NOTAS DE AULAS (INCOMPLETAS)

OPERADORES DE FREDHOLM E TOPOLOGIA

2° SEMESTRE DE 2021

1. O conjunto dos operadores inversíveis e o dos operadores de Fredholm são abertos

Uma álgebra de Banach A é um espaço de Banach munido de uma forma bilinear associativa

$$A \times A \ni (a,b) \longmapsto ab \in A$$

satisfazendo ademais que a norma é *submultiplicativa*: $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todos $a, b \in A$.

Proposição 1. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade. $GL(A) = \{a \in A;\ a \text{ é inversível}\}$ é aberto em A.*

`Demonstração`: Suponha que $a \in A$ é inversível. Se $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, então $\|ba^{-1}\| < 1$, e portanto a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ba^{-1})^n$$

é absolutamente convergente. Para todo N natural,

$$(1 - ba^{-1}) \sum_{n=0}^{N} (ba^{-1})^n = \sum_{n=0}^{N} (ba^{-1})^n (1 - ba^{-1}) = 1 - (ba^{-1})^{N+1} \longrightarrow 1,\ N \to \infty.$$

Ou seja, $1 - ba^{-1} \in GL(A)$, $(1 - ba^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (ba^{-1})^n$. Logo $(a - b) = (1 - ba^{-1})a$ é inversível se $a \in GL(A)$ e $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. $\square$

Corolário 1. *Seja E um espaço de Banach. Então $\{T \in \mathcal{B}(E);\ T \text{ é inversível}\}$ é aberto em $\mathcal{B}(E)$.*

`Demonstração`:A composição de operadores faz de $\mathcal{B}(E)$ uma álgebra de Banach. $\square$

Corolário 2. *Seja E e F espaços de Banach. Então $\{T \in \mathcal{B}(E, F);\ T \text{ é inversível}\}$ é aberto em $\mathcal{B}(E, F)$.*

`Demonstração`: Suponha que o conjunto que queremos mostrar que é aberto seja não vazio e tome $T_0 \in \mathcal{B}(E, F)$ inversível. Então a aplicação

$$\mathcal{B}(E) \ni T \longmapsto T_0 T \in \mathcal{B}(E, F)$$

é um isomorfismo de espaços de Banach. O conjunto que queremos mostrar que é aberto é a imagem por este isomorfismo de $GL(\mathcal{B}(E))$, que é aberto pelo Corolário 1. $\square$

Sabemos que o quociente E/M de um espaço de Banach E por um subespaço fechado M torna-se um esapaço de Banach se munido da norma

$$\|[x]\| \;=\; \inf_{m\in M} \|x+m\|, \quad x \in E.$$

Segue imediatamente da definição da norma que a projeção canônica $x \mapsto [x]$ de E em E/M é um operador limitado, de norma menor do que ou igual a 1. No caso em que o espaço de Banach é uma álgebra de Banach A e o subespaço é um ideal bilateral fechado I, o quociente é uma álgebra de Banach (veja por exemplo [10, Theorem 1.1.1].

Seja agora H um espaço de Hilbert. O conjunto $\mathcal{K}(H)$ dos operadores compactos em H é um ideal bilateral fechado de $\mathcal{H}$. Segue do Teorema de Atkinson que um dado $T \in \mathcal{B}(H)$ é um operador de Fredholm se e somente se $[T]$ é inversível no quociente $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$. Como o conjunto dos elementos inversíveis de uma álgebra de Banach é aberto e a projeção canônica é contínua, segue que o conjunto dos operadores de Fredholm em $\mathcal{B}(H)$ é aberto.

Sejam agora H_1 e H_2 espaços de Hilbert e seja $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ um operador limitado de imagem fechada. Seja $P \in \mathcal{B}(H_2)$ a projeção ortogonal sobre $\operatorname{Im} T$, seja T_0 a restrição de PT a $(\ker T)^\perp$. Então T_0 é um isomorfismo de espaços de Banach entre os espaços de Hilbert $(\ker T)^\perp$ e $\operatorname{Im} T$. Segue do Teorema 8.9 de [7] e das observações que se seguem que as dimensões (hilbertianas) de $(\ker T)^\perp$ e $\operatorname{Im} T$ são iguais. Suponha, ademais, que H_1 e H_2 têm dimensão infinita e que T é um operador de Fredholm. Como as dimensões de $(\ker T)^\perp$ e $\operatorname{Im} T$ são iguais e eles têm codimensão finita em H_1 e H_2, respectivamente, segue que as dimensões de H_1 e H_2 são iguais. Daí segue que existe um operador unitário entre entre os dois espaços, $U : H_1 \to H_2$. Provamos:

Proposição 2. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert de dimensão infinita. Suponha que existe um operador de Fredholm entre os dois espaços, $T : H_1 \to H_2$. Então existe um operador unitário entre os dois espaços, $U : H_1 \to H_2$.*

Vimos acima que segue do Teorema de Atkinson que o conjunto dos operadores de Fredholm em $\mathcal{B}(H_2)$ é aberto. Deste fato e da proposição imediatamente precedente, decorre:

Proposição 3. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert de dimensão infinita. Então o conjunto dos operadores de Fredholm em $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ é aberto.*

`Demonstração`:Como o conjunto vazio é aberto, basta provar a proposição supondo que existe um operador de Fredholm entre H_1 e H_2. Segue da Proposição 2 que existe um operador unitário $U : H_1 \to H_2$. A aplicação $T \mapsto U^{-1}T$ é uma isometria que leva o espaço de Banach $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ no espaço de Banach $\mathcal{B}(H_1)$. A imagem do conjunto dos operadores de Fredholm $T : H_1 \to H_2$ por esta aplicação coincide com o conjunto dos operadores de Fredholm $T : H_1 \to H_1$, que é aberto. $\square$

2. Cálculo Funcional Contínuo

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(H)$. O *espectro* de T é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - T$ não é inversível. Denotaremos por $\sigma(T)$ o espectro de T. Os autovalores de T, se existirem, pertencem a $\sigma(T)$, que contém também os valores de λ para os quais $\lambda I - T$ não é sobrejetor sem que necessariamente deixe de ser injetor.

Teorema 1. ([8, Teorema 9.9]) *Seja H um espaço de Hilbert complexo. Para todo $T \in \mathcal{B}(H)$, $\sigma(T)$ é um compacto não-vazio de $\mathbb{C}$.*

O teorema seguinte é o Teorema 14.2 de [8] no caso em que $A = \mathcal{B}(H)$.

Teorema 2. (Cálculo Funcional Contínuo) *Sejam H um espaço de Hilbert complexo e $T \in \mathcal{B}(H)$ normal, isto é, $TT^* = T^*T$. Existe um homomorfismo de álgebras $\mathfrak{C} : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ satisfazendo $\mathfrak{C}(\overline{f}) = \mathfrak{C}(f)^*$ e $\|\mathfrak{C}(f)\| = \sup\{|f(z)|;\ z \in \sigma(T)\}$ para toda $f \in C(\sigma(T))$ e*

$$f(z) = \sum_{(m,n)\in F} a_{m,n} z^m \overline{z}^n,\ z \in \sigma(T),\ F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N} \textit{ finito} \implies \mathcal{C}(f) = \sum_{(m,n)\in F} a_{m,n} T^m (T^*)^n \tag{1}$$

Toda função contínua definida em um compacto $K \subset \mathbb{C}$ é o limite uniforme de uma sequência de polinômios em z e $\overline{z}$ restritos a K. Logo (1) implica que $\mathfrak{C}$ é único. Note que (1) é equivalente a pedir que $\mathfrak{C}(\lambda \mapsto 1) = I$ e $\mathfrak{C}(\lambda \mapsto \lambda) = T$, se já tivermos que $\mathfrak{C}$ é um "*-homomorfismo".

Denotaremos $\mathfrak{C}(f)$ por $f(T)$.

Proposição 4. *Seja $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores normais em $\mathcal{B}(H)$ convergindo para T (que portanto também é normal). Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto [1] contendo todos os $\sigma(T_k)$ e $\sigma(T)$. Então, para cada $f \in C(K)$, $f(T_k) \to f(T)$, onde denotamos $f|_{\sigma(T_k)}(T_k)$ e $f|_{\sigma(T)}(T)$ por $f(T_k)$ e $f(T)$, respectivamente.*

`Demonstração`: Dados $f \in C(K)$ e $\epsilon > 0$, seja p um polinômio em z e $\overline{z}$ tal que $\sup\{|f(z) - p(z)|;\ z \in K\} < \epsilon/3$. Como $T_k \to T$ e as operações de tomar adjunto, do produto e da soma são contínuas, vem

$$p(T_k) = \sum_{(m,n)\in F} a_{m,n} T_k^m (T_k^*)^n \ \longrightarrow \sum_{(m,n)\in F} a_{m,n} T^m (T^*)^n = P(T).$$

Tome k_0 tal que $\|p(T_k) - p(T)\| < \epsilon/3$ para todo $k \geq k_0$. Então

$$\|f(T_k) - f(T)\| \leq \|f(T_k) - p(T_k)\| + \|p(T_k) - p(T)\| + \|p(T) - f(T)\| < \frac{\epsilon}{3} + 2\sup\{|f(z) - p(z)|;\ z \in K\} < \epsilon,$$

para todo $k \geq k_0$. □

Definição 1. *Um operador $T \in B(H)$ é positivo se $T = T^*$ e $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.*

---

[1] Podemos tomar, por exemplo, $K = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \sup_k \|T_k\|\}$.

Na definição precedente, a exigência de T ser autoadjunto é supérflua no caso de o espaço de Hilbert ser complexo, que é o caso que nos interessa ao tratar de teoria espectral:

`Exercício`: Sejam H um espaço de Hilbert complexo e $T \in B(H)$ tal $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$. Mostre que $T = T^*$. Sugestão: Aplique a identidade de polarização para a forma sesquilinear $[x, y] = \langle Tx, y\rangle$.

Proposição 5. *Se $T \in B(H)$ é positivo, então $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.*

`Demonstração`: Dado $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, usando que $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in H$ temos

$$\|(T-\lambda)x\|^2 \;=\; \|(T-a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 \;=\; \|Tx\|^2 + |\lambda|^2\|x\|^2 - 2a\langle Tx, x\rangle.$$

Se $b \neq 0$, segue que $\|(T-\lambda)x\| \geq |b|\|x\|$. Se $a < 0$, usando que $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, segue que $\|(T-\lambda I)x\| \geq |\lambda|\|x\|$. Isto prova que, para todo $\lambda \notin [0, \infty)$, existe $C > 0$ tal que

$$\|(T-\lambda)x\| \;\geq C\|x\|, \quad \text{para todo } x \in H.$$

Daí decorre que $T - \lambda I$ é injetor e tem imagem fechada. Como $T = T^*$, o núcleo de $(T - \overline{\lambda} I)$ é o complemento ortogonal da imagem de $T - \lambda I$, que é fechada; logo $T - \lambda I$ é sobrejetor. □

Dado T um operador positivo, a função $f(t) = \sqrt{t}$ é contínua em $\sigma(T)$. Definimos então $\sqrt{T} = f(T)$ usando o cálculo funcional contínuo.

Proposição 6. *Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente de operadores positivos em $\mathcal{B}(H)$, $T_n \to T$. Então T é positivo e $\sqrt{T_n} \longrightarrow \sqrt{T}$.*

`Demonstração`: Notando que $T_n^* \longrightarrow T^*$ e $\langle T_n x, x\rangle \longrightarrow \langle Tx, x\rangle$, concluímos que T também é positivo. Depois basta aplicar a Proposição 4 para o compacto $K = [0, M]$, tomando algum M tal que $\|T_n\| \leq M$ para todo n. □

Corolário 3. *Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente de operadores positivos em $\mathcal{B}(H)$, $T_n \to T$. Suponha que cada T_n e T sejam inversíveis. Então $\sqrt{T_n}$ e $\sqrt{T}$ também são inversíveis e $(\sqrt{T_n})^{-1} \to (\sqrt{T})^{-1}$.*

3. Cálculo Funcional Boreliano

Teorema 3. *Sejam H um espaço de Hilbert complexo e $T \in \mathcal{B}(H)$ normal. Denotemos por $B(\sigma(T))$ a *álgebra das funções borelianas, complexas e limitadas definidas em $\sigma(T)$, munida da norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\lambda)|;\, \lambda \in \sigma(T)\}$. Então existe um *-homomorfismo $\Phi : B(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, $\Phi(h) = h(T)$ que estende o cálculo funcional contínuo e satisfaz*

1. $\|\Phi(h)\| \leq \|h\|_\infty$ *para toda* $h \in B(\sigma(T))$,
2. $h_n(T)v \to h(T)v$ *para todo* $v \in H$, *se* $h_n(\lambda) \to h(\lambda)$ *para todo* $\lambda \in \sigma(T)$ *e* $\sup_n \|h_n\|_\infty < \infty$.

Segue de toda função de $B(\sigma(T))$ ser o limite ponto-a-ponto de uma sequência de limitada funções em $C(\sigma(T))$ que Φ é a única extensão do cálculo funcional contínuo satisfazendo o item (2) do enunciado do Teorema 3.

O grupo dos operadores unitários em um espaço de Hilbert.

O conjunto dos operadores unitários em um espaço de Hilbert H, $\mathcal{U}(H) := \{U \in \mathcal{B}(H);\, U^* = U^{-1}\}$, é um grupo topológico com a composição de operadores como operação e com a topologia relativa do espaço normado $\mathcal{B}(H)$. Como $\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|I\|$, segue que $\|U\| = 1$ para todo $U \in \mathcal{U}(H)$.

Um operador é unitário se se somente é um isomoformismo linear isométrico de H em H, o que por sua vez é equivalente a $U : H \to H$ ser uma bijeção que preserva o produto interno.

Proposição 7. *Se $U \in \mathcal{U}(H)$, então $\sigma(U) \subseteq S^1$.*

`Demonstração`:Sendo U normal, podemos considerar o cálculo funcional contínuo a ele associado. Tome $f \in C(\sigma(U))$ definida por $f(\lambda) = \lambda\overline{\lambda}$, $\lambda \in \sigma(U)$. Então $f(U) = UU^* = I = \mathbf{1}_{C(\sigma(U))}(U)$, logo $z\overline{z} = 1$ para todo $z \in \sigma(U)$, logo $\sigma(U) \subseteq S^1$. □

A proposição seguinte estabelece que $\mathcal{U}(H)$ é conexo por caminhos.

Proposição 8. *Dado $U \in \mathcal{U}(H)$, existe uma curva contínua na topologia da norma $[0,1] \ni t \longmapsto U_t \in \mathcal{U}(H) \subset \mathcal{B}(H)$ tal que $U_0 = I$ e $U_1 = U$.*

`Demonstração`:Para cada $t \in [0,1]$, considere $h_t : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h_t(e^{i\theta}) \;=\; e^{it\theta}, \;\; \text{para todo} \;\; \theta \in (-\pi, \pi]$$

(na linguagem clássica, h_t é o *ramo principal* da *função multivalente* $z \mapsto z^t$). Para cada t, a função h_t é contínua exceto em $z = -1$, ponto em que possui limites laterais distintos se $0 < t < 1$. Logo, h_t é mensurável a Borel. Segue da desigualdade

$$|e^{it\theta} - e^{is\theta}| \leq \pi|t - s|, \;\; \text{para todo} \;\; \theta \in (-\pi, \pi],$$

válida para todos $t, s \in [0,1]$, que

$$[0,1] \ni t \;\longmapsto\; h_t \in B(\sigma(U))$$

é contínua relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$.

Segue da Proposição 7 que $\sigma(U) \subseteq S^1$. Denotando também por h_t a restrição de h_t a $\sigma(U)$, segue da continuidade do *cálculo funcional boreliano* $\Phi : B(\sigma(U)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ que

$$[0,1] \ni t \;\longmapsto\; h_t(U) \in \mathcal{B}(H)$$

é uma curva contínua ligando $h_0(U) = I$ a $h_1(U) = U$.

Resta provar que $h_t(U)$ é unitário para todo t. Segue da definição de h_t que $h_t(\lambda)\overline{h_t(\lambda)} = 1$ para todo $\lambda \in \sigma(U)$. Aplicando Φ a esta identidade, decorre que $h_t(U)h_t(U)^* = h_t(U)^*h_t(U) = I$. □

$GL(H)$ é conexo por caminhos.

4. $GL(H)$ é conexo por caminhos, sem teoria espectral

Seja H um espaço de Hilbert separável.

Nesta seção vamos provar que $GL(H)$ é conexo por caminhos sem usar teoria espectral. Embora mais elementar, a demonstração é bem mais difícil. São duas as vantagens de não usar o teorema espectral (ou o cálculo funcional boreliano para operadores normais em $B(H)$, que é equivalente à versão original e mais conhecida do teorema espectral): (1) a demonstração se aplica também para espaços de Hilbert reais e (2) ela pode ser generalizada para demonstrar que, para todo espaço Hausdorff compacto X, toda função contínua de X em $GL(H)$ é homotópica à função constante igual a I, o operador identidade em H. Ou seja, na notação padrão da topologia algébrica, $[X, GL(H)]$ (o conjunto das classes de homotopia de funções contínuas de X em $GL(H)$) consiste apenas de um ponto.

Esta exposição é baseada em [2, Section 3.4] e em [6].

Proposição 9. *Dado $R_0 \in B(H)$ inversível, existem conjuntos ortonormais $\{a_1, a_2, \cdots\}$ e $\{\mathring{a}_1, \mathring{a}_2, \cdots\}$, e uma família de subespaços de H dimensão três $A_1, A_2, \cdots$, mutuamente ortogonais, tais que $a_j, \mathring{a}_j, R_0 a_j \in A_j$ e $\mathring{a}_j$ é ortogonal a a_j e a $R_0 a_j$ para todo j.*

Proposição 10. *Seja $R_0 \in B(H)$ inversível e sejam $\{a_1, a_2, \cdots\}$, $\{\mathring{a}_1, \mathring{a}_2, \cdots\}$ e $A_1, A_2, \cdots$ famílias de vetores e subespaços satisfazendo as prescrições da Proposição 9. Denotemos por A o subespaço fechado de H que tem em $\{a_1, a_2, \cdots\}$ um conjunto ortonormal completo. Então existe uma homotopia em $GL(H)$ conectando R_0 a R_1, com R_1 satisfazendo $\|R_1 a_j\| = 1$ para todo j e $R_1 x = R_0 x$ para todo $x \in A^{\perp}$.*

Proposição 11. *Dado $R_0 \in B(H)$ inversível, sejam $\{a_1, a_2, \cdots\}$, $\{\mathring{a}_1, \mathring{a}_2, \cdots\}$ e $A_1, A_2, \cdots$ famílias de vetores e subespaços satisfazendo as prescrições da Proposição 9, e seja R_1 o operador obtido na Proposição 10. Então existe homotopia conectando R_1 a R_2 em $GL(H)$, com R_2 satisfazendo $R_2 a_j = a_j$ para todo j e $R_0 x = R_2 x$ para todo $x \in \left(\oplus_{j=1}^{\infty} A_j\right)^{\perp}$.*

`Demonstração`: Segue das Proposições 9 e 10 que, para todo j, $\{R_1 a_j, \mathring{a}_j\}$ e $\{a_j, \mathring{a}_j\}$ são conjuntos ortonormais, embora $\{a_j, R_1 a_j\}$ possa até deixar de ser linearmente independente. Vamos construir uma homotopia de unitários em A_j fazendo primeiramente uma rotação de $\pi/2$ no subespaço gerado por $\{R_1 a_j, \mathring{a}_j\}$ e, em seguida, uma rotação de $\pi/2$ no subespaço gerado por $\{a_j, \mathring{a}_j\}$.

Para cada j, para cada $0 \leq t \leq 1/2$, defina o operador unitário $U_t^j : A_j \to A_j$ por

$$\begin{aligned} U_t^j(R_1 a_j) &= (\cos \pi t)\, R_1 a_j \,+\, (\sin \pi t)\, \mathring{a}_j \\ U_t^j(\mathring{a}_j) &= (-\sin \pi t)\, R_1 a_j \,+\, (\cos \pi t)\, \mathring{a}_j \\ U_t^j(x) &= x, \quad\ x \in [R_1 a_j, \mathring{a}_j]^\perp \end{aligned} \tag{2}$$

Como as entradas da matriz de U_t^j em relação a uma base ortonormal de A_j são funções contínuas, segue que (veja uma discussão mais detalhada sobre este ponto um pouco abaixo) $t \mapsto U_t^j$ é uma função contínua de $[0, 1/2]$ no conjunto dos operadores unitários em A_j, que denotamos por $\mathcal{U}(A_j)$. Claro que U_0^j é o operador identidade de A_j e $U_{1/2}^j(R_1 a_j) = \mathring{a}_j$ e $U_{1/2}^j(\mathring{a}_j) = -R_1 a_j$. Para futura referência, registramos que

$$(U_{1/2}^j)^{-1}(\mathring{a}_j) = R_1 a_j \tag{3}$$

Para cada j, para cada $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, defina o operador unitário $\mathring{U}^j : A_j \to A_j$ por

$$\begin{aligned} \mathring{U}_t^j((U_{1/2}^j)^{-1}\mathring{a}_j) &= (\cos \pi(t-1/2))\, \mathring{a}_j \,+\, (\sin \pi(t-1/2))\, a_j \\ \mathring{U}_t^j((U_{1/2}^j)^{-1} a_j) &= (-\sin \pi(t-1/2))\, \mathring{a}_j \,+\, (\cos \pi(t-1/2))\, a_j \\ \mathring{U}_t^j((U_{1/2}^j)^{-1} x) &= x, \quad\ x \in [a_j, \mathring{a}_j]^\perp \end{aligned} \tag{4}$$

Temos também, da mesma maneira, que $[\frac{1}{2}, 1] \ni t \mapsto \mathring{U}_t^j \in \mathcal{U}(A_j)$ é contínua. Usando (3) e fazendo $t = 1$ em (4), temos

$$U_1(R_1 a_j) = a_j. \tag{5}$$

Fazendo $t = 1/2$ em (4), vemos que $\mathring{U}_{1/2}^j(y) = U_{1/2}^j(y)$ para todo y pertencente a uma base ortonormal de A_j. Logo $\mathring{U}_{1/2}^j = U_{1/2}^j$. Podemos portanto redefinir $\mathring{U}_t^j = U_t^j$, $1/2 \leq t \leq 1$, obtendo assim uma homotopia $(U_t^j)_{t \in [0,1]}$ em $\mathcal{U}(A_j)$ tal que $U_0 = I_{A_j}$ e U_1 satisfaz (5)

Vamos agora "colar" essas homotopias em $\mathcal{U}(A_j)$ de modo a obter uma homotopia $(U_t)_{t \in [0,1]}$ no conjunto dos operadores unitários em H, que denotamos por $\mathcal{U}(H)$. Para tanto, consideremos a seguinte decomposição de H em subespaços mutuamente ortogonais

$$H \;=\; \overline{(\oplus_{j=1}^\infty A_j)} \bigoplus (\oplus_{j=1}^\infty A_j)^\perp .$$

Todo $x \in H$ pode ser escrito de maneira única como $x = \sum_{j=1}^\infty x_j + x'$, $x_j \in A_j$ e x' ortogonal a x_j para todo j. Para cada $t \in [0,1]$, podemos definir $U_t \in \mathcal{U}$ por

$$U_t x \;= \sum_{j=1}^\infty U_t x_j \,+\, x'.$$

Dados $t, t' \in [0,1]$, temos portanto

$$\|(U_t - U_{t'})(x)\|^2 \;=\; \sum_{j=1}^\infty \|(U_t^j - U_{t'}^j)(x_j)\|^2 \;\leq\; \sup_j \|U_t^j - U_{t'}^j\|^2 \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^2 \leq \sup_j \|U_t^j - U_{t'}^j\|^2 \|x\|^2,$$

de onde segue que

$$\|U_t - U_{t'}\ \| \;\leq\; \sup_j \|U_t^j - U_{t'}^j\|. \tag{6}$$

Para provar a continuidade de $(U_t)_{t \in [0,1]}$, basta portanto provar que $\lim_{t' \to t} U_{t'}^j = U_t^j$, uniformemente em j.

Denotemos por $\|\cdot\|_{\text{op}}$ a norma de operadores em $M_n(\mathbb{C})$, isto é,

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{\{x\in\mathbb{C}^n;x\neq 0\}} \frac{\|Ax\|_{\text{e}}}{\|x\|_{\text{e}}}$$

onde denotamos por $\|\cdot\|_{\text{e}}$ a norma euclidiana em $\mathbb{C}^n$. É fácil ver que

$$\|A\|_{\text{op}} \leq \max\{|a_{jk}|;\, 1 \leq j,k \leq n\}, \tag{7}$$

para toda $A = (\!(a_{jk})\!)_{1\leq j,k\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$.

Para cada j, tome $a_j^{\heartsuit}$ e $a_j^{\dagger}$ em A_j de modo que $\beta_1 = \{R_1 a_j, \mathring{a}_j, a_j^{\heartsuit}\}$ $\beta_2 = \{a_j, \mathring{a}_j, a_j^{\dagger}\}$ sejam bases ortonormais de A_j. Considere ainda a base ortonormal $\beta_3 = \{(U^j_{1/2})^{-1}a_j, (U^j_{1/2})^{-1}\mathring{a}_j, (U^j_{1/2})^{-1}a_j^{\dagger}\}$. Para $i = 1,2,3$, considere o operador unitário $\alpha_i : A_j \to \mathbb{C}^3$ que leva $x \in A_j$ em suas coordenadas na base β_i. Se $0 \leq t,t' \leq 1/2$, usando (3), (4) e (7), temos

$$\|U_t^j - U_{t'}^j\| = \|\alpha_1(U_t - U_{t'})\alpha_1^{-1}\| =$$
$$\left\|\begin{bmatrix} \cos\pi t - \cos\pi t' & \sin\pi t' - \sin\pi t & 0 \\ \sin\pi t - \sin\pi t' & \cos\pi t - \cos\pi t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|_{\text{op}} \leq \max\{|\cos\pi t - \cos\pi t'|, |\sin\pi t - \sin\pi t'|\},$$

o que prova que $(U_t)_{t\in[0,\frac{1}{2}]}$ é contínua. Se $1/2 \leq t,t' \leq 1$, vem

$$\|U_t^j - U_{t'}^j\| = \|\alpha_3(U_t - U_{t'})\alpha_2^{-1}\| = \left\|\begin{bmatrix} \cos\pi(t-1/2) - \cos\pi(t'-1/2) & \sin\pi(t'-1/2) - \sin\pi(t-1/2) & 0 \\ \sin\pi(t-1/2) - \sin\pi(t'-12) & \cos\pi(t-1/2) - \cos\pi(t'-1/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\|_{\text{op}} \leq$$

$$\max\{|\cos\pi(t-1/2) - \cos\pi(t'-1/2)|, |\sin\pi(t-1/2) - \sin\pi(t'-1/2)|\},$$

de onde segue que

$$\sup_j \|U_t^j - U_{t'}^j\| \leq \max\{|\cos\pi(t-1/2) - \cos\pi(t'-1/2)|, |\sin\pi(t-1/2) - \sin\pi(t'-1/2)|\}, \tag{8}$$

o que prova, devido a (6), que $(U_t)_{t\in[\frac{1}{2},1]}$ é contínua.

Consideremos agora a homotopia $R_t = U_{t-1}R_1$, $1 \leq t \leq 2$. Usando (5), vem $R_2(a_j) = U_1(R_1 a_j) = a_j$ para todo j e $R_2 x = R_1 x = R_0 x$ se $x \in \left(\oplus_{j=1}^{\infty} A_j\right)^{\perp}$. □

Seja M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H. Dados $T_{11} \in B(M,M)$, $T_{22} \in B(M^{\perp})$, $T_{12} \in B(M^{\perp}, M)$ e $T_{21} \in B(M, M^{\perp})$, um operador $T \in B(H)$ pode ser definido por meio de multiplicação de matrizes,

$$H = M \oplus M^{\perp} \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xmapsto{T} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in M \oplus M^{\perp} = H.$$

Reciprocamente, todo $T \in B(H)$ pode ser descrito por uma única matriz como acima, tomando $T_{ij} = P_i T I_j$, $P_1 : H \to M$ e $P_2 : H \to M^{\perp}$ projeções ortogonais, $I_1 : M \to H$ e $I_2 : M^{\perp} \to H$ inclusões. É fácil ver que

$$\|T_{ij}\| \leq \|T\| \text{ para todo } (i,j) \;\text{ e }\; \|T\| \leq \max\{\|T_{ij}\|;\, 1 \leq 1, j \leq 2\}. \tag{9}$$

Chamaremos $(\!(T_{ij})\!)_{1\leq i,j\leq 2}$ de *matriz de* T *relativa à decomposição* $H = M \oplus M^{\perp}$.

`Exercício 1`: (a) Seja E e F subespaços fechados de um espaço de Banach X, tais que $X = E \oplus F$, seja $T \in B(X)$. Mostre que existem únicos $T_{11} \in B(E)$, $T_{22} \in B(F)$, $T_{12} \in B(F, E)$ e $T_{21} \in B(E, F)$ tais que

$$X = E \oplus F \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{T}{\longmapsto} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{bmatrix} \in E \oplus F = X.$$

(b) Mostre que a bijeção definida no item (a), $B(X) \mapsto B(E) \times B(F, E) \times B(E, F) \times B(F)$ é um isomorfismo de espaços de Banach.

Proposição 12. ([6, Lemma 7]) *Seja $R \in B(H)$ inversível. Se existir um subespaço V, V e $V^\perp$ de dimensão infinita, restrito ao qual R é igual à identidade, então existe uma homotopia conectando R à identidade em $GL(H)$.*

`Demonstração`: Sendo R contínuo, R restrito ao fecho de V, $\overline{V}$, também é a identidade. A matriz de R relativa à decomposição $H = V^\perp \oplus \overline{V}$ é da forma

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ Q & I \end{bmatrix},$$

onde I denota a identidade em $\overline{V}$. Para cada $t \in [0, 1]$, podemos definir $R_t \in B(H)$ declarando que sua matriz relativa à decomposição $H = V^\perp \oplus \overline{V}$ é

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ (1-t)Q & I \end{bmatrix}.$$

Decorre de (9) que a aplicação $t \mapsto R_t$ é contínua e $R_0 = R$. Basta agora mostrar que o operador R_1, que tem como matriz

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

(escrevemos então $R_1 = P \oplus I$), pode ser deformado à identidade.

Seja $\{a_1, a_2, \cdots\}$ um conjunto ortonormal completo de $\overline{V}$. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ pode ser decomposto como uma união infinita de subconjuntos infinitos disjuntos, por exemplo,

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_2 \cup \mathbb{N}_3 \cup \mathbb{N}_4 \cup \cdots, \quad \mathbb{N}_j = \{2^{j-2}(2k-1);\, k \in \mathbb{N}\},\ j = 2, 3, 4, \cdots.$$

Seja $H_1 = V^\perp$ e seja H_j o subespaço fechado gerado por $\{a_i;\, i \in \mathbb{N}_j\}$, $j = 2, 3, \cdots$. Então $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots$ (soma algébrica) é denso em H. Dados $B_j \in B(H_j)$, $j = 1, 2, \cdots$, tais que $\sup\{\|B_j\|;\, j = 1, 2, \cdots\} = m < \infty$, existe um único $B \in B(H)$, $\|B\| = m$, tal que B restrito a H_j coincide com B_j para todo j (verifique esta afirmação). Denotamos $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots$. Esta “soma” é “associativa” no seguinte sentido. Definindo $K_1 = H_1$, $K_2 = H_2 \oplus H_3$, $K_3 = H_4 \oplus H_5$, $\cdots$ e $C_1 = B_1$, $C_2 = B_2 \oplus B_3$, $C_3 = B_4 \oplus B_5$, $\cdots$, vale também a igualdade $B = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus \cdots$ (verifique esta afirmação). É neste sentido que podemos escrever

$$R = P \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus I_4 \oplus I_5 \oplus \cdots = P \oplus (I_2 \oplus I_3) \oplus (I_4 \oplus I_5) \oplus \cdots,$$

onde I_j denota o operador identidade em H_j. Todos os espaços H_j são espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita e portanto são mutuamente isomorfos. Usando esses isomorfismos, podemos identificar todos os operadores identidade, denotando $I_j = I$ para todo j, sempre que for conveniente. Em cada H_j, podemos definir operadores P_j unitariamente equivalentes a P, e sempre que for conveniente denotaremos $P_j = P$ para todo j. Com esse entendimento, podemos escrever

$$R = P \oplus (PP^{-1} \oplus I) \oplus (PP^{-1} \oplus I) \cdots$$

Para $k = 1, 2, \cdots$, é possível construir uma curva contínua de operadores inversíveis em $B(H_{2k} \oplus H_{2k+1})$ conectando $PP^{-1} \oplus I$ a $P^{-1} \oplus P$. Formalmente (ou seja, ignorando o isomorfismo que permite identificar H_{2k} com H_{2k+1} e P_{2k} com P_{2k+1}), essa homotopia pode ser descrita pela fórmula ([2, Exercise 3.18])

$$[0, \pi/2] \ni t \longmapsto \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{10}$$

As homotopias $P^{-1}P \oplus I \sim_h P^{-1} \oplus P$ em $GL(H_{2k} \oplus H_{2k+1})$, $k = 1, 2, \cdots$, podem ser coladas para definir uma homotopia em $GL(H)$. Rearranjando os parêntesis, vem

$$R = P \oplus (PP^{-1} \oplus I) \oplus (PP^{-1} \oplus I) \cdots \sim_h P \oplus (P^{-1} \oplus P) \oplus (P^{-1} \oplus P) \oplus \cdots = (P \oplus P^{-1}) \oplus (P \oplus P^{-1}) \oplus (P \oplus P^{-1}) \oplus \cdots$$

Pelo mesmo argumento usado logo acima, cada $P \oplus P^{-1}$ é homotópico em $GL(H_{2k-1} \oplus H_{2k})$ a $I_{2k-1} \oplus I_{2k}$, $k = 1, 2, \cdots$. Segue portanto que R é homotópico a $I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus \cdots$, que é o operador identidade em H. □

`Exercício 2`: Verifique em detalhe as afirmações à cerca da homotopia em (10) . Em particular, justifique porque a homotopia só assume valores em operadores inversíveis e escreva a homotopia mais explicitamente, escrevendo P_{2k-1} ou P_{2k} no lugar de P e fazendo aparecer na fórmula o isomorfismo $\Xi_k : H_{2k} \to H_{2k+1}$.

`Exercício 3`: Demonstre a Proposição 12 no caso em que $V^\perp$ tem dimensão finita.

Está praticamente pronta a demonstração do principal teorema desta seção.

Teorema 4. *Seja H um espaço de Hilbert separável, real ou complexo. Então $GL(H)$ é conexo por caminhos.*

`Demonstração`: Dado $R_0 \in B(H)$, segue das Proposições 9, 10 e 11 que existe uma homotopia $(R_t)_{t \in [0,2]}$ tal que $R_2 a_j = a_j$ para todo $j = 1, 2, \cdots$, sendo $\{a_1, a_2, \cdots\}$ um conjunto ortonormal infinito.

Seja V o subespaço de H gerado por $\{a_1, a_2, \cdots\}$. Por construção, sabemos que $V^\perp$ tem dimensão infinita ($V^\perp$ contém o conjunto ortonormal infinito $\{\mathring{a}_1, \mathring{a}_2, \cdots\}$). Segue da Proposição 12 que R_2 é homotópico ao operador identidade em H. □

`Observação`. O Teorema 4 vale também, com a mesma demonstração que demos aqui, para *espaços de Hilbert quarterniônicos*.

5. O Teorema de Kuiper

Seja X um espaço de Hausdorff compacto e seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita.

Proposição 13. *Dada $f \in C(X, GL(H))$, existe homotopia $(f_t)_{0\le t\le 1}$ tal que $f_0 = f$ e a imagem de f_1, $\{f_1(x); x \in X\}$, está contida em um subespaço $V \subset B(H)$ de dimensão finita.*

Proposição 14. *Dados $T_1, T_2, \cdots T_n \in GL(H)$, existe um conjunto ortonormal infinito $\{a_1, a_2, \cdots\}$, uma família de subespaços $A_1, A_2, \cdots$ de dimensão $n+2$, A_j ortogonal a A_k se $j \ne k$, tais que $\{a_j, T_1 a_j, \cdots, T_n a_j\}$ está contido em A_j para todo j.*

`Demonstração`: A construção começa tomando-se arbitrariamente um $a_1 \in H$ unitário e A_1 um subespaço de dimensão $n+2$ de H contendo $\{a_j, T_1 a_j, \cdots, T_n a_j\}$.

O espaço $W_1 = A_1^{\perp} \cap T_1^{-1}(A_1^{\perp}) \cap \cdots \cap T_n^{-1}(A_1^{\perp})$ tem codimensão finita, pois é a interseção de um número finito de espaços de codimensão finita. Escolha arbitrariamente a_2 unitário pertencente a W_1. Cada $T_i(a_2)$ pertence a $A_1^{\perp}$, pois $a_2 \in T_i^{-1}(A_1^{\perp}$, $i = 1, 2, \cdots n$. Escolha arbitrariamente um subespaço $A_2 \subset A_1^{\perp}$ de dimensão $n+2$ contendo $\{a_2, T_1 a_2, \cdots, T_m a_2\}$.

O espaço $W_2 = W_1 \cap A_2^{\perp} \cap T_1^{-1}(A_2^{\perp}) \cap \cdots \cap T_n^{-1}(A_2^{\perp})$ tem codimensão finita. Escolha arbitrariamente $a_3 \in W_2$ unitário. Então $T_i(a_3) \in A_1^{\perp} \cap A_2^{\perp}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, pois $a_3 \in T_i^{-1}(A_1^{\perp}) \cap T_i^{-1}(A_2^{\perp})$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Escolha arbitrariamente um espaço de dimensão $n+2$ contido em $A_1^{\perp} \cap A_2^{\perp}$ contendo $\{a_3, T_1 a_3, \cdots, T_n a_3\}$.

Já deve ter ficado claro para o leitor como se pode concluir por indução esta demonstração. É importante notar que, para cada n, o W_n correspondente tem codimensão finita, de modo que sempre haverá espaço para continuar o processo. A hipótese de indução é apresentada explicitamente em [6, Lemma 3]. □

O aparente desperdício ao tomar cada A_j com dimensão $n+2$, apesar de bastar tomar um espaço de dimensão $n+1$ para conter $\{a_j, T_1 a_j, \cdots, T_m a_j\}$, se justifica para que tenhamos mais espaço para construir homotopias de operadores em A_j. A dimensão de A_j ser maior do que $n+1$ garante a existência, para cada j, de um vetor unitário $\mathring{a}_j \in A_j$ ortogonal aos vetores $a_j, T_1 a_j, \cdots, T_n a_j$.

Seja n a dimensão do espaço V de dimensão finita obtido na Proposição 13, seja $\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ uma base de V. Para cada $R \in V$, temos que $\mathring{a}_j$ é ortogonal a a_j e Ra_j. As demonstrações das Proposições 10 e 11 mostram que existe homotopia $(R_t)_{t\in[0,1]}$ em $GL(H)$ tal que $R_0 = R$ e $R_1 a_j = a_j$ para todo j. Mas precisamos de mais do que isso, precisamos de continuidade conjunta nas duas variáveis da aplicação $(R, t) \mapsto R_t$. Esta afirmação será reenunciada de forma mais precisa na demonstração das duas proposições seguintes.

Proposição 15. *Seja V um subespaço de dimensão $n < \infty$ de $GL(H)$ e seja $f \in C(X, GL(H))$ tal que $f(x) \in V$ para todo $x \in X$. Sejam A_j, $j = 1, 2, \cdots$ subespaços de dimensão $n+2$ mutuamente ortogonais, sejam a_j e $\mathring{a}_j$ vetores unitários em A_j tais que $\mathring{a}_j$ é perpendicular a a_j e a Ta_j para todo j e para todo $T \in V$. Então existe uma homotopia $(f_t)_{t\in[0,1]}$ tal que $f_0 = f$ e $\|f_1(x) a_j\| = 1$ para todo $x \in X$ e para todo $j = 1, 2 \cdots$*

`Demonstração`:

Etc, etc. □

Exercício 4.

Sejam V um espaço complexo com produto interno e $\{u, v\}$ um conjunto linearmente independente em V, $\|u\| = \|v\| = 1$. Denotaremos, como de costume, por $[u, v]$ o subespaço de V gerado por u e v. Seja $w \in V$ unitário e ortogonal a u e a v, denotemos por W o subespaço de V gerado por u, v e w.

(a) Mostre que existem vetores unitários $u^\flat$ e $v^\flat$ em V tais que $\beta_1 = \{u, u^\flat\}$ e $\beta_2 = \{v, v^\flat\}$ sejam bases ortonormais de $[u, v]$, a matriz de mudança de coordenadas de β_2 para β_1 sendo dada por [2]

$$[I]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} \overline{\langle u, v\rangle} & -\sqrt{1 - |\langle u, v\rangle|^2} \\ \sqrt{1 - |\langle u, v\rangle|^2} & \langle u, v\rangle \end{bmatrix}$$

Dado $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, denotemos por R_1 e R_2 os operadores lineares em W cuja matrizes nas bases β_1 e β_2 são

$$[R_1]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [R_2]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(b) Seja $A = ((a_{jk}))_{1\le j,k\le 3}$ a matriz na base β_1 do operador $R_1 \circ R_2 - I$. Mostre que

$$\max_{1\le j,k\le 3} |a_{jk}| \;\le\; 3\,\max\{|\sin\alpha|,\, |\cos\alpha - 1|,\, |\cos\alpha - e^{i\lambda}|\},$$

onde $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ e $e^{i\lambda} \in S^1$ são definidos pelas igualdades $|\langle u, v\rangle| = \cos\alpha$ e $\langle u, v\rangle = e^{i\lambda}\cos\alpha$.

(c) Supondo que $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$, para os operadores R_1 e R_2 definidos antes do item (b) mostre que

$$\|R_1 \circ R_2 - I\| \le C\|u - v\|, \tag{11}$$

com $C = 18$.

(d) Existe uma constante universal C tal que valha (11) mesmo que $\langle u, v\rangle$ não seja real?

Proposição 16. *Seja V um subespaço de dimensão $n < \infty$ de $GL(H)$ e seja $f \in C(X, GL(H))$ tal que $f(x) \in V$ para todo $x \in X$. Sejam A_j, $j = 1, 2, \cdots$ subespaços de dimensão $n + 2$ mutuamente ortogonais, sejam a_j e $\mathring{a}_j$ vetores unitários em A_j tais que $\mathring{a}_j$ é perpendicular a a_j e a Ta_j para todo j e para todo $T \in V$. Além disso, suponha que $\|Ta_j\| = 1$ para todo j e para todo $T \in V$. Então existe uma homotopia $(f_t)_{t\in[0,1]}$ em $C(X, GL(H))$ tal que $f_0 = f$ e $f_1(x)a_j = a_j$ para todo $x \in X$ e para todo $j = 1, 2\cdots$*

`Demonstração`: Para cada $j = 1, 2, \cdots$, $T \in V \cap GL(H)$ e $t \in [0, \frac{1}{2}]$, defina em A_j o operador unitário $U_j(T, t)$ pela fórmula (2) com T no lugar de R_1; para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, use a fórmula (4), que depende só de j. Para cada $T \in V \cap GL(H)$ fixo, a demonstração que demos da continuidade de $[0, 1] \ni t \mapsto U_t^j \in \mathcal{U}(A_j)$ na Proposição 11 demonstra também a continuidade de $[0, 1] \ni t \mapsto U(T, t) \in \mathcal{U}(A_j)$, com as seguintes modificações. A base β_1 passa a ser uma base ortonormal de A_j cujos dois primeiros vetores são $\{Ta_j, \mathring{a}_j\}$; analogamente para β_2 com a_j substituindo Ta_j. E β_3 passa a ser a imagem de β_2 pelo operador unitário $(U_{1/2}^j)^{-1}$. As isometrias $\alpha_i : A_j \to \mathbb{C}^{n+2}$ são definidas do mesmo jeito e as matrizes 3×3 são substituídas por matrizes $(n+2) \times (n+2)$

[2] A matriz $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ satisfaz $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}[x]_{\beta_2} = [x]_{\beta_1}$, $[x]_{\beta_i}$ denotando as coordenadas de qualquer $x \in [u, v]$ na base β_i.

com a mesma aparência, em que as entradas nulas denotam blocos de zeros de tamanhos $1 \times n$, $n \times n$ ou $n \times 1$. Como, para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $U_j(T,t)$ só depende de t, isto é suficiente para demonstrar a continuidade da aplicação

$$(V \cap GL(H)) \times [1/2, 1] \longmapsto U_j(T,t) \in \mathcal{U}(A_j)$$

Além disso, a continuidade é uniforme em j, tal como expressamos na desigualdade (8).

Para $T, T' \in V_\cap GL(H)$ e $t, t' \in [0, \frac{1}{2}]$, temos

$$\|U_j(T,t) - U_j(T',t')\| \leq \|U_j(T,t) - U_j(T,t')\| + \|U_j(T,t') - U_j(T',t')\| \tag{12}$$

De novo pelo argumento da Proposição 11, a primeira parcela do lado direito de (12) fica arbitrariamente pequena, uniformemente em j, para $|t - t'|$ suficientemente pequeno. Para estimar a segunda parcela, temos de levar em conta que a isometria α_1 depende de T. Se $Ta_j = T'a_j$, a segunda parcela é nula. Se $Ta_j \neq T'a_j$, seja $\alpha \neq 0$ o ângulo formado por Ta_j e $T'a_j$.

□

Concatenando as homotopias obtidas nas Proposições 13, 15 e 16, obtemos imediatamente o seguinte teorema.

Teorema 5. *Dada $f \in C(X, GL(H))$, existem um conjunto ortonormal $\{a_1, a_2, \cdots\}$ e homotopia $(f_t)_{t\in[0,3]}$ tais que $f_0 = f$ e $f_3(a_j) = a_j$ para todo j.*

6. Um pouco de K-teoria topológica

6.1. O funtor $\mathcal{G}$.

Resumo desta subseção, que ainda vai ser escrita': Dado semigrupo abeliano H, definimos o grupo abeliano $\mathcal{G}(H)$ e homomorfismo de semigrupos $\gamma : H \to \mathcal{G}(H)$. A imagem de γ gera $\mathcal{G}$.

6.2. Fibrados vetoriais.

Dado um produto cartesiano $A \times B$, denotaremos por $\pi_1 : A \times B \to A$ e $\pi_2 : A \times B \to B$ as projeções canônicas.

Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Um *fibrado vetorial* (complexo) sobre X é um par (E, p), em que E é um espaço topológico e $p : E \to X$ é uma aplicação contínua e sobrejetora satisfazendo:

(1) Para todo $x \in X$, a *fibra* $E_x := p^{-1}(\{x\})$ está munida da estrutura de um espaço vetorial (complexo) e
(2) Para todo $x_0 \in X$, existem um aberto $U \ni x_0$ e um homeomorfismo $\chi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^N$ tais que $\pi_1 \circ \chi = p$ e, para todo $x \in U$, $\psi_x := \pi_2 \circ \chi|_{E_x} : E_x \to \mathbb{C}^N$ é um isomorfismo linear.

Os homeomorfismos satisfazendo a condição (2) são chamados de *trivializações locais* do fibrado (E, p). Seus domínios são chamados de *abertos triviais*.

Analogamente definem-se fibrados vetoriais reais: as *fibras* E_x são espaços vetoriais reais e as trivializações locais tomam valores em $U \times \mathbb{R}^N$.

Frequentemente omitiremos a *projeção* p ao nos referir ao fibrado (E,p), que será chamado simplesmente de "o fibrado E".

`Exemplo` Dado V um espaço vetorial (real ou complexo) de dimensão finita, o produto cartesiano $X \times V$ munido da projeção canônica sobre X é um fibrado vetorial.

`Exercício 6.1`. (a) Mostre que a dimensão das fibras de um fibrado vetorial sobre X é localmente constante. (b) Mostre que o *espaço total* E do fibrado vetorial (E,p) sobre X é de Hausdorff (lembrando que estamos supondo que X é de Hausdorff).

Quando X é conexo, chamamos a dimensão das fibras de *posto* de um fibrado vetorial sobre X.

Um morfismo entre dois fibrados vetoriais sobre X, (E,p) e (F,q), é uma aplicação contínua $\Phi : E \to F$ satisfazendo (i) $q \circ \Phi = p$ e (ii) para todo $x \in X$, $\Phi_x := \Phi|_{E_x}$ é linear. Um isomorfismo entre dois fibrados vetoriais sobre X é um morfismo bijetor Φ cuja inversa Φ^{-1} também é um morfismo de fibrados vetoriais.

Um fibrado vetorial sobre X é *trivial* se ele é isomorfo a $X \times \mathbb{C}^N$ (ou $X \times \mathbb{R}^N$, no caso real).

`Exercício 6.2`. Considere a união disjunta das retas tangentes ao círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$,

$$E \ = \ \{((x_0,y_0),(x,y)) \in S^1 \times \mathbb{R}^2;\, x_0x + y_0y = 1\},$$

munida da topologia relativa de $\mathbb{R}^4$, seja $p : E \to S^1$ a projeção canônica $p((x_0,y_0),(x,y)) = (x_0,y_0)$. Mostre que (E,p) é um fibrado vetorial (real) trivial de posto 1 sobre S^1.

Seja (E,p) um fibrado vetorial sobre X, sejam $\chi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^N$ e $\chi_\beta : p^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{C}^N$ trivializações locais. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, podemos considerar [3] a *função de transição*

$$\chi_{\alpha,\beta} := \chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^N \ \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^N.$$

Decorre imediatamente que existe $g_{\alpha,\beta} \in C(U_\alpha \cap U_\beta, GL(\mathbb{C}^N))$ tal que $\chi_{\alpha,\beta}(x,v) = (x, g_{\alpha,\beta}(x)v)$ para todo $(x,v) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^N$. No caso em que $\alpha = \beta$ e $\chi_\alpha = \chi_\beta$, então $g_{\alpha,\alpha}(x)$ é igual à identidade $N \times N$ para todo $x \in U_\alpha$.

Seja $\{U_\alpha;\, \alpha \in I\}$ uma família de abertos triviais de X, a cada qual deles sendo associada a trivialização χ_α. Então a família $\{g_{\alpha,\beta};\, \alpha,\beta \in I\}$ satisfaz a condição

$$g_{\alpha,\beta}(x)g_{\beta,\gamma}(x) = g_{\alpha,\beta}(x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma,\ \forall \alpha,\beta,\gamma \in I. \tag{13}$$

[3] Pode ser conveniente em alguns contextos incluir nessa definição a possibilidade de a interseção ser vazia, de modo que a função de transição é a função vazia.

`Exercício 6.3`. Seja $\{U_\alpha;\ \alpha \in I\}$ uma cobertura de X por abertos. Suponha que exista uma família $\{g_{\alpha,\beta} \in C(U_\alpha \cap U_\beta, GL(\mathbb{C}^N);\ (\alpha,\beta) \in I \times I\}$ satisfazendo a condição (13). Considere a união disjunta dos abertos da cobertura, $Z := \bigcup_{\alpha\in I}\{\alpha\} \times (U_\alpha \times \mathbb{C}^N)$. Defina em Z a relação

$$(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v),\ (x,u) \in U_\alpha,\ (y,v) \in U_\beta \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \text{ e } v = g_{\alpha.\beta}(x)u$$

(note que α pode ser igual a β).
(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.
(b) Seja $E^\dagger$ o quociente do espaço topológico Z por $\sim$, seja $\pi : E^\dagger \to X$ a aplicação que leva a classe de equivalência de (α, x, v) em x. Mostre $(E^\dagger, p)$ é um fibrado vetorial sobre X.

`Exercício 6.4`. Seja (E,p) um fibrado vetorial sobre X, seja $\{U_\alpha;\ \alpha \in I\}$ uma cobertura de X por abertos, seja $\{g_{\alpha,\beta};\ \alpha,\beta \in I\}$ a família de funções de transição associada a essa família de abertos triviais. Mostre que o fibrado $E^\dagger$ construído no exercício precedente é isomorfo a E.

`Exercício 6.5`. Defina em $[0,1] \times \mathbb{C}$ a relação

$$(x,\lambda) \sim (y,\eta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,\lambda) = (y,\eta) \quad \text{ou} \quad \{x,y\} = \{0,1\} \text{ e } \lambda = -\eta$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.
(b) Seja E o quociente de $[0,1] \times \mathbb{C}$ por $\sim$, seja $p : E \to [0,1]$ a aplicação que leva a classe de (x,λ) em x. Mostre que (E,p) é um fibrado vetorial.
(c) Descreva as funções de transição para uma cobertura de $[0,1]$ que consista de dois abertos triviais.
(d) Mostre que (E,p) não é trivial.

6.3. **O funtor `Vect`.**

Denotaremos por $\mathtt{Vect}(X)$ o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados vetorias sobre X. Cada elemento de $\mathtt{Vect}(X)$ será denotado por $[E]$, sendo E um fibrado vetorial sobre X. Nosso próximo objetivo é munir $\mathtt{Vect}(X)$ de uma estrutura de semigrupo abeliano.

Dados (E,p) e (F,q) fibrados vetoriais sobre X, definimos

$$E \oplus F \;=\; \{(e,f) \in E \times F;\ p(e) = q(f)\}.$$

Este conjunto será então munido da topologia relativa do produto cartesiano $E \times F$ que o contém. Em $E \otimes F$, definimos $p \oplus q : E \oplus F \to X$ por $p \oplus q(e,f) = p(e) = q(f)$, que é contínua (por ser a restrição de uma projeção canônica) e sobrejetora.

`Exercício 6.6`. Sejam (E,p), (F,q) e (G,r) fibrados vetoriais sobre X.
(a) Mostre que $(E \oplus F, p \oplus q)$ é um fibrado vetorial sobre X.
(b) Mostre que $E \oplus F$ e $F \oplus E$ são isomorfos.
(c) Mostre que $(E \oplus F) \oplus G$ e $E \oplus (F \oplus G)$ são isomorfos.

(d) Sejam E' e F' fibrados vetoriais sobre X isomorfos a E e F, respectivamente. Mostre que $E \oplus F$ e $E' \oplus F'$ são isomorfos.

Segue do exercício precedente que a aplicação

$$\mathtt{Vect}(X) \times \mathtt{Vect}(X) \ni ([E],[F]) \longmapsto [E \oplus F] \in \mathtt{Vect}(X)$$

está bem definida. Munido dela, $\mathtt{Vect}(X)$ torna-se um semigrupo abeliano, com elemento neutro dado por $[X \times \{0\}]$.

6.4. **Todo fibrado vetorial é um somando direto de um fibrado trivial.**

Esta subseção é baseada em [4].

Seja X um espaço compacto de Hausdorff.

Proposição 17. *Seja $p : E \to X$ um fibrado vetorial de posto N. Existem inteiro positivo $M \geq N$ e morfismo de fibrados vetoriais $\sigma : E \to X \times \mathbb{C}^M$, tal que σ é uma função injetora.*

`Demonstração`: Sejam $\chi_j : p^{-1}(U_j) \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^N$, $j = 1, \cdots, n$, trivializações locais tais que $\{U_1, \cdots, U_n\}$ cubra X. Tome $\lambda_j \in C(X)$ com suporte contido em U_j, $j = 1, \cdots, n$, tais que, para todo $x \in X$, existe j tal que $\lambda_j(x) \neq 0$ (essa condição será satisfeita, por exemplo, se $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ for uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$). Para cada j defina agora $\Phi_j : E \longrightarrow \mathbb{C}^N$ por

$$\Phi_j(e) = \begin{cases} \lambda_j(p(e))\, \pi_2(\chi_j(e)) & , \quad \text{se} \quad e \in p^{-1}(U_j) \\ 0 & , \quad \text{se} \quad e \notin p^{-1}(U_j) \end{cases}$$

e $\sigma : E \longrightarrow \mathbb{C}^M$, $M = nN$, por $\sigma(e) = (p(e), \Phi_1(e), \cdots, \Phi_n(e))$, $e \in E$. É simples perceber que $\pi_1 \circ \sigma = p$ e que σ é contínua.

Provemos que σ é injetora.

Se $e, f \in E$ e $p(e) \neq p(f)$, então $\pi_1(\sigma(e)) \neq \pi_1(\sigma(f))$ e portanto $\sigma(e) \neq \sigma(f)$. Suponha que $\sigma(e) = \sigma(f)$ (e portanto $p(e) = p(f) =: x$). Tome j tal que $\lambda_j(x) \neq 0$. Segue de $\Phi_j(e) = \Phi_j(f)$ que $\pi_2(\chi_j(e)) = \pi_2(\chi_j(f))$ e, portanto, que $e = f$ (pois a restrição $\pi_2 \circ \chi_j$ a E_x é injetora, já que χ_j é uma trivialização). □

Proposição 18. *Seja $\Phi : E \to F$ um morfismo injetor entre os fibrados vetoriais $p : E \to X$ e $q : F \to X$, seja $E' \subseteq F$ a imagem de Φ. Então $q|_{E'} : E' \to X$ é um fibrado vetorial e $\Phi : E \to E'$ é um isomorfismo.*

`Demonstração`: É claro que $\Phi : E \to E'$ é uma bijeção que preserva fibras e que, restrita a qualquer fibra, é um isomorfismo linear. Além disso, $q \circ \Phi = p$ e Φ é contínua. Para provar a Proposição, basta provar que $\Phi^{-1}|_{E'} : E' \to E$ é contínua (daí, as composições $\chi \circ \Phi^{-1}$ serão trivializações de E', para todas trivializações χ de E, $\Phi^{-1} : E' \to E$ será um morfismo de fibrados).

Provemos portanto que $\Phi^{-1}|_{E'} : E' \to E$ é contínua.

Basta provar que a restrição de Φ^{-1} a $E' \cap q^{-1}(U)$ é contínua se $U \subseteq X$ for um aberto trivial para E e para F. Compondo Φ à direita e à esquerda com trivializações, basta provar que Φ^{-1} é contínua no caso em que $E = U \times \mathbb{C}^N$ e $F = U \times \mathbb{C}^M$. Como Φ_x é uma transformação linear injetora para todo x, devemos supor também que $N \leq M$.

Denotemos por $\{e_1, \cdots, e_N\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^N$ e definamos $v_i(x) = \pi_2 \circ \Phi(x, e_i)$, $x \in U$. Claro que as funções $U \ni x \mapsto v_i(x) \in \mathbb{C}^M$ são contínuas, pois Φ é. Como Φ_x é injetora, $\{v_1(x), \cdots, v_N(x)\}$ é linearmente independente e gera $\pi_2(E'_x)$. Dado $e' \in E'$, $e' = (x, v) \in U \times \mathbb{C}^M$, existem únicos $\xi_1(x), \cdots, \xi_N(x)$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^{N} \xi_j(x) v_j(x) \qquad \text{e} \qquad \Phi^{-1}(e') = (x, \xi_1(x), \cdots, \xi_N(x)), \quad x = q(e').$$

Para provar a continuidade de Φ^{-1} basta portanto provar a continuidade de $U \ni x \mapsto (\xi_1(x), \cdots, \xi_N(x)) \in \mathbb{C}^N$. A n-upla $(\xi_1(x), \cdots, \xi_N(x))$ é solução do sistema linear (com $v_j(x) = (v_j^1(x), \cdots, v_j^N(x))$ e $v = (v_1, \cdots, v_M)$)

$$\begin{bmatrix} v_1^1(x) & . \quad . \quad . & v_N^1(x) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ v_1^M(x) & . \quad . \quad . & v_N^M(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ \xi_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ v_M \end{bmatrix}$$

Para todo $x \in U$, este sistema linear tem solução única porque v pertence à imagem de Φ_x. Para cada $x \in U$, é possível extrair $M - N$ linhas da matriz dos coeficientes e $M - N$ linhas do vetor-coluna do lado direito da equação de modo que o sistema $N \times N$ resultante tenha solução única, que pode ser expressa pela regra de Cramer. Como os coeficientes da matriz dos coeficientes dependem continuamente de x, segue que também os ξ_j, $j = 1, \cdots, N$, são funções contínuas (note que se um determinante menor for diferente de zero em um ponto, ele é diferente de zero em uma vizinhança desse ponto, de modo que a fórmula que dá a solução em um ponto, dá também a solução para todos os pontos em uma vizinhança desse ponto). $\square$

Proposição 19. *Seja $E' \subseteq X \times \mathbb{C}^M$ tal que $q := \pi_1|_{E'} : E' \to X$ é um fibrado vetorial de posto k. Para cada $x \in X$, seja $V_x := \pi_2((E')_x)$ (daí podemos escrever $E' = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times V_x$) e seja F_x o complemento ortogonal de V_x em $\mathbb{C}^M$. Definindo $F := \bigcup_{x \in X} \{x\} \times F_x$, teremos que $\pi_1|_F : F \to X$ é um fibrado vetorial e $E' \oplus F \simeq X \times \mathbb{C}^M$.*

`Demonstração`: A primeira e mais substancial parte da demonstração consistirá em provar que as projeções ortogonais sobre V_x, definem uma função contínua de X em $\mathcal{B}(\mathbb{C}^M)$.

Fixe $x_0 \in X$, e tome U um aberto contendo x_0 e $\chi : q^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^k$ uma trivialização.

Seja $\{e_1, \cdots, e_k\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^k$. Para cada $j = 1, \cdots, k$, seja $v_j(x) \in \mathbb{C}^M$ tal que $\chi^{-1}(x, e_j) = (x, v_j(x)) \in E'$. Então $\{v_1(x), \cdots, v_k(x)\}$ é uma base de $(E')_x$ para cada $x \in U$. Sejam $v_{k+1}, \cdots, v_M$ tais que

$$\{v_1(x_0), \cdots, v_k(x_0), v_{k+1}, \cdots, v_M\}$$

seja uma base de $\mathbb{C}^M$. Segue da continuidade do determinante que existe $U' \subseteq U$, $x_0 \in U'$, tal que

$$\{v_1(x), \cdots, v_k(x), v_{k+1}, \cdots, v_M\}$$

é uma base de $\mathbb{C}^M$ para todo $x \in U'$. Defina

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \ U' \times \mathbb{C}^M & \longrightarrow & U' \times \mathbb{C}^M \\ (x, \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(x) v_j(x)) & \longmapsto & (x, \alpha_1(x), \cdots, \alpha_M(x)) \end{array}.$$

Então φ é um isomorfismo de fibrados triviais tal que

$$(x, v) \in E' \iff \varphi(x, v) \in \{x\} \times (\mathbb{C}^k \oplus \{0\}).$$

Esta última condição pode ser reformulada dizendo que φ^{-1} restrita a $\{x\} \times (C^k \oplus \{0\})$ tem imagem igual a V_x. Denotaremos então por

$$\psi : U' \times (\mathbb{C}^k \oplus \{0\}) \to \bigcup_{x \in U'} \{x\} \times V_x$$

essa restrição de φ^{-1}.

Para todo $x \in U'$, existe $A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^M)$ injetora tal que $\psi(x, (v, 0)) = (x, A_x(v))$ para todo $v \in \mathbb{C}^k$. Segue da continuidade de ψ que, para todo $v \in \mathbb{C}^k$, a aplicação $U' \ni x \mapsto A_x(v)$ é contínua. Isto implica que $U' \ni x \mapsto A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^M)$ é contínua. Considere agora a família contínua de operadores $A_x^* A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^k)$. Como $\langle A_x^* A_x v, v\rangle = \|A_x v\|^2$ e A_x é injetora, vem que $A_x^* A_x$ é injetora, e portanto inversível, pois $\mathbb{C}^k$ é um espaço de dimensão finita. Segue do Corolário 3 que a família $(\sqrt{A_x^* A_x})^{-1}$ é contínua.

Para cada $x \in U'$, defina $R_x = A_x(\sqrt{A_x^* A_x})^{-1}$. Esta é uma família contínua de operadores em $\mathcal{B}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^M)$. Sendo a composição de A_x com um isomorfismo, a imagem de R_x coincide com a imagem de A_x. Para todo x, segue do cálculo funcional contínuo que

$$R_x^* R_x = (\sqrt{A_x^* A_x})^{-1} (A_x^* A_x) (\sqrt{A_x^* A_x})^{-1})$$

é a identidade em $\mathbb{C}^k$ (pois $(\sqrt{\lambda})^{-1} \lambda (\sqrt{\lambda})^{-1} = 1$ para todo $\lambda \in \sigma(A_x^* A_x)$). Daí

$$(R_x R_x^*)^2 = R_x (R_x^* R_x) R_x^* = R_x R_x^*$$

e portanto $R_x R_x^* =: P_x$ é uma projeção ortogonal com imagem igual á imagem de A_x, que é V_x.

Seja Q_x a projeção ortogonal de $\mathbb{C}^M$ sobre $F_x = (V_x)^\perp$, $x \in X$. Esta é uma família contínua pois $Q_x = I - P_x$, I denotando a identidade de $\mathbb{C}^M$. Considere o morfismo de fibrados

$$\rho : U' \times \mathbb{C}^M \to U' \times \mathbb{C}^M, \quad \rho(x, v) = (x, Q_x(v))$$

A dimensão da imagem de Q_x é $M - k$. É possível então tomar $1 \le j_1 \le \cdots \le j_{M-k} \le M$ tal que

$$\{Q_{x_0}(e_{j_1}), \cdots, Q_{x_0}(e_{j_{M-k}})\}$$

seja linearmente independente (e portanto uma base da imagem de Q_{x_0}, que é igual a F_{x_0}). Pela continuidade dos determinantes menores de uma matriz retangular, existe aberto U'' contendo x_0 e contido em U' tal que, para todo $x \in U''$,

$$\{Q_x(e_{j_1}), \cdots, Q_x(e_{j_{M-k}})\}$$

seja linearmente independente (e portanto uma base da imagem de Q_x, que é igual a F_x). Defina agora

$$\begin{array}{rcl} \xi : \bigcup_{x \in U''} \{x\} \times F_x & \longrightarrow & U'' \times \mathbb{C}^{M-k} \\ (x, \sum_{l=1}^{M-k} \alpha_l(x) Q_x(e_{j_l})) & \longmapsto & (x, \alpha_1(x), \cdots, \alpha_{M-k}(x)) \end{array}$$

As funções $\alpha_l(x)$, $l = 1, \cdots, M-k$ são contínuas, pois são determinadas pela resolução de um sistema linear $M \times (M-k)$ que tem um mesmo determinante menor não-nulo para todo $x \in U''$. Logo ξ é uma trivialização de F. □

6.5. **O funtor K.**

Dado X Hausdorff compacto, $K(X) = \mathcal{G}(\mathtt{Vect}(X))$. Dado um fibrado vetorial E sobre X, denotamos $[E]_0 \coloneqq \gamma([E])$.

Segue dos resultados da Subseção 6.4:

$$K(X) \;=\; \{[E]_0 - [X \times \mathbb{C}^N]_0;\; E \text{ fibrado vetorial complexo sobre } X,\; N \in \mathbb{N}\}.$$

7. Aula de 11 de novembro (Notas de Gustavo Mezzovilla)

Proposição (3.27 da tese do Rodrigo). $T \in C(X, \mathcal{F}(H_1, H_2))$, existe um subespaço $W \subset H_2$ tal que

$$\operatorname{Im} T_x + W = H_2 \qquad (\forall\, x \in X)$$

Demonstração. Fixe $x \in X$. Como T_x é Fredholm, $\operatorname{Im} T_x$ é fechado e faz sentido

$$W_x := (\operatorname{Im} T_x)^{\perp}.$$

Defina:

$$\begin{array}{rccc} T_y^x : & H_1 \oplus W_x & \longrightarrow & H_2 \\ & (v, w) & \longmapsto & T_y(v) + w \end{array}$$

- Af.1 $y \longmapsto T_y^x$ é contínua. De fato,

$$\begin{aligned} \|(T_y^x - T_{y'}^x)(v,w)\| &= \|(T_y - T_{y'})(v)\| \\ &\leqslant \|T_y - T_{y'}\| \cdot \|v\| \\ &\leqslant \|T_y - T_{y'}\| \, \|(v,w)\| \end{aligned}$$

  Logo $\left\|T_y^x - T_{y'}^x\right\| \leqslant \|T_y - T_{y'}\|$ e T_y^x é contínua.

- Af.2: T_x^x é sobrejetora. Dado $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \operatorname{Im} T_x \oplus W_x$, existe v tal que

$$\xi = T_x(v) + \xi_2 \in \operatorname{Im} T_x^x : T_x^x(v, \xi_2) = \xi.$$

Lema. $\{T \in B(H_1, H_2) \mid \operatorname{Im} T = H_2\}$ é um aberto em $B(H_1, H_2)$.

Dem. Tome T_0 sobrejetor, $M = \ker T_0$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \Sigma: & B(H_1,H_2) & \longrightarrow & B(\ker T_0, H_2) \\ & S & \longmapsto & S \restriction_{\ker T_0} \end{array}.$$

É claro que Σ é limitada.$\cdots$ $\square$

Pelo lema, para cada x existe um aberto U_x tal que: $y \in U_x \Rightarrow T_y^x$ é sobrejetora. Formou-se uma cobertura por abertos de X e por compacidade, extraia uma subcobertura finita $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Construído

$$W := W_{x_1} + \cdots + W_{x_n}$$

Note que dado $y \in X$, existe um i tal que $y \in U_{x_i}$ e portanto, $T_y^{x_i}$ é sobrejetora. Dessarte, $\operatorname{Im} T_y + W_{x_i} = H_2$. $\square$

Dado T, pela proposição existe um subespaço W de dimensão finita tal que $\operatorname{Im} T_x + W = H_2$ para qualquer $x \in X$. Defina então

$$\begin{array}{rccc} T_x^W: & H_1 \oplus W & \longrightarrow & H_2 \\ & (u,w) & \longmapsto & T_x u + W \end{array}.$$

- Af.3 $\left(x \to T_x^W\right)$ é contínua.
- Af.4 T_x^W é sobrejetora, $\forall x \in X$, pelo enunciado de Proposição.
- Af.5 T_x^W é Fredholm. Pela afirmação 4 basta provar que $\ker T_x^W$ é de dimensão finita. Tome $(v,w) \in \ker T_x^W$, i.e., $w = -T_x v$. Decomponha $v = v_1 + v_2 \in \ker T_x \oplus (\ker T_x)^\perp$. Logo $T_x v = T_x v_2$ e portanto,

$$v_2 \in \left(T_x \restriction_{(\ker T_x)^\perp}\right)^{-1}(W).$$

 Mas $T_x \restriction_{(\ker T_x)^\perp}$ é injetor, portanto a pré-imagem por W também possui dimensão finita. Como T_x é Fredholm, segue que $T_x^{-1}(W)$

$$T_x^{-1}(W) \subset \ker T_x \oplus \left(T_x \restriction_{(\ker T_x)^\perp}\right)^{-1}(W)$$

 Logo,

$$(v,w) \in \underbrace{T_x^{-1}(W)}_{\dim<\infty} \oplus \underbrace{(T_x(H_1) \cap W)}_{\dim<\infty}$$

Conclusão: Dada $T \in C(X, \mathcal{F}(H_1, H_2))$, existe um subespaço $W \subset H_2$ de dimensão finita tal que

$$\begin{array}{rccc} T^W: & X & \longrightarrow & \mathcal{F}(H_1 \oplus W, H_2) \\ & x & \longmapsto & (u \longmapsto T_x u + W) \end{array}$$

é uma família de operadores de Fredholm sobrejetores. Pelo corolário inicial, a dimensão dos núcleos de $(T_x^W)_{x\in X}$ é constante e portanto,

$$\operatorname{Ker} T^W := \bigcup_{x\in X} \{x\} \times \ker T_x^W$$

é um fibrado vetorial sobre X.

Gostaríamos de definir

$$\operatorname{ind}_X T := \left[\operatorname{Ker} T^W\right]_0 - [X \times W]_0$$

Exemplo: Se $X = \{*\}$, $W = (\operatorname{Im} T)^\perp$. Daí $T_* = T : H_1 \longrightarrow H_2$ de Fredholm.

$$\begin{array}{rccc} T^{(\operatorname{Im} T)^\perp} : & \{*\} & \longrightarrow & \mathcal{F}(H_1 \oplus W, H_2) \\ & * & \longmapsto & \left(u \longmapsto Tu + (\operatorname{Im} T)^\perp\right) \end{array}$$

é tal que $\operatorname{Ker} T^{(\operatorname{Im} T)^\perp} \cong \ker T$. $\cdots$

8. Índice de uma família contínua de operadores de Fredholm I

Sejam X espaço Hausdorff compacto, sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert de dimensão infinita.

Proposição 20. *Seja $T \in C(X, \mathcal{F}(H_1, H_2))$ uma função contínua tomando valores em operadores de Fredholm. Se $x \mapsto \dim\ker T_x$ for localmente constante, então*

$$\ker T \ := \ \bigcup_{x\in X} \{x\} \times \ker T_x \ \subset \ X \times H_1,$$

munido da topologia relativa de $X \times H_1$ e da projeção $p(x, v) = x$ é um fibrado vetorial sobre X.

Proposição 21. *Dada $T \in C(X, \mathcal{F}(H_1, H_2))$, existe subespaço $W \subset H_2$ de dimensão finita tal que $Im\, T_x + W = H_2$ para todo $x \in X$. Definindo $T_x^W : H_1 \oplus W \longrightarrow H_2$ por $T_x^W(v, w) = T_x(v) + w$, segue que T_x^W é um operador de Fredholm sobrejetor para todo $x \in X$ e a função $x \mapsto T_x^W$ é contínua, $T^W \in C(X, \mathcal{F}(H_1 \oplus W, H_2))$.*

Corolário 4. *$\ker T^W$ é um fibrado vetorial sobre X.*

Proposição 22. *Se W e W' são subespaços de dimensão finita de H_2 tais que $Im\, T_x + W = Im\, T_x + W' = H_2$ para todo $x \in X$, então os fibrados $\ker T^W \oplus W'$ e $\ker T^{W'} \oplus W$ são isomorfos.*

Com estes prepararativos podemos definir o índice de uma família contínua de operadores de Fredholm.

Definição 2. *Dada $T \in C(X, \mathcal{F}(H_1, H_2))$, tome $W \subset H_2$ tal que $Im\, T_x + W = H_2$ para todo $x \in X$ e defina $T^W \in C(X, \mathcal{F}(H_1 \oplus W, H_2)$ por $T^W(v, w) = T_x(v) + w$, $x \in X$, $(v, w) \in H_1 \oplus W$. Daí*

$$ind\, T \ := \ [\ker T^W]_0 - [X \times W]_0 \in K(X).$$

`Problema`. Seja $T \in C(X, \mathcal{F}(H_1, H_2))$ tal que $x \mapsto \dim \ker T_x$ seja localmente constante.
Mostre que $\operatorname{ind} T = [\ker T]_0 - [\ker T^*]_0$.

`Exercício`. Seja H um espaço de Hilbert. Considerando o isomorfismo canônico $B(H \oplus H) \simeq M_2(B(H))$ como uma identificação, mostre que:
(a) Um operador $T = (\!(T_{ij})\!)_{1\leq i,j\leq 2} \in B(H \oplus H)$ é compacto se e somente se $T_{i,j} \in K(H)$ para todo (i, j).
(b) O quociente $B(H \oplus H)/K(H \oplus H)$ pode ser canonicamente identificado com $M_2(B(H)/K(H))$. A projeção canônica $q_2 : B(H \oplus H) \longrightarrow B(H \oplus H)/K(H \oplus H)$ satisfaz $q_2((\!(T_{ij})\!)_{i,j}) = (\!((q(T_{i,j}))\!)_{i,j}$, com q denotando a projeção canônica $q : B(H) \longrightarrow B(H)/K(H)$.
(c) Um dado $T \in B(H \oplus H)$ é um operador de Fredholm se e somente se $q_2(T)$ é inversível em $M_2(B(H)/K(H))$.
(d) Dados $S, T \in B(H)$ operadores de Fredholm e $A, B \in M_2(H)$ operadores inversíveis, então $(S \oplus I)\, A\, (T \oplus I)\, B$ é um operador de Fredholm em $H \oplus H$.

9. Índice de uma família contínua de operadores de Fredholm II

Sejam X um espaço Hausdorff compacto, H_1 e H_2 espaços de Hilbert de dimensão infinita.

Proposição 23. *Dado $T \in \mathcal{F}(H_1, H_2)$, seja $V \subseteq H_1$ um subespaço fechado de codimensão finita tal que $V \cap \ker T = \{0\}$. Então $T(V)$ é fechado e tem codimensão finita. Ademais existe aberto $U \subset \mathcal{F}(H_1, H_2)$, $T \in U$, tal que, para todo $S \in U$, temos*

(1) $V \cap \ker S = \{0\}$,
(2) $T(V)^\perp \ni y \longmapsto y + S(V) \in H_2/S(V)$ *é uma bijeção linear contínua.*

`Demonstração`: A inclusão $i : V \to H_1$ é um operador de Fredholm, pois V tem codimensão finita. Logo $T \circ i : V \to H_2$ é de Fredholm, logo $T(V)$ é fechado e tem codimensão finita.

Denote $W = T(V)^\perp$, considere a soma direta de espaços de Hilbert $V \oplus W$ e defina $\phi : B(H_1, H_2) \to B(V \oplus W, H_2)$, $S \mapsto \phi_S$, por $\phi_S(v, w) = Sv + w$. Segue da estimativa $\|\phi_S(v, w)\| \leq (\|S\| + 1)\|(v, w)\|$ que ϕ_S é de fato limitado, $\|\phi_S\| \leq \|S\| + 1$. Segue de

$$\|(\phi_S - \phi_{S'})(v, w)\| \;=\; \|(S - S')v\| \;\leq\; \|S - S'\|\|v\| \;\leq\; \|(v, w)\|$$

que a aplicação não-linear ϕ é contínua.

O operador $T' := \phi_T$ é sobrejetor, pois $\operatorname{Im} T' = \operatorname{Im} T + (\operatorname{Im} T)^\perp = H_2$. Além disso, se $T(v, w) = Tv + w = 0$, $w \in \operatorname{Im} T \cap (\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\}$ e $v \in \ker T \cap V$, espaço que também é nulo, por hipótese. Logo T' é inversível. Como ϕ é contínua e o conjunto dos inversíveis em $B(V \oplus W, H_2)$ é aberto, segue que existe aberto $U \subset B(H_1, H_2)$ tal que $T \in U$ e ϕ_S é inversível para todo $S \in U$. Como $\mathcal{F}(H_1, H_2)$ é aberto em $B(H_1, H_2)$ e T é um operador de Fredholm por hipótese, podemos supor que $U \subset \mathcal{F}(H_1, H_2)$. Para todo $S \in U$, temos $(\ker S \cap V) \times \{0\} \subset \ker \phi_S = \{(0, 0)\}$, logo $\ker S \cap V = \{0\}$.

Para provar a afirmação (2) do enunciado da Proposição, basta observar que a aplicação $T(V)^\perp \ni y \longmapsto y + S(V) \in H_2/S(V)$ pode ser escrita como a composição de dois isomorfismos lineares:

$$\begin{array}{ccccccc} W & \longrightarrow & \frac{V\oplus W}{V\oplus\{0\}} & \longrightarrow & \frac{\phi_S(V\oplus W)}{\phi_S(V\oplus\{0\})} & = & \frac{H_2}{S(V)} \\ w & \longmapsto & [(0,w)] & & & & \\ & & [(v,w)] & \longmapsto & [\phi_S(v,w)] & & \end{array}$$

(aqui denotamos por $[x]$ a classe de $x \in V \oplus W$ nos dois quocientes que aparecem neste diagrama). □

Proposição 24. *Dado $T \in \mathcal{F}(H_1, H_2)$, seja $V \subseteq H_1$ um subespaço fechado de codimensão finita tal que $V \cap \ker T = \{0\}$, seja $U \subset \mathcal{F}(H_1, H_2)$ aberto contendo T tal que as condições (1) e (2) do enunciado da Proposição 23 sejam satisfeitas para todo $S \in U$. Em $U \times H_2$ defina a relação de equivalência: $(S_1, y_1) \sim (S_2, y_2)$ se e somente se $S_1 = S_2$ e $y_2 - y_1 \in S_1(V)$. Considere*

$$F := (U \times H_2)/_\sim = \bigcup_{S\in U} \{S\} \times \frac{H_2}{S(V)}$$

munido da topologia do quociente. Então F é um fibrado vetorial sobre U com projeção $p : F \to U$ dada por $p(S, y + S(V)) = S$.

`Demonstração`: Seja $q : U\times H_2 \longmapsto (U\times H_2)/_\sim$ a projeção canônica. A composição $p\circ q$ é projeção do produto cartesiano $U \times H_2$ na primeira coordenada, logo é contínua. Decorre da definição da topologia quociente então que p é contínua. É claro também que, para cada $S \in U$, a fibra $p^{-1}(S) = \{S\} \times \frac{H_2}{S(V)}$ pode ser canonicamente munida de uma estrutura de espaço vetorial. Basta portanto provar a trivialidade local.

Considere $f : U \to B(H_2, V)$ definida por $f(S) = (S \circ i)^*$, com i denotando, como antes, a inclusão de V em H_1, que é um operador de Fredholm. Logo $f(S)$ é um operador de Fredholm para todo $S \in U$. Segue de $\|f(S) - f(S')\| = \|(S - S') \circ i\| \le \|S - S'\|$ que f é contínua, $f \in C(U, \mathcal{F}(H_2, V))$. Para cada $S \in U$, $\ker f(S) = S(V)^\perp \simeq H_2/S(V)$. Segue da Propriedade (2) da Proposição 23 que $\ker f(S) \simeq T(V)^\perp$ para todo $S \in U$, logo $\dim\ker f(S)$ é constante, logo, pela Proposição 20 (que vale também sem supor que X seja compacto),

$$E := \bigcup_{S\in U} \{S\} \times \ker f(S) = \bigcup_{S\in U} \{S\} \times S(V)^\perp \subset U \times H_2$$

é um fibrado vetorial, com projeção $\tilde{p} : E \to U$, $\tilde{p}(S, y) = S$.

A aplicação

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & E & \longrightarrow & F \\ & (S,y) & \longmapsto & (S, y + S(V)) \end{array}$$

é uma bijeção, com inversa

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & F & \longrightarrow & E \\ & (S, y + S(V)) & \longmapsto & (S, P_S\, y), \end{array}$$

com $P_S \in B(H_2)$ denotando a projeção ortogonal sobre $S(V)^\perp$. Percebe-se que $\tilde{p} = p \circ \varphi$ e que, restrita a cada fibra, φ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Se provarmos que φ e ψ são contínuas, a trivialidade local de $p : F \to U$ será consequência da triviliade local de $\tilde{p} : E \to U$, que já sabemos ser verdadeira. De fato, se χ for uma trivialização de E, $\chi \circ \varphi$ será uma trivialização de F.

Que φ é contínua decorre imediatamente da continuidade de q. Provar a continuidade de ψ é equivalente a provar a continuidade da aplicação $\pi : U \times H_2 \to U \times H_2$, $\pi(S,y) = (S, P_S\, y)$. Esta afirmação pode ser demonstrada usando a continuadade da raiz quadrada de operadores positivos, tal como fizemos na demonstração da Proposição 19. (...) $\square$

Proposição 25. *Dada $T \in C(X, \mathcal{F}(H_1,H_2))$, existe um subespaço fechado de codimensão finita $V \subseteq H_1$ tal que $V \cap \ker T_x = \{0\}$ para todo $x \in X$.*

Teorema 6. *Dada $T \in C(X, \mathcal{F}(H_1,H_2))$, seja $V \subset H_1$ um subespaço fechado de codimensão finita tal que $V \cap \ker T_x = \{0\}$ para todo $x \in X$. Defina em $X \times H_2$ a relação de equivalência: $(x,u) \sim (y,v)$ se e somente $x = y$ e $u - v \in T_x(V)$. Munido da topologia do quociente,*

$$\frac{H_2}{T(V)} \;\coloneqq\; (X \times H_2)/\!\sim \;=\; \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \frac{H_2}{T_x(V)}$$

é um fibrado vetorial sobre X com a projeção canônica $p(x, v + T_x(V)) = x$.

`Demonstração`: Vamos provar (e isto basta) que, para todo $x \in X$, existe aberto U_x contendo x tal que

$$p|_{p^{-1}(U_x)} : p^{-1}(U_x) \to U_x$$

é um fibrado vetorial.

Dado $x \in X$, aplique ao par (T_x, V) as Proposições 23 e 24 para obter $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}(H_1,H_2)$ e fibrado vetorial

$$p_x : F_x = \bigcup_{S \in \mathcal{U}_x} \{S\} \times \frac{H_2}{S(V)} \;\longrightarrow\; \mathcal{U}_x.$$

O conjunto $U_x \coloneqq \{y \in X;\, T_y \in \mathcal{U}_x\}$ é aberto porque é a imagem inversa do aberto $\mathcal{U}_x$ pela aplicação contínua $T : X \to \mathcal{F}(H_1,H_2)$. Podemos considerar portanto o pullback T^*F_x, fibrado vetorial sobre U_x. A bijeção evidente

$$T^*F_x = \bigcup_{y \in U_x} \{y\} \times \left(\{T_y\} \times \frac{H_2}{T_x(V)} \right) \;\longrightarrow\; \bigcup_{y \in U_x} \{y\} \times \frac{H_2}{T_x(V)} = p^{-1}(U_x)$$

preserva fibras e é um isomorfismo linear em cada fibra. Para provar que $p^{-1}(U_x)$ é um fibrado vetorial, basta portanto mostrar que esta bijeção é um homeomorfismo. Para isso, é preciso atentar para o fato de que a topologia de T^*F_x é a topologia do produto de U_x por um espaço quociente (definido no enunciado da Proposição 24) e que a topologia de $p^{-1}(U_x)$ também é a de um espaço quociente, definido no enunciado desta Proposição. A aplicação que desejamos demonstrar que é um homeomorfismo pode ser colocada no lado superior horizontal de um diagrama comutativo quadrangular, sendo as flexas verticais as projeções canônicas nos quocientes (uma delas na verdade é o produto da identidade por uma dessas projeções) e a flecha horizontal inferior é a aplicação

$$\begin{aligned} U_x \times T(U_x) \times H_2 &\;\longrightarrow\; U_x \times H_2 \\ (y, T_y, v) &\;\longmapsto\; (y, v), \end{aligned}$$

que é contínua e tem inversa contínua (o conjunto do lado esquerdo sendo munido da topologia relativa de $U_x \times \mathcal{U}_x \times H_2$). $\square$

10. Aula de 2 de dezembro. Notas de Gustavo Mezzovilla

Nosso objetivo é provar que o Índice de Famílias de Atiyah definido anteriormente não depende da escolha de V. Seja

$$H_2/T(V) \coloneqq \bigcup_{x\in X} \{x\} \times H_2/T_x(V) \tag{14}$$

para um subespaço $V \subset H_1$ fechado com $\text{codim}(V) < \infty$. Vimos:

Teorema 7. *Seja $T : X \longmapsto \mathcal{F}(H_1, H_2)$ uma família contínua de operadores de Fredholm, com X compacto Hausdorff.*

1. *Existe $V_0 \subset H_1$ subespaço fechado de codimensão finita tal que $V_0 \cap \ker T_x = \{0\}$ para qualquer $x \in X$.*
2. *Em $X \times H_2$, $(x, u) \sim (y, v) \Leftrightarrow x = y$ e $u - v \in H_2$ é uma relação de equivalência.*
3. *$H_2/T\,(V_0)$ é um fibrado vetorial sobre X, munido da projeção $(x, v + T_x(V_0)) \longmapsto x$.*
4. *O índice de Atiyah $\text{ind}_{_A}(T) \coloneqq [X \times H_1/V_0]_0 - [H_2/T\,(V_0)]_0 \in K(X)$.*

Essa definição de índice é relativamente complexa, dada a construção específica de V_0. Vejamos que qualquer subespaço de H_1 de codimensão finita que satisfaz a propriedade 1 (7) também satisfaz as propriedades 3 e 4.

Proposição 26. *$H_2/T(V)$ é uma fibrado vetorial sobre X.*

Demonstração. Fé nas notas perdidas. □

Teorema 8. *O índice de Atiyah não depende da escolha de V, i.e., Se V e V' são subespaços de codimensão finita com $V \cap \ker T_x = \{0\} = V' \cap \ker T_x$ para todo $x \in X$, então:*

$$[X \times H_1/V_0]_0 - [H_2/T\,(V_0)]_0 = [X \times H_1/V]_0 - [H_2/T\,(V)]_0 \tag{15}$$

Considere uma sequência exata de módulos M_1, M_2 e M_3,

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0 \tag{16}$$

Invocação Algébrica. Se existe $p : M_2 \longrightarrow M_1$ tal que $p \circ f = Id_{_{M_1}}$ (i.e., a sequência cinde a esquerda), então existe $s : M_3 \longrightarrow M_2$ tal que $g \circ s = Id_{_{M_3}}$ (cinde a direita).

Definição 3 (Sequência Exata de Fibrados)**.** *$(\cdots)$*

`Exercício`:

Sejam E_1, E_2 e E_3 fibrados sobre X que constituem uma sequência exata de fibrados vetoriais:

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{i} E_2 \xrightarrow{j} E_3 \longrightarrow 0 \tag{17}$$

Prove que se ela cinde a esquerda, ela cinde a direita.

Demonstração de 8. Vimos na aula anterior que podemos simplificar o argumento e supor que $V' \subset V$. Note que

$$\begin{array}{ccc} H_1/V' & \longrightarrow & H_1/V \\ v+V' & \longmapsto & v+V \end{array} \tag{18}$$

é sobrejetora e portanto, $H_1/V = \frac{H_1/V'}{V/V'}$. Daí,

$$(X \times H_1/V) \oplus (X \times V/V') \cong X \times H_1/V' \tag{19}$$

Além disso, todos os fibrados acima são fibrados triviais (pois V e V' possuem codimensão finita). Seja $\varphi : X \times V/V' \longmapsto H_2/T(V')$ com lei de formação dada por $\varphi(x, v+V') = (x, T_x v + T_x(V'))$. Vejamos que φ é um morfismo de fibrados que faz o seguinte diagrama comutar.

Não consegui compilar.

Note que se $v_1, v_2 \in V$ são tais que $v_1 - v_2 \in V'$, então $T_x v_1 - T_x v_2 \in T_x(V')$ para qualquer x. Reciprocamente, suponha que $T_x(v) \in T_x(V')$ para algum $v \in V$.

$$T_x(v) \in T_x(V') \Longrightarrow \exists\, v' \in V' : v - v' \in \ker T_x$$

Como $v' \in V' \subset V$, temos que $v - v' \in \ker T_x \cap V = \{0\}$, logo, $v = v'$. Portanto, φ está bem definida e é um morfismo de fibrados.

Seja $T(V)/T(V') := \Im\varphi$ o subfibrado gerado. Considere

$$0 \longrightarrow \frac{T(V)}{T(V')} \xrightarrow{i} \frac{H_2}{T(V')} \xrightarrow{j} \frac{H_2}{T(V)} \longrightarrow 0 \tag{20}$$

É uma sequência exata e vejamos que ela cinde a esquerda. Como V possui codimensão finita e T_x é Fredholm para qualquer $x \in X$, $T_x(V)$ é um subespaço fechado e portanto, seja P_x a projeção ortogonal em $T_x(V)$.

Lema 1. *$P_{(\,\cdot\,)} : X \longleftrightarrow B(H_2)$ é contínua.*

Demonstração. Segue da continuidade da raiz quadrada de operadores positivos ($\cong$ proposição 19). $\square$

Defina

$$\begin{array}{cccc} p & H_2/T(V') & \longrightarrow & T(V)/T(V') \\ & (x,v) & \longmapsto & (x, P_x(v)) \end{array} \tag{21}$$

Como $T(V)/T(V') = \{(x, T_x v + T_x(V)) \mid (x,v) \in X \times V/V'\}$, vejamos que p está bem definida. Se $v_1, v_2 \in H_2$, temos que

$$v_1 - v_2 \in T_x(V') \overset{T_x(V') \subseteq T_X(V)}{\Rightarrow} P_x v_1 - P_x v_2 \in T_x(V'). \tag{22}$$

Logo, $p = (Id, P_{(\,.\,)})$ está bem definida e é uma inversa esquerda de i. De fato,

$$(p \circ i)(T_x v + T_x(V')) = P_x(T_x v) + T_x(V') = T_x v + T_x(V'). \tag{23}$$

Pelo exercício ?, a sequência exata (20) cinde a esquerda e portanto a direita também. Então:

$$\frac{H}{T(V')} \cong \frac{T(V)}{T(V')} \oplus \frac{H_2}{T(V)}. \tag{24}$$

Passando para a classe, temos:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{H_2}{T\,(V')}\right]_0 = \left[\dfrac{T(V)}{T\,(V')}\right]_0 + \left[\dfrac{H_2}{T(V)}\right]_0 \\ \left[X \times \dfrac{H_1}{V'}\right]_0 = \left[X \times \dfrac{H_1}{V}\right]_0 + \left[X \times \dfrac{V}{V'}\right]_0 \end{cases} \tag{25}$$

Subtraindo, segue o resultado. $\square$

Referências

[1] M. F. Atiyah (notes by D. W. Anderso). K-Theory. W. A, Benjamin, Inc., 1967.

[2] D. D. Bleecker & B. Booß-Bavnbek. Index Theory with Applications to Mathematics and Physics. International Press, 2013.

[3] J. Breen. Fredholm Operators and the Family Index. Senior Thesis, Northwestern University, 2016.

[4] R. L. Dias. Continuous deformations of Fredholm operators in B(H). Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2021.

[5] R. G. Douglas. Banach Algebra Techniques in Operator Theory. Academic Press, 1972.

[6] N. H. Kuiper. *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space.* Topolgy **3** (1965), 19-30.

[7] S. T. Melo. Notas de Análise Funcional, 2004. (https://www.ime.usp.br/∼toscano/disc/af.pdf)

[8] S. T. Melo. Notas de Análise Funcional, 2020. (https://www.ime.usp.br/∼toscano/disc/2020/TopAnaFun.pdf)

[9] A. Mukherjee. Atiyah-Singer Index Thoerem - An Introduction. Hindustan Book Agency, 2013.

[10] G. J. Murphy. C*-algebras and Operator Theory.