, que não está sobre ela.



Sejam, por um lado, a reta ilimitada dada AB, e, por outro lado, o ponto dado C, que não está sobre ela; é preciso, então, traçar uma linha reta perpendicular à reta ilimitada dada AB, a partir do ponto dado C, que não está sobre ela.

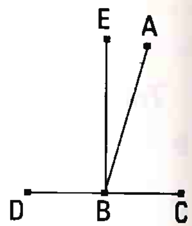
Fique, pois, tomado, no outro lado da reta AB, o ponto D, encontrado ao acaso, e, por um lado, com o centro C, e, por outro lado, com a distância CD, fique descrito o círculo EFG, e fique cortada a reta EG em duas no H, e fiquem ligadas as retas CG, CH, CE; digo que foi traçada a perpendicular CH à reta ilimitada dada AB, a partir do ponto dado C, que não está sobre ela.

Pois, como a GH é igual à HE, e a HC é comum, então, as duas GH, HC são iguais às duas EH, HC, cada uma a cada uma; também a base CG é igual à base CE; portanto, o ângulo sob CHG é igual ao ângulo sob EHC. E são adjacentes. Mas quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais entre si, cada um dos ângulos iguais é reto, e a reta que foi alteada é chamada perpendicular àquela sobre a que se alteou.

Portanto, foi traçada a perpendicular CH à reta ilimitada dada AB, a partir do ponto dado C, que não está sobre ela; o que era preciso fazer.

13.

Caso uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos, fará ou dois retos ou iguais a dois retos.



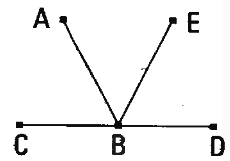
Faça, pois, alguma reta, a AB, tendo sido alteada sobre a reta CD, os ângulos sob CBA, ABD; digo que os ângulos sob CBA, ABD ou são dois retos ou iguais a dois retos.

Se, por um lado, de fato, o sob CBA é igual ao sob ABD, são dois retos. Se, por outro lado, não, fique traçada a BE em ângulos retos com a [reta] CD, a partir do ponto B; portanto, os sob CBE, EBD são dois retos; e, como o sob CBE é igual aos dois, os sob CBA, ABE, fique adicionado o sob EBD comum; portanto, os sob CBE, EBD são iguais aos três, os sob CBA, ABE, EBD. De novo, como o sob DBA é igual aos dois, os sob DBE, EBA, fique adicionado o sob ABC comum; portanto, os sob DBA, ABC são iguais aos três, os sob DBE, EBA, ABC. Mas foram provados também os sob CBE, EBD iguais aos mesmos três; e as coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si; portanto, também os sob CBE, EBD são iguais aos sob DBA, ABC; mas os sob CBE, EBD são dois retos; portanto, também os sob DBA, ABC são iguais a dois retos.

Portanto, caso uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos, fará ou dois retos ou iguais a dois retos; o que era preciso provar.

14.

Caso, com alguma reta e no ponto sobre ela, duas retas, não postas no mesmo lado, façam os ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas estarão sobre uma reta, uma com a outra.



Façam, pois, com alguma reta, a AB, e no ponto B sobre ela, as duas retas BC, BD, não postas no mesmo lado, os ângulos adjacentes, os sob ABC, ABD, iguais a dois retos; digo que a BD está sobre uma reta com a CB.

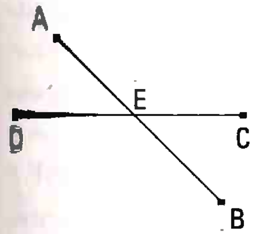
Pois, se a BD não está sobre uma reta com a BC, esteja a BE sobre uma reta com a CB.

Como, de fato, a reta AB foi alteada sobre a reta CBE, portanto, os ângulos sob ABC, ABE são iguais a dois retos; mas também os sob ABC, ABD são iguais a dois retos; portanto, os sob CBA, ABE são iguais aos sob CBA, ABD. Fique subtraído o sob CBA comum; portanto, o sob ABE restante é igual ao sob ABD restante, o menor, ao maior; o que é impossível. Portanto, a BE não está sobre uma reta com a CB. Do mesmo modo, então, provaremos que nenhuma está, exceto a BD; portanto, a CB está sobre uma reta com a BD.

Portanto, caso com alguma reta e no ponto sobre ela duas retas, não postas no mesmo lado, façam os ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas estarão sobre uma reta, uma com a outra; o que era preciso provar.

15.

Caso duas retas se cortem, fazem os ângulos no vértice iguais entre si.



Cortem-se, pois, as retas AB, CD no ponto E; digo que, por um lado, o ângulo sob AEC é igual ao sob DEB, e, por outro lado, o sob CEB, ao sob AED.

Pois, como a reta AE foi alteada sobre a reta CD, fazendo os ângulos sob CEA, AED, portanto, os ângulos sob CEA, AED são iguais a dois retos. De novo, como a reta DE foi alteada sobre a reta AB, fazendo os ângulos sob AED, DEB, portanto, os ângulos sob AED, DEB são iguais a dois retos. Mas foram provados também os sob CEA, AED iguais a dois retos; portanto, os sob CEA, AED são iguais aos sob AED, DEB. Fique subtraído o sob AED comum; portanto, o sob CEA restante é igual ao sob BED restante; do mesmo modo, então, será provado que também os sob CEB, DEA são iguais.

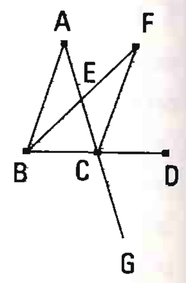
Portanto, caso duas retas se cortem, fazem os ângulos no vértice iguais entre si; o que era preciso provar.

[Corolário

Disso, então, é evidente que, caso duas retas se cortem, farão os ângulos junto à seção iguais a quatro retos.]

16.

Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é maior do que cada um dos ângulos interiores e opostos.



Seja o triângulo ABC, e fique prolongado um lado dele, o BC, até o D; digo que o ângulo exterior, o sob ACD, é maior do que cada um dos ângulos sob CBA, BAC, interiores e opostos.

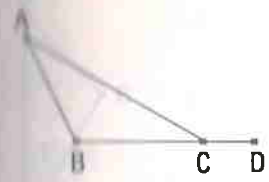
Fique cortada a AC em duas no E, e, tendo sido ligada a BE, fique prolongada sobre uma reta até o F, e fique posta a EF igual à BE, e fique ligada a FC, e fique traçada através a AC até o G.

Como, de fato, por um lado, a AE é igual à EC, e, por outro lado, a BE, à EF, então, as duas AE, EB são iguais às duas CE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob AEB é igual ao ângulo sob FEC; pois, estão no vértice; portanto, a base AB é igual à base FC, e o triângulo ABE é igual ao triângulo FEC, e os ângulos restantes são iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o sob BAE é igual ao sob ECF. Mas o sob ECD é maior do que o sob ECF; portanto, o sob ACD é maior do que o sob BAE. Do mesmo modo, então, cortada a BC em duas, será provado também o sob BCG, isto é, também o sob ACD maior do que o sob ABC.

Portanto, tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é maior do que cada um dos ângulos interiores e opostos; o que era preciso provar.

17.

Os dois ângulos de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são menores do que dois retos.



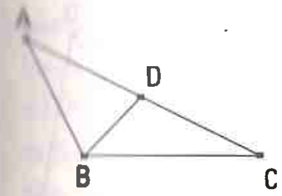
Seja o triângulo ABC; digo que os dois ângulos do triângulo ABC, sendo tomados juntos de toda maneira, são menores do que dois retos.

Fique, pois, prolongada a BC até o D. E, como o ângulo sob ACD é exterior do triângulo ABC, é maior do que o sob ABC, interior e oposto. Fique adicionado o sob ACB comum; portanto, os sob ACD, ACB são maiores do que os sob ABC, BCA. Mas os sob ACD, ACB são iguais a dois retos; portanto, os sob ABC, BCA são menores do que dois retos. Do mesmo modo, então, provaremos que também os sob BAC, ACB, e ainda os sob CAB, ABC são menores do que dois retos.

Portanto, os dois ângulos de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são menores do que dois retos; o que era preciso provar.

18.

O maior lado de qualquer triângulo subtende o maior ângulo.



Seja, pois, o triângulo ABC, tendo o lado AC maior do que o AB; digo que também o ângulo sob ABC é maior do que o sob BCA.

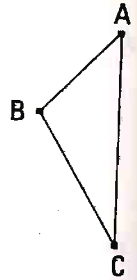
Pois, como a AC é maior do que a AB, fique posta a AD igual à AB, e fique ligada a BD.

E, como o ângulo sob ADB é exterior do triângulo BCD, é maior do que o sob DCB, interior e oposto; mas o sob ADB é igual ao sob ABD, visto que também o lado AB é igual ao AD; portanto, também o sob ABD é maior do que o sob ACB; portanto, o sob ABC é, por muito, maior do que o sob ACB.

Portanto, o maior lado de todo triângulo subtende o maior ângulo; o que era preciso provar.

19.

O maior lado de todo triângulo é subtendido pelo maior ângulo.



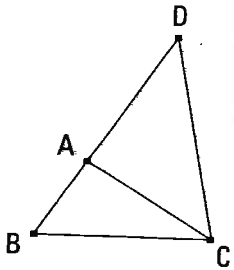
Seja o triângulo ABC, tendo o ângulo sob ABC maior do que o sob BCA; digo que também o lado AC é maior do que o lado AB.

Pois, se não, ou a AC é igual à AB ou menor; por um lado, de fato, a AC não é igual à AB; pois, também o ângulo sob ABC era igual ao sob ACB; e não é; portanto, a AC não é igual à AB. Nem, por certo, a AC é menor do que a AB; pois, também o ângulo sob ABC era menor do que o sob ACB; e não é; portanto, a AC não é menor do que a AB. Mas, foi provado que nem é igual. Portanto, a AC é maior do que a AB.

Portanto, o maior lado de todo triângulo é subtendido pelo maior ângulo; o que era preciso provar.

20.

Os dois lados de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são maiores do que o restante.



Seja, pois, o triângulo ABC; digo que os dois lados do triângulo ABC, sendo tomados juntos de toda maneira, são maiores do que o restante, por um lado, os BA, AC, do que o BC, e, por outro lado, os AB, BC, do que o AC, enquanto os BC, CA, do que o AB.

Fique, pois, traçada através a BA até o ponto D, e fique posta a AD igual à CA, e fique ligada a DC.

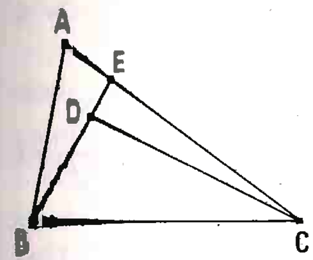
Como, de fato, a DA é igual à AC, também o ângulo sob ADC é igual ao sob ACD; portanto, o sob BCD é maior do que o sob ADC; e, como o DCB é um triângulo, tendo o ângulo sob BCD maior do que o sob BDC, e o maior lado é subtendido pelo maior ângulo, portanto, a DB é maior do que a BC. Mas a DA é igual à AC; portanto, as BA, AC são

maiores do que a BC. Do mesmo modo, então, provaremos que também, por um lado, as AB, BC são maiores do que a CA, e, por outro lado, as BC, CA, do que a AB.

Portanto, os dois lados de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são maiores do que o restante; o que era preciso provar.

21.

Caso duas retas sejam construídas interiores sobre um dos lados de um triângulo, a partir das extremidades, as que foram construídas, por um lado, serão menores do que os dois lados restantes do triângulo, e, por outro lado, conterão um ângulo maior.



Fiquem, pois, construídas as duas retas interiores BD, DC sobre um dos lados, o BC, do triângulo ABC, a partir das extremidades B, C; digo que as BD, DC, por um lado, são menores do que os dois lados restantes BA, AC do triângulo, e, por outro lado, contêm o ângulo sob BDC maior do que o sob BAC.

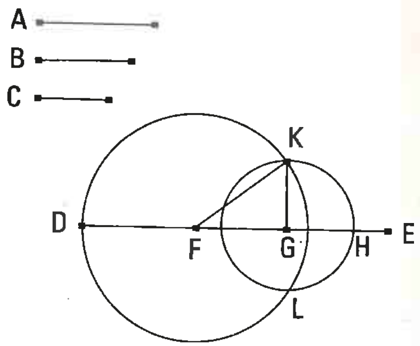
Fique, pois, traçada através a BD até o E. E, como os dois lados de todo triângulo são maiores do que o restante, portanto, os dois lados AB, AE do triângulo ABE são maiores do que o BE; fique adicionada a EC comum; portanto, as BA, AC são maiores do que as BE, EC. De novo, como os dois lados CE, ED do triângulo CED são maiores do que a CD, fique adicionada a DB comum; portanto, as CE, EB são maiores do que as CD, DB. Mas, as BA, AC foram provadas maiores do que as BE, EC; portanto, as BA, AC são, por muito, maiores do que as BD, DC.

De novo, como o ângulo exterior de todo triângulo é maior do que o interior e oposto, portanto, o ângulo sob BDC, exterior do triângulo CDE, é maior do que o sob CED. Pelas mesmas coisas, então, também o ângulo sob CEB, exterior do triângulo ABE, é maior do que o sob BAC. Mas foi provado o sob BDC maior do que o sob CEB; portanto, o sob BDC é, por muito, maior do que o sob BAC.

Portanto, caso duas retas sejam construídas interiores sobre um dos lados de um triângulo, a partir das extremidades, as que foram construídas, por um lado, são menores do que os dois lados restantes do triângulo, e, por outro lado, contêm um ângulo maior; o que era preciso provar.

22.

De três retas, que são iguais às três [retas] dadas, construir um triângulo; e é preciso as duas, sendo tomadas juntas de toda maneira, ser maiores do que a restante [pelo ser os dois lados de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, maiores do que o restante].



Sejam as retas dadas A, B, C, das quais sejam as duas, sendo tomadas juntas de toda maneira, maiores do que a restante, por um lado, as A, B, do que a C, e, por outro lado, as A, C, do que a B, e ainda as B, C, do que a A; é preciso, então, das três retas iguais às A, B, C, construir um triângulo.

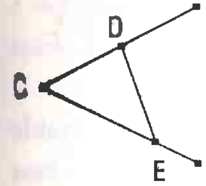
Fique posta alguma reta, a DE, por um lado, limitada no D, e, por outro lado, ilimitada no E, e fiquem postas, por um lado, a DF igual à A, e, por outro lado, a FG igual à B, enquanto a GH igual à C; e, por um lado, com o centro F, e, por outro lado, com a distância FD, fique descrito o círculo DKL; de novo, por um lado, com o centro G, e, por outro lado, com a distância GH, fique descrito o círculo KLH, e fiquem ligadas as KF, KG; digo que, das três retas iguais às A, B, C, foi construído o triângulo KFG.

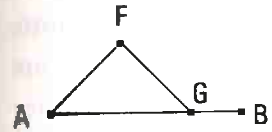
Pois, como o ponto F é centro do círculo DKL, a FD é igual à FK; mas a FD é igual à A. Portanto, também a KF é igual à A. De novo, como o ponto G é centro do círculo LKH, a GH é igual à GK; mas a GH é igual à C; portanto, também a KG é igual à C. Mas também a FG é igual à B; portanto, as três retas KF, FG, GK são iguais às três A, B, C.

Portanto, das três retas KF, FG, GK, que são iguais às três dadas A, B, C, foi construído o triângulo KFG; o que era preciso fazer.

23.

Sobre a reta dada e no ponto sobre ela, construir um ângulo retilíneo igual ao ângulo retilíneo dado.





Sejam, por um lado, a reta dada AB, e, por outro lado, o ponto A sobre ela, enquanto o ângulo retilíneo dado o sob DCE; é preciso, então, sobre a reta dada AB e no ponto A sobre ela, construir um ângulo retilíneo igual ao ângulo retilíneo dado, o sob DCE.

Fiquem tomados, sobre cada uma das CD, CE, os pontos D, E, encontrados ao acaso, e fique ligada a DE; e, de três retas, que são iguais às três CD, DE, CE, fique construído o triângulo AFG, de modo a ser, por um lado, a CD igual à AF, e, por outro lado, a CE, à AG, e ainda a DE, à FG.

Como, de fato, as duas DC, CE são iguais às duas FA, AG, cada uma a cada uma, também a base DE é igual à base FG, portanto, o ângulo sob DCE é igual ao ângulo sob FAG.

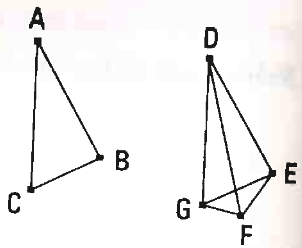
Portanto, sobre a reta dada AB e no ponto A sobre ela foi construído o ângulo retilíneo, o sob FAG, igual ao ângulo retilíneo dado, o sob DCE; o que era preciso fazer.

24.

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, mas tenham o ângulo maior do que o ângulo, o contido pelas retas iguais, também terão a base maior do que a base.

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, a AB, à DE, e, por outro lado, a AC, à DF, e o ângulo junto ao A seja maior do que o ângulo junto ao D; digo que também a base BC é maior do que a base EF.

Pois, como o ângulo sob BAC é maior do que o ângulo sob EDF, fique construído sobre a reta DE, e no ponto D sobre ela, o sob EDG igual ao ângulo sob BAC, e fique posta a DG igual a qualquer uma das AC, DF, e fiquem ligadas as EG, FG.



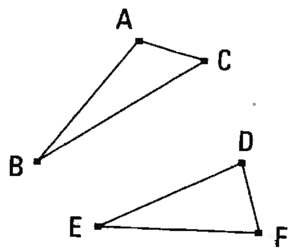
Como, de fato, por um lado, a AB é igual à DE, e, por outro lado, a AC, à DG, então, as duas BA, AC são iguais às duas ED, DG, cada uma a cada uma; e o ângulo sob BAC é igual ao ângulo sob EDG; portanto, a base BC é igual à base EG. De novo, como a DF é igual à DG, também o ângulo sob DGF é igual ao sob DFG; portanto, o sob DFG é maior do que o sob EGF; portanto, o sob EFG é, por muito, maior do que o sob EGF. E, como o EFG é um triângulo, tendo o ângulo sob EFG maior do que o sob EGF, mas o maior lado é subtendido pelo maior ângulo, portanto, também o lado EG é maior do que o EF. Mas a EG é igual à BC; portanto, também a BC é maior do que a EF.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais aos dois lados, cada um a cada um, mas tenham o ângulo maior do que o ângulo, o contido pelas retas iguais, também terão a base maior do que a base; o que era preciso provar.

25.

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais aos dois lados, cada um a cada um, mas tenham a base maior do que a base, também terão o ângulo maior do que o ângulo, o contido pelas retas iguais.

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, a AB, à DE, e, por outro lado, a AC, à DF; e a base BC seja maior do que a base EF; digo que também o ângulo sob BAC é maior do que o ângulo sob EDF.

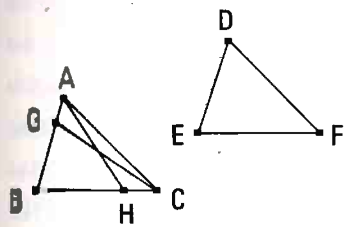


Pois, se não, ou é igual a ele ou menor; por um lado, de fato, o sob BAC não é igual ao sob EDF; pois, também a base BC era igual à base EF; e não é. Portanto, o ângulo sob BAC não é igual ao sob EDF; por outro lado, por certo, o sob BAC não é menor do que o sob EDF; pois, também a base BC era menor do que a base EF; e não é; portanto, o ângulo sob BAC não é menor do que o sob EDF. Mas, foi provado que nem igual; portanto, o sob BAC é maior do que o sob EDF.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais aos dois lados, cada um a cada um, mas tenham a base maior do que a base, também terão o ângulo maior do que o ângulo, o contido pelas retas iguais; o que era preciso provar.

26.

Caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, [cada um a cada um,] e o ângulo restante ao ângulo restante.



Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob DEF, EFD, cada um a cada um, por um lado, o sob ABC, ao sob DEF, e, por outro lado, o sob BCA, ao sob EFD; e tenham também um lado igual a um lado, primeiramente o junto aos ângulos iguais, a BC, à EF; digo que também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, cada um a cada um, por um lado, a AB, à DE, e, por outro lado, a AC, à DF, e o ângulo restante, ao ângulo restante, o sob BAC, ao sob EDF.

Pois, se a AB é desigual à DE, uma delas é maior. Seja maior a AB, e fique posta a BG igual à DE, e fique ligada a GC.

Como, de fato, por um lado, a BG é igual à DE, e, por outro lado, a BC, à EF, então, as duas BG, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob GBC é igual ao ângulo sob DEF; portanto, a base GC é igual à base DF, e o triângulo GBC é igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob GCB é igual ao sob DFE. Mas o sob DFE foi suposto igual ao sob BCA; portanto, também o sob BCG é igual ao sob BCA, o menor, ao maior; o que é impossível.

Portanto, a AB não é desigual à DE. Portanto, é igual. Mas também a BC é igual à EF; então, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob DEF; portanto, a base AC é igual à base DF, e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante.

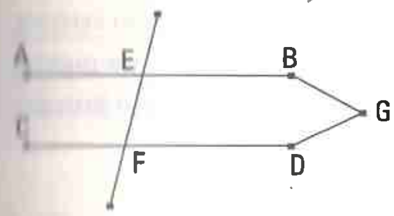
Mas, então, de novo, sejam iguais os lados que se estendem sob os ângulos iguais, como a AB, à DE; digo, de novo, que também os lados restantes serão iguais aos lados restantes, a AC, à DF, enquanto a BC, à EF, e ainda o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante.

Pois, se a BC é desigual à EF, uma delas é maior. Seja maior, se possível, a BC, e fique posta a BH igual à EF, e fique ligada AH. E, como, por um lado, a BH é igual à EF, e, por outro lado, a AB à DE, então, as duas AB, BH são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e contêm ângulos iguais; portanto, a base AH é igual à base DF, e o triângulo ABH é igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob BHA é igual ao sob EFD. Mas o sob EFD é igual ao sob BCA; então, o ângulo exterior, o sob BHA, do triângulo AHC é igual ao sob BCA, interior e oposto; o que é impossível. Portanto, a BC não é desigual à EF; portanto, é igual. Mas também a AB é igual à DE. Então, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e contêm ângulos iguais; portanto, a base AC é igual à base DF, e o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF, e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, terão também os lados restantes iguais aos lados restantes e o ângulo restante ao ângulo restante; o que era preciso provar.

27.

Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, as retas serão paralelas entre si.

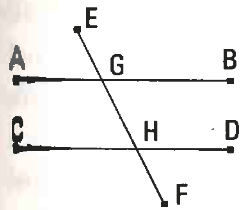


Faça, pois, a reta EF, caindo sobre as duas retas AB, CD, os ângulos sob AEF, EFD, alternos, iguais entre si; digo que a AB é paralela à CD. Pois, se não, sendo prolongadas, as AB, CD encontrar-se-ão ou no lado dos B, D ou no dos A, C. Fiquem prolongadas e encontrem-se no lado dos B, D no G. Então, o ângulo sob AEF, exterior do triângulo GEF, é igual ao sob EFG, interior e oposto; o que é impossível; portanto, as AB, CD, sendo prolongadas, não se encontrarão no lado dos B, D. Do mesmo modo, então, será provado que nem no dos A, C. Mas as que não se encontram em nenhum dos lados são paralelas; portanto, a AB é paralela à CD.

Portanto, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, as retas serão paralelas; o que era preciso provar.

28.

Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto e no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas entre si.



Faça, pois, a reta EF, caindo sobre as retas AB, CD, o ângulo sob EGB, exterior, igual ao ângulo sob GHD, interior e oposto ou os sob BGH, GHD, interiores e no mesmo lado, iguais a dois retos; digo que a AB é paralela à CD.

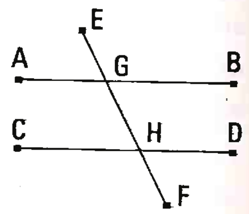
Pois, como o sob EGB é igual ao sob GHD, mas o sob EGB é igual ao sob AGH, portanto, também o sob AGH é igual ao sob GHD; e são alternos; portanto, a AB é paralela à CD.

De novo, como os sob BGH, GHD são iguais a dois retos, mas também os sob AGH, BGH são iguais a dois retos, portanto, os sob AGH, BGH são iguais aos sob BGH, GHD; fique subtraído o sob BGH comum; portanto, o sob AGH restante é igual ao sob GHD restante; e são alternos; portanto, a AB é paralela à CD.

Portanto, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto e no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas; o que era preciso provar.

29.

A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.



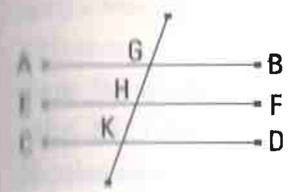
Caia, pois, a reta EF sobre as retas paralelas AB, CD; digo que faz os ângulos sob AGH, GHD, alternos, iguais, e o ângulo sob EGB, exterior, igual ao sob GHD, interior e oposto, e os sob BGH, GHD, interiores e no mesmo lado, iguais a dois retos.

Pois, se o sob AGH é desigual ao sob GHD, um deles é maior. Seja maior o sob AGH; fique adicionado o sob BGH comum; portanto, os sob AGH, BGH são maiores do que os sob BGH, GHD. Mas os sob AGH, BGH são iguais a dois retos. Portanto, [também] os sob BGH, GHD são menores do que dois retos. Mas as que são prolongadas ilimitadamente, a partir dos menores do que dois retos, encontram-se; portanto, as AB, CD, prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão; e não se encontram, pelo supô-las paralelas; portanto, o sob AGH não é desigual ao sob GHD; portanto, é igual. Mas o sob AGH é igual ao sob EGB; portanto, também o sob EGB é igual ao sob GHD. Fique adicionado o sob BGH comum; portanto, os sob EGB, BGH são iguais aos sob BGH, GHD. Mas os sob EGB, BGH são iguais a dois retos; portanto, também os sob BGH, GHD são iguais a dois retos.

Portanto, a reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos; o que era preciso provar.

30.

As paralelas à mesma reta são paralelas entre si.



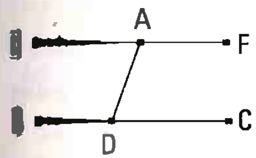
Seja cada uma das AB, CD paralela à EF; digo que também a AB é paralela à CD.

Caia, pois, a reta GK sobre elas. E, como a reta GK caiu sobre as retas paralelas AB, EF, portanto, o sob AGK é igual ao sob GHF. De novo, como a reta GK caiu sobre as paralelas EF, CD, o sob GHF é igual ao sob GKD. Mas foi provado também o sob AGK igual ao sob GHF. Portanto, também o sob AGK é igual ao sob GKD; e são alternos. Portanto, a AB é paralela à CD.

[Portanto, as paralelas à mesma reta são paralelas entre si;] o que era preciso provar.

31.

Pelo ponto dado, traçar uma linha reta paralela à reta dada.



Sejam, por um lado, o ponto dado A, e, por outro lado, a reta dada BC; é preciso, então, pelo ponto A, traçar uma linha reta paralela à reta dada BC.

Fique tomado, sobre a BC, o ponto D, encontrado ao acaso, e fique ligada a AD; e fique construído, sobre a reta DA e no ponto A sobre ela, o sob DAE igual ao ângulo sob ADC; e fique prolongada a reta AF sobre uma reta com a EA.

E, como a reta AD, caindo sobre as duas retas BC, EF, fez os ângulos sob EAD, ADC, alternos, iguais entre si, portanto, a EAF é paralela à BC.

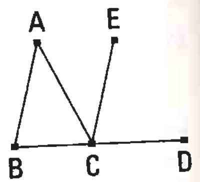
Portanto, pelo ponto dado A, foi traçada a linha reta EAF paralela à reta dada BC; o que era preciso fazer.

32.

Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos.

Seja o triângulo ABC, e fique prolongado um lado dele, o BC, até o D; digo que o ângulo sob ACD, exterior, é igual aos dois sob CAB, ABC, interiores e opostos, e os três ângulos sob ABC, BCA, CAB, interiores do triângulo, são iguais a dois retos.

Fique, pois, traçada, pelo ponto C, a CE paralela à reta AB.



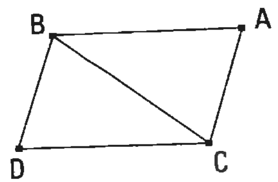
E, como a AB é paralela à CE, e a AC caiu sobre elas, os ângulos sob BAC, ACE, alternos, são iguais entre si. De novo, como a AB é paralela à CE, e a reta BD caiu sobre elas, o ângulo sob ECD, exterior, é igual ao sob ABC, interior e oposto. Mas foi provado também o sob ACE igual ao sob BAC; portanto, o ângulo sob ACD todo é igual aos dois sob BAC, ABC, interiores e opostos.

Fique adicionado o sob ACB comum; portanto, os sob ACD, ACB são iguais aos três sob ABC, BCA, CAB. Mas os sob ACD, ACB são iguais a dois retos; portanto, os sob ACB, CBA, CAB são iguais a dois retos.

Portanto, tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos; o que era preciso provar.

33.

As retas que ligam as tanto iguais quanto paralelas, no mesmo lado, também são elas tanto iguais quanto paralelas.



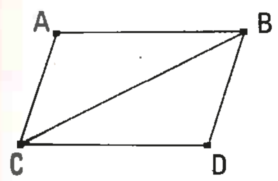
Sejam as AB, CD tanto iguais quanto paralelas, e as retas AC, BD liguem-nas, no mesmo lado; digo que também as AC, BD são tanto iguais quanto paralelas.

Fique ligada a BC. E, como a AB é paralela à CD, e a BC caiu sobre elas, os ângulos sob ABC, BCD, alternos, são iguais entre si. E, como a AB é igual à CD, e a BC é comum, então, as duas AB, BC são iguais às duas BC, CD; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob BCD; portanto, a base AC é igual à base BD, e o triângulo ABC é igual ao triângulo BCD, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob ACB é igual ao sob CBD. E, como a reta BC, caindo sobre as duas retas AC, BD, fez os ângulos alternos iguais entre si, portanto, a AC é paralela à BD. Mas foi provada também igual a ela.

Portanto, as retas que ligam as tanto iguais quanto paralelas, no mesmo lado, também são tanto iguais quanto paralelas; o que era preciso provar.

34.

Das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas.



Sejam a área paralelogrâmica ACDB, e a diagonal dela BC; digo que tanto os lados quanto os ângulos opostos do paralelogramo ACDB são iguais entre si, e a diagonal BC corta-o em dois.

Pois, como a AB é paralela à CD, e a reta BC caiu sobre elas, os ângulos sob ABC, BCD, alternos, são iguais entre si. De novo, como a AC é paralela à BD e a BC caiu sobre elas, os ângulos sob ACB, CBD, alternos, são iguais entre si. Então, os ABC, BCD são dois triângulos, tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob BCD, CBD, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, o BC comum deles, junto aos ângulos iguais; portanto, também terão os lados restantes iguais aos restantes, cada um a cada um, e o ângulo restante igual ao ângulo restante; portanto, por um lado, o lado AB é igual ao CD, e, por outro lado, o AC ao BD, e ainda o ângulo sob BAC é igual ao sob CDB. E, como, por um lado, o ângulo sob ABC é igual ao sob BCD, e, por outro lado, o sob CBD ao sob ACB, portanto, o sob ABD todo é igual ao sob ACD todo. Mas foi provado também o sob BAC igual ao sob CDB.

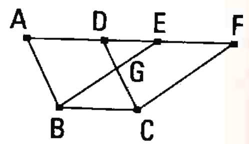
Portanto, das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si.

Digo, então, que também a diagonal corta-a em duas. Pois, como a AB é igual à CD, e a BC é comum, então, as duas AB, BC são iguais às duas CD, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob BCD. Portanto, também a base AC é igual à DB. [Portanto,] também o triângulo ABC é igual ao triângulo BCD.

Portanto, a diagonal BC corta o paralelogramo ABCD em dois; o que era preciso provar.

35.

Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.



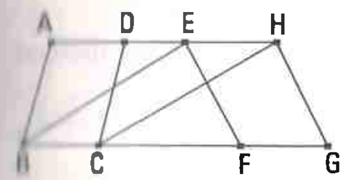
Sejam os paralelogramos ABCD, EBCF, sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AF, BC; digo que o ABCD é igual ao paralelogramo EBCF.

Pois, como o ABCD é um paralelogramo, a AD é igual à BC. Pelas mesmas coisas, então, também a EF é igual à BC; desse modo, também a AD é igual à EF; e a DE é comum; portanto, a AE toda é igual à DF toda. Mas também a AB é igual à DC; então, as duas EA, AB são iguais às duas FD, DC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob FDC é igual ao sob EAB, o exterior, ao interior; portanto, a base EB é igual à base FC, e o triângulo EAB será igual ao triângulo DFC; fique subtraído o DGE comum; portanto, o trapézio ABGD restante é igual ao trapézio EGCF restante; fique adicionado o triângulo GBC comum; portanto, o paralelogramo ABCD todo é igual ao paralelogramo EBCF todo.

Portanto, os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar.

36.

Os paralelogramos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.



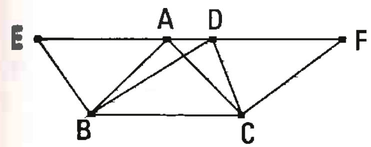
Sejam os paralelogramos ABCD, EFGH, que estão sobre as bases iguais BC, FG e nas mesmas paralelas AH, BG; digo que o paralelogramo ABCD é igual ao paralelogramo EFGH.

Fiquem, pois, ligadas as BE, CH. E, como a BC é igual à FG, mas a FG é igual à EH, portanto, também a BC é igual à EH. Mas também são paralelas. E as EB, HC ligam-nas; mas as que ligam as tanto iguais quanto paralelas, no mesmo lado, são tanto iguais quanto paralelas; [portanto, também as EB, HC são tanto iguais quanto paralelas]. Portanto, o EBCH é um paralelogramo. E é igual ao ABCD; pois, tanto tem a mesma base BC que ele quanto está nas mesmas paralelas BC, AH com ele. Pelas mesmas coisas, então, também o EFGH é igual ao mesmo EBCH; desse modo, também o paralelogramo ABCD é igual ao EFGH.

Portanto, os paralelogramos, que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas, são iguais entre si; o que era preciso provar.

37.

Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.



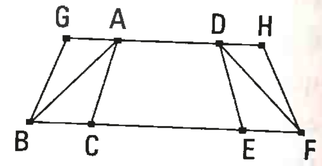
Sejam os triângulos ABC, DBC sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AD, BC; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC.

Fique prolongada a AD em cada um dos lados até os E, F, e, por um lado, pelo B, fique traçada a BE paralela à CA, e, por outro lado, pelo C, fique traçada a CF paralela à BD. Portanto, cada um dos EBCA, DBCF é um paralelogramo; e são iguais; pois, estão tanto sobre a mesma base BC quanto nas mesmas paralelas BC, EF; e, por um lado, o triângulo ABC é metade do paralelogramo EBCA; pois, a diagonal AB corta-o em dois; e, por outro lado, o triângulo DBC é metade do paralelogramo DBCF; pois, a diagonal DC corta-o em dois [e as metades das coisas iguais são iguais entre si]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC.

Portanto, os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar.

38.

Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

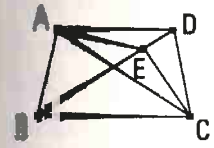


Sejam os triângulos ABC, DEF sobre as bases iguais BC, EF e nas mesmas paralelas BF, AD; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF. Fique, pois, prolongada a AD, em cada um dos lados, até os G, H, e, por um lado, pelo B, fique traçada a BG paralela à CA, e, por outro lado, pelo F, fique traçada a FH paralela à DE. Portanto, cada um dos GBCA, DEFH é um paralelogramo; e o GBCA é igual ao DEFH; pois, estão tanto sobre as bases iguais BC, EF quanto nas mesmas paralelas BF, GH; e, por um lado, o triângulo ABC é metade do paralelogramo GBCA. Pois, a diagonal AB corta-o em dois; e, por outro lado, o triângulo FED é metade do paralelogramo DEFH; pois, a diagonal DF corta-o em dois; [mas as metades das coisas iguais são iguais entre si]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF.

Portanto, os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar.

39.

Os triângulos iguais, que estão sobre a mesma base, e no mesmo lado, também estão nas mesmas paralelas.



Sejam os triângulos iguais ABC, DBC, que estão sobre a mesma base BC, e no mesmo lado; digo que também estão nas mesmas paralelas.

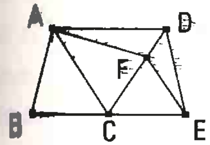
Fique, pois, ligada a AD; digo que a AD é paralela à BC.

Pois, se não, fique traçada, pelo ponto A, a AE paralela à reta BC, e fique ligada a EC. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo EBC; pois, está tanto na mesma base BC que ele quanto nas mesmas paralelas. Mas o ABC é igual ao DBC; portanto, também o DBC é igual ao EBC, o maior, ao menor; o que é impossível; portanto, a AE não é paralela à BC. Do mesmo modo, então, provaremos que nenhuma outra, exceto a AD; portanto, a AD é paralela à BC.

Portanto, os triângulos iguais, que estão sobre a mesma base, e no mesmo lado, também estão nas mesmas paralelas; o que era preciso provar.

40.

Os triângulos iguais, que estão sobre as bases iguais, e no mesmo lado, também estão nas mesmas paralelas.



Sejam os triângulos iguais ABC, CDE, sobre as bases iguais BC, CE, e no mesmo lado; digo que também estão nas mesmas paralelas.

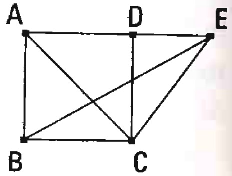
Fique, pois, ligada a AD; digo que a AD é paralela à BE.

Pois, se não, fique traçada, pelo A, a AF paralela à BE, e fique ligada a FE. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo FCE; pois, estão tanto sobre as bases iguais BC, CE quanto nas mesmas paralelas BE, AF. Mas o triângulo ABC é igual ao [triângulo] DCE; portanto, também o [triângulo] DCE é igual ao triângulo FCE, o maior, ao menor; o que é impossível; portanto, a AF não é paralela à BE. Do mesmo modo, então, provaremos que nenhuma outra, exceto a AD; portanto, a AD é paralela à BE.

Portanto, os triângulos iguais, que estão sobre as bases iguais, e no mesmo lado, também estão nas mesmas paralelas; o que era preciso provar.

41.

Caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo.



Tenha, pois, o paralelogramo ABCD tanto a mesma base BC que o triângulo EBC quanto esteja nas mesmas paralelas BC, AE; digo que o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo BEC.

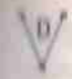
Fique, pois, ligada a AC. Então, o triângulo ABC é igual ao triângulo EBC; pois, está tanto sobre a mesma base BC que ele quanto nas mesmas paralelas BC, AE. Mas o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo ABC; pois, a diagonal AC corta-o em dois; desse modo, o paralelogramo ABCD também é o dobro do triângulo EBC.

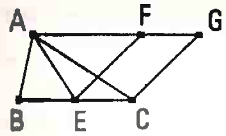
Portanto, caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo; o que era preciso provar.

42.

Construir um paralelogramo igual ao triângulo dado, no ângulo retilíneo dado.

Sejam, por um lado, o triângulo dado ABC, e, por outro lado, o ângulo retilíneo dado D; é preciso, então, construir no ângulo retilíneo D, um paralelogramo igual ao triângulo ABC.



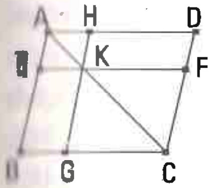


Fique cortada a BC em duas no E, e fique ligada a AE, e fique construído, sobre a reta EC e no ponto E sobre ela, o sob CEF igual ao ângulo D, e, por um lado, pelo A fique traçada a AG paralela à EC, e, por outro lado, pelo C, fique traçada a CG paralela à EF; portanto, o FECG é um paralelogramo. E, como a BE é igual à EC, também o triângulo ABE é igual ao triângulo AEC; pois, estão tanto sobre as bases iguais BE, EC quanto nas mesmas paralelas BC, AG; portanto, o triângulo ABC é o dobro do triângulo AEC. Mas também o paralelogramo FECG é o dobro do triângulo AEC; pois, tanto tem a mesma base que ele quanto está nas mesmas paralelas com ele; portanto, o paralelogramo FECG é igual ao triângulo ABC. E tem o ângulo sob CEF igual ao dado D.

Portanto, foi construído o paralelogramo FECG, no ângulo sob CEF, que é igual ao D, igual ao triângulo ABC; o que era preciso fazer.

43.

Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si.



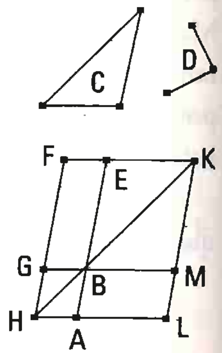
Sejam o paralelogramo ABCD, e a diagonal AC dele, e, por um lado, sejam os paralelogramos EH, FG à volta da AC, e, por outro lado, os ditos complementos BK, KD; digo que o complemento BK é igual ao complemento KD.

Pois, como o ABCD é um paralelogramo, e a AC é uma diagonal dele, o triângulo ABC é igual ao triângulo ACD. De novo, como o EH é um paralelogramo, e a AK é uma diagonal dele, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK. Pelas mesmas coisas, então, também o triângulo KFC é igual ao KGC. Como, de fato, por um lado, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK, e, por outro lado, o KFC, ao KGC, o triângulo AEK, com o KGC, é igual ao triângulo AHK, com o KFC; mas também o triângulo ABC todo é igual ao ADC todo; portanto, o complemento BK restante é igual ao complemento KD restante.

Portanto, os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de toda área paralelogrâmica, são iguais entre si; o que era preciso provar.

44.

Aplicar à reta dada, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual ao triângulo dado.



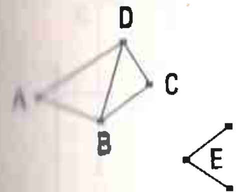
Sejam, por um lado, a reta dada AB, e, por outro lado, o triângulo dado C, e o ângulo retilíneo dado D; é preciso, então, aplicar à reta dada AB, em um igual ao ângulo D, um paralelogramo igual ao triângulo C.

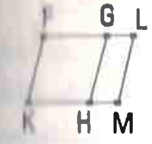
Fique construído, no ângulo sob EBG, que é igual ao D, o paralelogramo BEFG igual ao triângulo C; e fique posto de modo a estar a BE sobre uma reta com a AB, e fique traçada através a FG até o H, e, pelo A, fique traçada a AH paralela a qualquer uma das BG, EF, e fique ligada a HB. E, como a reta HF caiu sobre as paralelas AH, EF, portanto, os ângulos sob AHF, HFE são iguais a dois retos. Portanto, os sob BHG, GFE são menores do que dois retos; mas as que são prolongadas, ilimitadamente, a partir dos menores do que dois retos, encontram-se; portanto, as HB, FE, sendo prolongadas, encontrar-se-ão. Fiquem prolongadas e encontrem-se no K, e, pelo ponto K, fique traçada a KL paralela a qualquer uma das EA, FH, e fiquem prolongadas as HA, GB até os pontos L, M. Portanto, o HLKF é um paralelogramo, e a HK é uma diagonal dele, e, por um lado, os AG, ME são paralelogramos à volta da HK, e, por outro lado, os LB, BF são os ditos complementos; portanto, o LB é igual ao BF. Mas o BF é igual ao triângulo C; portanto, também o LB é igual ao C. E, como o ângulo sob GBE é igual ao sob ABM, mas o sob GBE é igual ao D, portanto, também o sob ABM é igual ao ângulo D.

Portanto, foi aplicado à reta dada AB, no ângulo sob ABM, que é igual ao D, o paralelogramo LB igual ao triângulo dado C; o que era preciso fazer.

45.

Construir, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual à retilínea dada.





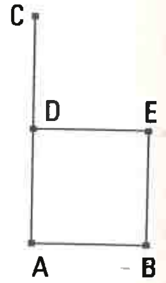
Sejam, por um lado, a retilínea dada ABCD, e, por outro lado, o ângulo retilíneo dado E; é preciso, então, construir, no ângulo dado E, um paralelogramo igual à retilínea ABCD.

Fique ligada a DB, e fique construído, no ângulo sob HKF, que é igual ao E, o paralelogramo FH igual ao triângulo ABD; e fique aplicado à reta GH, no ângulo sob GHM, que é igual ao E, o paralelogramo GM igual ao triângulo DBC. E, como o ângulo E é igual a cada um dos sob HKF, GHM, portanto, também o sob HKF é igual ao sob GHM. Fique adicionado o sob KHG comum; portanto, os sob FKH, KHG são iguais aos sob KHG, GHM. Mas os sob FKH, KHG são iguais a dois retos; portanto, também os sob KHG, GHM são iguais a dois retos. Então, as duas retas KH, HM, não postas do mesmo lado, fazem em relação a alguma reta, a GH, e no mesmo ponto H sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a KH está sobre uma reta com a HM; e, como a reta HG caiu sobre as paralelas KM, FG, os ângulos sob MHG, HGF, alternos, são iguais entre si. Fique adicionado o sob HGL comum; portanto, os sob MHG, HGL são iguais aos sob HGF, HGL. Mas os sob MHG, HGL são iguais a dois retos; portanto, também os sob HGF, HGL são iguais a dois retos; portanto, a FG está sobre uma reta com a GL. E, como a FK é tanto igual quanto paralela à HG, mas também a HG, à ML, portanto, também a KF é tanto igual quanto paralela à ML; e as retas KM, FL ligam-nas; portanto, também as KM, FL são tanto iguais quanto paralelas; portanto, o KFLM é um paralelogramo. E, como, por um lado, o triângulo ABD é igual ao paralelogramo FH, e, por outro lado, o DBC, ao GM, portanto, a retilínea ABCD toda é igual ao paralelogramo KFLM todo.

Portanto, foi construído, no ângulo sob FKM, que é igual ao dado E, o paralelogramo KFLM igual à retilínea dada ABCD; o que era preciso fazer.

46.

Descrever um quadrado sobre a reta dada.



Seja a reta dada AB; é preciso, então, descrever um quadrado sobre a reta AB.

Fique traçada a AC em ângulos retos com a reta AB, a partir do ponto A sobre ela, e fique posta a AD igual à AB; e, por um lado, pelo ponto D, fique traçada a DE paralela à AB, e, por outro lado, pelo ponto B, fique traçada a BE paralela à AD. Portanto, o ADEB é um paralelogramo; portanto, por um lado, a AB é igual à DE, e, por outro lado, a AD, à BE. Mas a AB é igual à AD; portanto, as quatro BA, AD, DE, EB são iguais entre si; portanto, o paralelogramo ADEB é equilátero. Digo, então, que também é retangular. Pois, como a reta AD caiu sobre as paralelas AB, DE, portanto, os ângulos sob BAD, ADE são iguais a dois retos. Mas o sob BAD é reto; portanto, também o sob ADE é reto. Mas, das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si; portanto, cada um dos ângulos sob ABE, BED, opostos, é reto; portanto, o ADEB é retangular. E foi provado também equilátero.

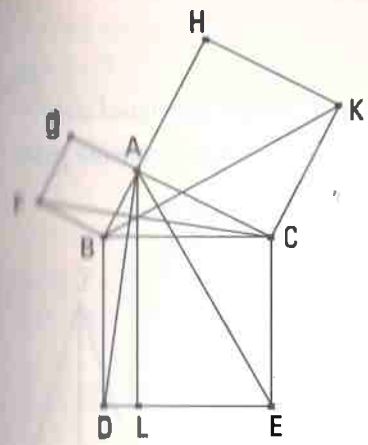
Portanto, é um quadrado; e descrito sobre a reta AB; o que era preciso fazer.

47.

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC.

Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG,

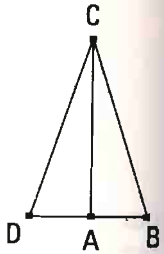


não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC.

Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar.

48.

Caso o quadrado sobre um dos lados de um triângulo seja igual aos quadrados sobre os dois lados restantes do triângulo, o ângulo contido pelos dois lados restantes do triângulo é reto.



Seja, pois, o quadrado sobre um lado, o BC, do triângulo ABC igual aos quadrados sobre os lados BA, AC; digo que o ângulo sob BAC é reto.

Fique, pois, traçada, a partir do ponto A, a AD em ângulos retos com a reta AC, e fique posta a AD igual à BA, e fique ligada a DC. Como a DA é igual à AB, também o quadrado sobre a DA é igual ao quadrado sobre a AB. Fique adicionado o quadrado sobre a AC comum; portanto, os quadrados sobre as DA, AC são iguais aos quadrados sobre as BA, AC. Mas, por um lado, o sobre a DC é igual aos sobre as DA, AC; pois, o ângulo sob DAC é reto; e, por outro lado, o sobre a BC é igual aos sobre as BA, AC; pois, foi suposto; portanto, o quadrado sobre a DC é igual ao quadrado sobre a BC; desse modo, também o lado DC é igual ao BC; e, como a DA é igual à AB, e a AC é comum, então, as duas DA, AC são iguais às duas BA, AC; e a base DC é igual à base BC; portanto, o ângulo sob DAC [é] igual ao ângulo sob BAC. Mas o sob DAC é reto; portanto, também o sob BAC é reto.

Portanto, caso o quadrado sobre um dos lados de um triângulo seja igual aos quadrados sobre os dois lados restantes do triângulo, o ângulo contido pelos dois lados restantes do triângulo é reto; o que era preciso provar.

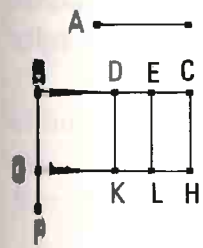
Livro II

Definições

1. Todo paralelogramo retangular é dito ser contido pelas duas retas que contêm o ângulo reto.
2. E, de toda área paralelogrâmica, um dos paralelogramos, qualquer que seja, à volta da diagonal dela, com os dois complementos, seja chamado um gnômon.

I.

Caso existam duas retas, e uma delas seja cortada em segmentos, quantos quer que sejam, o retângulo contido pelas duas retas é igual aos retângulos contidos tanto pela não cortada quanto por cada um dos segmentos.



Sejam as duas retas A, BC, e fique cortada a BC, ao acaso, nos pontos D, E; digo que o retângulo contido pelas A, BC é igual ao retângulo contido pelas A, BD, e o pelas A, DE, e ainda o pelas A, EC.

Fique, pois, traçada, a partir do B, a BF em ângulos retos com a BC, e fique posta a BG igual à A, e, por um lado, pelo G, fique traçada a GH paralela à BC, e, por outro lado, pelos D, E, C, fiquem traçadas as DK, EL, CH paralelas à BG.

Então, o BH é igual aos BK, DL, EH. E, por um lado, o BH é o pelas A, BC; pois, por um lado, é contido pelas GB, BC, e, por outro lado, a BG