MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1

2° SEMESTRE DE 2021

LISTA DE PROBLEMAS

1) Seja $S = \{P, Q, R, T, U\}$. Defina duas geometrias de incidência no conjunto S; mais precisamente, dê exemplos de quatro conjuntos de subconjuntos de S, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{P}_2$, com $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$ e $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, de modo que $[S, \mathcal{L}_1, \mathcal{P}_1]$ e $[S, \mathcal{L}_2, \mathcal{P}_2]$ sejam geometrias de incidência.

2) Seja $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ uma geometria de incidência. Mostre que, para toda reta $r \in \mathcal{P}$, existem (pelo menos) dois planos, $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$, tais que $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Explicite quais axiomas você está usando em cada passo da sua solução.

3) Seja $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}, d]$ uma "geometria métrica", ou seja, $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ é uma geometria de incidência e d é uma distância definida em S. Mostre que, para toda reta $r \in \mathcal{L}$, existem infinitos planos (distintos dois-a-dois) que contêm r. Explicite quais axiomas você está usando em cada passo da sua solução.

4) Mostre que, se $\Delta ABC = \Delta DEF$, então cada uma das retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ contém dois dos pontos D, E e F.

5) Mostre que, se $C \in \overrightarrow{AB}$, então $B \in \overrightarrow{AC}$. Explicite as definições e propriedades da noção "estar entre" que você usar em cada passo da sua solução.

6) Mostre que a união de um semiplano à reta que o determina é um conjunto convexo.

7) Se duas retas se interceptam e formam um ângulo reto, mostre que elas formam outros três ângulos retos.

8) São dados quatro pontos A, B, B' e C tais que $B - A - B'$, $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{AB} \simeq \overline{AB'}$ e $\overline{BC} \simeq \overline{B'C}$. Sem invocar o caso LLL de congruência (pois este é um passo na demonstração de que LAL implica LLL), mostre que $\Delta ABC \simeq \Delta AB'C$.

9) São dados cinco pontos A, B, B', C e G tais que $G - A - C$, $B - G - B'$, $\overline{AB} \simeq \overline{AB'}$ e $\overline{BC} \simeq \overline{B'C}$. Sem invocar o caso LLL de congruência (pois este é um passo na demonstração de que LAL implica LLL), mostre que $\Delta ABC \simeq \Delta AB'C$.

10) Dado o ângulo $\angle BAC$, mostre que existem D e E em seu interior tais que $\angle BAD \simeq \angle DAE \simeq \angle EAC$. `Sugestão`: Use os postulados (M.3) e (M.4) e a Proposição ao fim desta lista.

11) Considere os pontos $A = (0, 2)$, $B = (\sqrt{3}, 1)$ e $C = (0, 1)$ no plano de Poincaré. Verifique que (a) o triângulo ΔABC é retângulo em A e (b) $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 < d(B, C)^2$

12) Sejam A, B, C e D quatro pontos coplanares tais que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Mostre que os triângulos ΔACD e ΔCAB são congruentes.

....

Proposição: Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta na borda do semiplano H. Sejam C e D pontos de H tais que $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AD}$. Então ou C pertence ao interior do ângulo $\angle BAD$ ou D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$.

`Demonstração`: Suponha que C não pertence ao interior de $\angle BAD$. Queremos provar que D então pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$.

Os pontos C e D estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Então C não pertencer ao interior de $\angle BAD$ é equivalente a B e C estarem em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AD}$. Sob esta hipótese adicional, queremos provar que B e D estão do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ (e portanto D pertence ao interior de $\angle BAC$).

Suponhamos portanto que B e C estejam em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AD}$ e seja E tal que $\{E\} = \overline{BC} \cap \overleftrightarrow{AD}$. É claro que $E \notin \overleftrightarrow{AB}$ (caso contrário $C \in \overleftrightarrow{AB}$).

E pertence ao semiplano H (pelo Problema 6). Logo $E \in \overrightarrow{AD}$.

Suponha que $D = E$. Então $\overline{BD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \emptyset$ (caso contrário $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ teriam dois pontos em comum, e portanto $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$). Logo B e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.

Suponha agora que $A - E - D$ ou $A - D - E$. Em qualquer destes dois casos, os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{ED}$ não interceptam a reta $\overleftrightarrow{AC}$ (se $\overline{BE}$ interceptasse, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ seriam iguais; se $\overline{ED}$ interceptasse, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ seriam iguais). Segue do Teorema de Pasch aplicado ao triângulo ΔBED e à reta $\overleftrightarrow{AC}$ que $\overline{BD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \emptyset$. Ou seja, B e D estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. $\square$

`Teorema de Pasch` (ou *postulado de Pasch*, se não assumirmos o postulado de separação do plano): Se uma reta intercepta o interior de um dos lados de um triângulo, ele necessariamente interceptará também algum dos outros dois lados do triângulo.