NOTAS DE AULA

MAT 0230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO 1
2° SEMESTRE DE 2021
SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

1. O Plano de Descartes

Esta seção é baseada em [1, Section 2.1] e [2, Chapter 2].

Diremos, por definição, que um subconjunto r de $\mathbb{R}^2$ é uma *reta* se existem reais a, b e c, $(a,b) \neq (0,0)$ tais que

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, ax + by = c\}.$$

Proposição 1. *Dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, existe uma única reta r que contém (x_1, y_1) e (x_2, y_2).*

`Demonstração`: Vamos dividir nosso argumento em três casos.

Caso 1. Suponha que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Considere o conjunto r de todos os (x, y) tais que

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

O conjunto r é uma reta pois a equação que o define pode ser reescrita na forma $ax + by = c$, com $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $b = -1$ e $c = -\frac{x_1 y_1}{x_2 - x_1} - y_1$. É muito simples mostrar que os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencem a r, pois satisfazem a esquação que a define,

$$y_1 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x_1 - x_1) \quad \text{ e } \quad y_2 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x_2 - x_1).$$

Isto prova que existe uma reta contendo (x_1, x_2) e (y_1, y_2). Para provar que r é a única reta que tem essa propriedade, suponha que uma reta r' de equação $ax+by = c$ contenha os dois pontos dados. Daí são satisfeitas as equações

$$ax_1 + by_1 = c \quad \text{e} \quad ax_2 + by_2 = c,$$

logo (subtraindo as duas equações),

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0,$$

logo (usando que $x_2 - x_1 \neq 0$),

$$a = -b\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Como $(a, b) \neq (0, 0)$ e $y_2 - y_1 \neq 0$, segue desta última equação que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Substituindo a relação que obtivemos na equação $ax + by = c$, vem:

$$ax + by = c \iff -b\,\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x + by = c \iff y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{c}{b}. \tag{1}$$

Substituindo x_1 e y_1 nesta última equação, obtemos

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x_1 + \frac{c}{b},\ \text{logo}\ \frac{c}{b} = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x_1.$$

Substituindo esta última equação na terceira das equações em (1), vem

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + y_1$$

Provamos que (x, y) satisfaz a equação que define r' se e somente se (x, y) satisfaz a equação que define r. Ou seja, $r = r'$. Isto prova o enunciado da Proposição no caso em que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$.

Caso 2. Suponha que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$. Daí a reta de equação $y = y_1$ é satisfeita pelos dois pontos dados (x_1, y_1) e (x_2, y_1).

Reciprocamente, suponha que a reta r' de equação $ax+by = c$ contém (x_1, y_1) e (x_2, y_1). Então são satisfeitas as equações $ax_1 + by_1 = c$ e $ax_2 + by_1 = c$. Daí $a(x_2 - x_1) = 0$. Como $x_2 \neq x_1$, segue que $a = 0$ e a equação de r' se torna $by = c$, ou $y = \frac{c}{b}$. Como o ponto (x_1, y_1) pertence a r', segue que $\frac{c}{b} = y_1$ e chegamos à equação que define r. Ou seja, $r = r'$, o que demonstra a proposição neste caso.

Caso 3. Suponha que $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Então a única reta que contém os dois pontos dados é a reta de equação $x = x_1$. Isto se demonstra de maneira análoga à demonstração do Caso 2.

A hipótese $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ implica que um dos três casos já considerados é satisfeito. Ou seja, a proposição está demonstrada. □

Proposição 2. *Toda reta possui pelo menos dois pontos.*

`Demonstração`: Seja r a reta de equação $ax + by = c$. Queremos provar que r possui pelo menos dois pontos. Separemos a demonstração em casos.

Caso 1. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{c}{b})$ e $(\frac{c}{a}, 0)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então $(\frac{c}{a}, 0)$ e $(\frac{c}{a}, 1)$ são dois pontos distintos de r.

Caso 3. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $(0, \frac{b}{a})$ e $(1, \frac{b}{a})$ são dois pontos distintos de r. □

2. Postulados de Incidência

Considere uma tripla $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$, em que S é um conjunto, e $\mathcal{L}$ e $\mathcal{P}$ são conjuntos cujos elementos são subconjuntos de S. O conjunto S é chamado de espaço e seus elementos são chamados de pontos. Os elementos de $\mathcal{L}$ são chamados de retas; assim $\mathcal{L}$ é o conjunto das retas de S. Os elementos de $\mathcal{P}$ são chamados de planos; assim

$\mathcal{P}$ é o conjunto dos planos de S. Diremos que $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ é uma *geometria de incidência* se os seguintes postulados forem satisfeitos.

(I.1): Dados dois pontos P e Q, existe uma única reta r tal que $P, Q \in r$. Denota-se $r = \overleftrightarrow{PQ}$.
(I.2): Dados três pontos não-colineares P, Q e R, existe um único plano Π tal que $P, Q, R \in \Pi$.
(I.3): Se dois pontos pertencem a um plano Π, a reta r que os contém está contida em Π.
(I.4): Se dois planos se interceptam, sua interseção é uma reta.
(I.5): Toda reta contém pelo menos dois pontos. Todo plano possui pelo menos três pontos não colineares. O espaço S possui pelo menos quatro pontos não coplanares.

Diremos, por definição, que um subconjunto Π de $\mathbb{R}^3$ é um *plano* se existem reais a, b, c e d, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tais que

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ ax + by + cz = d\}.$$

Diremos, por definição, que um subconjunto r de $\mathbb{R}^3$ é uma *reta* se r é a interseção não vazia de dois planos. Fazendo $S = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{L} = \{r;\ r \text{ é uma reta}\}$ e $\mathcal{P} = \{\Pi;\ \Pi \text{ é um plano}\}$, é possível demonstrar que a tripla $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ satisfaz os axiomas (I.1) $\cdots$ (I.5) acima e é portanto uma geometria de incidência.

Se tomarmos para S o conjunto $\mathbb{R}^2$, para $\mathcal{L}$ o conjunto das retas de $\mathbb{R}^2$, tais como definimos na seção anterior, e se dissermos que o único plano de $\mathbb{R}^2$ é o $\mathbb{R}^2$ inteiro, $\mathcal{P} = \{\mathbb{R}^2\}$, será que a tripla $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ também é uma geometria de incidência? Bom, esta tripla satisfaz o axioma (I.1) pela Proposição 1, os axiomas (I.2) e (I.3) decorrem do fato de que o único plano em $\mathcal{P}$ é o próprio S. A afirmação em (I.4) é vaziamente verdadeira pois não existem dois planos distintos em $\mathcal{P}$. Quanto a (I.5), a Proposição 2 garante que toda reta possui pelo menos dois pontos. É verdade também que no único plano desta "geometria" existem três pontos não colineares, por exemplo os pontos $P = (0, 1)$, $Q = (0, 0)$ e $R = (1, 0)$ (pois R não satisfaz $x = 0$, que é a equação da reta que contém P e Q). Ou seja, as duas primeiras afirmações de (I.5) são satisfeitas. Entretanto, a última afirmação de (I.5) não é satisfeita, pois quaisquer quatro pontos de $\mathbb{R}^2$, que é o único plano da nossa geometria, são coplanares. Não podemos, portanto, chamar o plano cartesiano de uma geometria de incidência, se adotarmos como definição de geometria de incidêcia a definição do Moise. O plano cartesiano serve como um *modelo* de algo que poderíamos chamar de "geometria de incidência plana".

3. Postulados da Distância e Consequências

Na *geometria métrica* acrescenta-se a uma geometria de incidência $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ uma função $d : S \times S \to \mathbb{R}$, chamada de *distância*, satisfazendo os seguintes postulados.

(D.1): Para todos pontos P, Q, $d(P, Q) \geq 0$.
(D.2): $d(P, Q) = 0$ se, e somente se, $P = Q$
(D.3): Para todos pontos P, Q, $d(P, Q) = d(Q, P)$
(D.4): Toda reta r possui um *sistema de coordenadas*, isto é, existe uma bijeção $f : r \to \mathbb{R}$ tal que, para todos $P, Q \in r$, $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$.

Decorre dos postulados a seguinte afirmação, conhecida como o *teorema da colocação da régua*: Dados P e Q pontos distintos de uma reta r, existe um único sistema de coordenadas $f : r \to \mathbb{R}$ para o qual $f(P) = 0$ e $f(Q) > 0$. Nesse caso, então, $f(Q) = d(P, Q)$.

Denotaremos $d(P, Q)$ por PQ.

Definição 1. *Dados três pontos colineares A, B e C, diremos que B está entre A e C, o que denotaremos por $A - B - C$, se $AB + BC = AC$.*

Definição 2. *Dados três números reais x, y e z, diremos que y está entre x e z, o que denotaremos por $x-y-z$, se $x < y < z$ ou $z < y < x$.*

Teorema 1. *Sejam r uma reta e $f : r \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas. Dados três pontos A, B e C em r, com coordenadas $x = f(A)$, $y = f(B)$ e $z = f(C)$, temos*

$$A - B - C \iff x - y - z.$$

Definição 3. *Dados quatro pontos colineares A, B, C e D, escreveremos $A - B - C - D$ se $A - B - C$, $A - B - D$, $A - C - D$ e $B - C - D$*

Seguem das definições e postulados listados até aqui e das propriedades dos números reais as seguintes propriedades da noção de estar entre.

- **(B.1):** Se $A - B - C$, então $C - B - A$.
- **(B.2):** Dados três pontos colineares, um, e apenas um, deles está entre os outros dois.
- **(B.3):** Dados quatro pontos de uma reta, seus nomes podem ser escolhidos como A, B, C e D de modo que $A - B - C - D$.
- **(B.4):** Dados dois pontos A e B, existem C e D tais que $A - C - B$ e $A - B - D$.

Definição 4. *Dados dois pontos A e B, o segmento de reta de extremos A e B, denotado por $\overline{AB}$, é o conjunto de pontos*

$$\overline{AB} \ = \ \{A, B\} \cup \{C \in \overleftrightarrow{AB};\ A - C - B\}.$$

Definição 5. *Diremos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, o que denotaremos por $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$, se $AB = CD$.*

Definição 6. *Dados dois pontos A e B, a semirreta com origem em A e passando por B, denotada por $\overrightarrow{AB}$, é o conjunto de pontos*

$$\overrightarrow{AB} \ = \ \overline{AB} \cup \{C \in \overleftrightarrow{AB};\ A - B - C\}.$$

Definição 7. *Dados três pontos não-colineares A, B e C, o ângulo $\angle BAC$ é a união das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.*

Definição 8. *Dados três pontos não-colineares A, B e C, o triângulo de vértices A, B e C, denotado por ΔABC é a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.*

4. Postulado da Separação do Plano

(**SP.1**) Dados uma reta r e um plano Π que a contém, o complementar de r em Π é igual à união disjunta de dois subconjuntos H_1 e H_2 satisfazendo as seguintes propriedades: (i) se A e B pertencem a H_i, $i = 1$ ou 2, então $\overline{AB} \subset H_i$ e (ii) Se $A \in H_1$ e $B \in H_2$, então o segmento $\overline{AB}$ intercepta a reta r.

H_1 e H_2 no postulado acima são chamados de *os lados de r em* Π. Segue do postulado de incidência (**I.5**) que $H_1 \cup H_2$ não é vazio. Segue da propriedade (**B.4**) que H_1 e H_2 não são vazios.

Teorema 2. *Seja H um semiplano. O plano que contém H está unicamente determinado.*

`Demonstração`: Suponha que H está contido no plano Π e que H é um dos lados de uma reta r contida em Π. Seja P um ponto de H, sejam R_1 e R_2 pontos distintos de r.

Segue da propriedade (**B.4**) que existem Q_1 e Q_2 tais que $P - Q_1 - R_1$ e $P - Q_2 - R_2$. O ponto R_1 é o único ponto de interseção das retas r e $\overleftrightarrow{Q_1P}$ (se houvesse outro ponto na interseção, pelo primeiro postulado de incidência as duas retas seriam iguais e portanto P, que pertence a H, pertenceria a r). Pela propriedade (**B.2**), R_1 não está entre P e Q_1, logo o segmento $\overline{PQ_1}$ não intercepta a reta r. Logo P e Q_1 estão do mesmo lado de r, logo $Q_1 \in H$.

Pelo mesmo argumento, $Q_2 \in H$.

Suponhamos por absurdo que os pontos P, Q_1 e Q_2 fossem colineares, chamemos de s a reta que os contém. Como $R_1 \in \overleftrightarrow{PQ_1} = s$ e $R_2 \in \overleftrightarrow{PQ_2} = s$, seguiria que r e s têm dois pontos em comum, logo $r = s$, logo $P \in r$; o que contradiz o dado de que $P \in H$. Isto mostra que P, Q_1 e Q_2 são três pontos não colineares de H. Pelo segundo postulado de incidência, existe um único plano que contém P, Q_1 e Q_2, e esse plano é Π. $\square$

Teorema 3. *Seja H um semiplano contido no plano* Π. *A reta da qual H é um dos lados está unicamente determinada.*

`Demonstração`: Sejam r e s retas contidas em Π das quais H é um dos lado, isto é existem semiplanos H_1 e H_2 tais que $\Pi \setminus r = H \cup H_1$ e $\Pi \setminus s = H \cup H_2$. Queremos mostrar que $r = s$ (e, consequentemente, $H_1 = H_2$).

Tome arbitrariamente $P \in r$. Queremos mostrar que $P \in s$.

Tome $Q \in H$. Provemos que se X é tal que $P - X - Q$, então $X \in H$. X não pertence a r pois a interseção de $\overleftrightarrow{PQ}$ com r consiste apenas do ponto P. Se X não pertencesse a H, existiria $Y \in r$ tal que $X - Y - Q$. Y seria diferente de P (caso contrário, teríamos $P - X - Q$ e $P - X - Q$, o que violaria (**B.2**)), logo as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e r teriam dois pontos (distintos) de interseção, logo Q pertenceria a r, o que contradiria a escolha $Q \in H$.

Se P não pertencesse a s, Então, como $P \notin H$, P pertenceria ao outro lado de s (o lado diferente de H) em Π. Como $Q \in H$, existiria $Z \in s$ tal que $P - Z - Q$. Logo, pelo que provamos no parágrafo anterior, $Z \in H$. Logo $Z \notin s$, o que é um absurdo. Logo $P \in s$.

Claro que o mesmo argumento mostra também que se $P \in s$ então $P \in r$. Logo $r = s$. □

Postulado de separação do espaço. (**SE.1**) Dado um plano Π no espaço S. O complementar de Π em S é a união disjunta de dois conjuntos H_1 e H_2, chamados de semiespaços tais que (1) se P e Q são pontos pertencem ambos a H_i (i pode ser 1 ou 2), então o segmento $\overline{PQ}$ está todo contido em H_i e (2) se P e Q pertencem a subespaços diferentes, então o segmento $\overline{PQ}$ intersecta o plano Π.

5. Postulados da medição dos ângulos

Seja $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ uma geometria de incidência. A essa estrutura e aos axiomas de incidência acrescentamos uma distância $d : S \times S \to \mathbb{R}$ satisfazendo os axiomas (D1), (D2), (D3) e (D4). A noção de distância nos permitiu definir a noção de "estar entre", satisfazendo as propriedades (B1), (B2), (B3) e (B4). A noção de estar entre nos permitiu definir segmentos de reta, semirretas, ângulos e triângulos. Acrescentamos à nossa teoria os axiomas de separação do plano (SP1) e de separação do espaço (SS1), e assim pudemos definir os conceitos de semiplano, de interior de um ângulo, e de semiespaço.

Vamos agora introduzir mais uma ferramenta para estudar nossa geometria: uma maneira de *medir* ângulos. Adotaremos os seguintes postulados.

- **(M.1):** Existe uma função $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, onde $\mathcal{A}$ é o conjunto de todos os ângulos. Dado um ângulo $\angle BAC$, $m(\angle BAC)$ é chamado de *medida do ângulo* $\angle BAC$.
- **(M.2):** Para todo ângulo $\angle BAC$, $0 < m(\angle BAC) < 180$.
- **(M.3):** Dada uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ contida no bordo de um semiplano H, e dado um número r tal que $0 < r < 180$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{AP}$, $P \in H$, tal que $m(\angle BAP) = r$.
- **(M.4):** Seja D um ponto pertencente ao interior do ângulo $\angle BAC$. Então temos
$$m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$$
- **(M.5):** Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ semirretas *opostas* (isto é, $C - A - B$) e seja D um ponto qualquer que não esteja contido na reta que contém A, B e C. Então $m(\angle BAD) + m(\angle CAD) = 180$.

Definição 9. *Diremos que os ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$ são congruentes, o que denotaremos por $\angle BAC \simeq \angle EDF$ se $m(\angle BAC) = m(\angle EDF)$.*

Definição 10. *Um ângulo reto é um ângulo que mede 90.*

Definição 11. *Duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares se $m(\angle BAC) = 90$.*

Definição 12. *Duas retas que se interceptam em A, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares.*

Para que a definição precedente seja uma boa definição, é importante observar que se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares, os outros 3 ângulos determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ também são retos. Isto segue de (M.5).

Definição 13. *Dois segmentos são perpendiculares se as retas que os contêm são perpendiculares.*

Definição 14. *Se $B - A - C'$, $C - A - B'$ e $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{AB'}$, diremos que $\angle BAC$ e $\angle B'AC'$ são ângulos opostos pelo vértice.*

Teorema 4. *Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

`Demonstração`: Usando a notação da Definição 14, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC'}$ são opostas. Segue do postulado (M.5) que

$$m(\angle B'AC') + m(\angle BAB') = 180. \tag{2}$$

As semirretas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB'}$ também são opostas e portanto

$$m(\angle BAC) + m(\angle BAB') = 180. \tag{3}$$

Segue de (2) e (3) que $m(\angle BAC) = m(\angle B'AC')$. □

6. Congruência de Triângulos

Definição 15. *Diremos que os triângulos ΔABC e ΔDEF são congruentes, o que denotaremos por $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$, se*

(1) $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ *e* $\overline{CA} \simeq \overline{FD}$,
(2) $\angle BAC \simeq \angle EDF$, $\angle ABC \simeq \angle DEF$ *e* $\angle BCA \simeq \angle DFE$.

Acrescentamos agora mais um postulado à nossa teoria, o Postulado LAL.

(**LAL**) São dados dois triângulos (e uma bijeção entre seus vértices) ΔABC e ΔDEF. Se $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ e $\angle ABC \simeq \angle DEF$, então $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$.

`Tarefa`: Comparar o Postulado LAL com a Proposição 4 do Livro 1 dos Elementos de Euclides.

7. Geometria sem números reais (geometria sintética)

No nosso tratamento da geometria até agora, supusemos que existem uma distância entre pontos e uma medida de ângulos tomando valores em números reais e satisfazendo listas de postulados. Esta é a chamda *geometira métrica*. Usando a distância e a medida de ângulos, definimos as noções de "estar-entre" para pontos, de congruência de segmentos e de congruência de ângulos e demonstramos suas propriedades.

Uma abordagem alternativa, chamada de *geometria sintética*, prescinde da utilização de números reais. Em vez da distância e da medida de ângulos, supõe-se nesta abordagem que existem, como dados da teoria, a relação de estar-entre para pontos, a relação de congruência para segmentos e a relação de congruência para ângulos.

Essas três relações satisfazem certos postulados que, na geometria métrica, são as propriedades que podem ser demonstradas a partir dos postulados da métrica e da medida de ângulos.

Os postulados satisfeitos pela noção de estar-entre são listados a seguir.

(B.0): Se $A - B - C$, então A, B e C são três pontos distintos colineares.
(B.1): Se $A - B - C$, então $C - B - A$.
(B.2): Dados três pontos colineares, um, e apenas um deles está entre os outros dois.
(B.3): Dados quatro pontos de uma reta, seus nomes podem ser escolhidos como A, B, C e D de modo que $A - B - C - D$.
(B.4): Dados dois pontos A e B, existem C e D tais que $A - C - B$ e $A - B - D$.

Os postulados satisfeitos pela congruência de segmentos são listados a seguir.

(C.1): Congruência de segmentos é uma relação de equivalência.
(C.2): Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{CD}$, existe um único $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \simeq \overline{CE}$.
(C.3): Se $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$.
(C.4): Se $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$, então $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$.
(C.5): Todo segmento possui um único ponto médio; isto é, dado $\overline{AB}$, exite um único M tal que $A-M-B$ e $\overline{AM} \simeq \overline{MB}$.

Os postulados satisfeitos pela congruência de ângulos são listados a seguir.

(C.6): Congruência de ângulos é uma relação de equivalência.
(C.7): Dados ângulo $\angle ABC$, semirreta $\overrightarrow{B'C'}$ e H um semiplano cujo bordo contém $\overrightarrow{B'C'}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ com A' em H tal que $\angle ABC \simeq \angle A'B'C'$.
(C.8): Se D pertence ao interior do ângulo $\angle BAC$, D' pertence ao interior do ângulo $\angle B'A'C'$, $\angle BAD \simeq \angle B'A'D'$ e $\angle CAD \simeq \angle C'A'D'$, então $\angle BAC \simeq \angle B'A'C'$.
(C.9): Se D pertence ao interior do ângulo $\angle ABC$, D' pertence ao interior do ângulo $\angle A'B'C'$, $\angle BAD \simeq \angle B'A'D'$ e $\angle CAB \simeq \angle C'A'B'$, então $\angle DAC \simeq \angle D'A'C'$.

Na geometria métrica, um ângulo reto é um ângulo que mede 90 graus. Dois ângulos são congruentes, por definição, se têm a mesma medida. Logo todos os ângulos retos são congruentes.

Na geometria sintética, um ângulo $\angle ABC$ é reto se existir D, $D-B-C$, tal que $\angle ABC \simeq \angle DBA$. O quarto postulado de Euclides afirma que dois ângulos retos quaisquer são sempre congruentes. Usando o postulado da separação do plano, algo que implicitamente Euclides também faz nos Elementos, Hilbert provou, mais de dois mil anos depois de Euclides, que o quarto postulado de Euclides é supérfluo, pois decorre dos outros postulados (inclusive os postulados de estar-entre e congruência).

8. O Plano de Poincaré

Seja $P \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $L_a \coloneqq \{(a,y);\ y > 0\}$. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, defina $C_{a,r} \coloneqq \{(x,y);\ (x-a)^2 + y^2 = r^2,\ y > 0\}$. Denotemos por $\mathcal{L}$ a união dessas famílias de subconjuntos de P,

$$\mathcal{L} \ = \ \{L_a;\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{C_{a,r};\ a \in \mathbb{R},\ r > 0\}.$$

Os elementos de $\mathcal{L}$ são, por definição, as retas do *plano de Poincaré* P. A tripla $[P, \mathcal{L}, \{P\}]$ satisfaz os postulados de incidência listados na Seção 2, exceto pela afirmação de que S possui um subconjunto ao qual pertencem 4 pontos não coplanares (a demonstração de que dois pontos determinam uma única reta é trabalhosa, mas só usa conceitos básicos de geometria analítica). Dizemos então que $[P, \mathcal{L}]$ é uma geometria de incidência plana.

Para definir uma distância entre pontos de P, vamos usar uma abordagem da geometria diferencial. Em cada ponto (a,b) de P, consideramos um *plano tangente* $T_{a,b}P$, que consiste dos vetores tangentes em (a,b) das curvas diferenciáveis que passam por esse ponto. O plano tangente $T_{a,b}P$ pode ser visualizado como uma cópia de $\mathbb{R}^2$ afixado ao ponto (a,b), de modo que a origem dessa cópia de $\mathbb{R}^2$ coincida com o ponto (a,b). O produto interno de dois vetores $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ pertencentes a $T_{(a,b)}P$ é definido por

$$\langle v, w \rangle_{a,b} \ \coloneqq \ \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{b^2}.$$

A norma de um vetor $v \in T_{a,b}P$ é definida como $\|v\|_{a,b} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{a,b}}$ e a medida do ângulo formado por $v, w \in T_{a,b}P$ é definido como o único $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{\langle v,w \rangle_{a,b}}{\|v\|_{a,b}\, \|w\|_{a,b}}$. Segue da definição do produto interno que

$$\|v\|_{a,b} \ = \ \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{b} \quad \text{ e } \quad \cos\theta = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,\sqrt{w_1^2 + w_2^2}},$$

ou seja, a norma de um vetor em $T_{a,b}$ é igual á norma euclideana desse vetor dividida por b e a medida do ângulo formado por dois vetores coincide com a medida usual ("euclideana") de ângulos em $\mathbb{R}^2$.

O ângulo formado por duas curvas diferenciáveis em um ponto de interseção é, por definição, o ângulo formado por seus vetores tangentes.

Dada uma curva parametrizada diferenciável em P,

$$\gamma(t) \ = \ (x(t), y(t)) \in P, \quad t \in [a,b],$$

seu comprimento $L(\gamma)$ é definido, tal como no Cálculo, como sendo igual à integral de $\|\gamma'(t)\|_{(x(t),y(t))}$,

$$L(\gamma) \ = \ \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}\, dt. \tag{4}$$

Podemos usar essa noção de comprimento de curvas (usada na geometria diferencial [1]) para definir a distância entre dois pontos: a distância entre P e Q será igual ao comprimento da curva ligando P e Q que seja um trecho da única "reta" da nossa geometria passando por P e Q.

Consideremos primeiramente o caso em que os dois pontos têm a mesma abscissa, $P = (a, y_1)$ e $Q = (a, y_2)$. A única "reta" do plano de Poincaré que contém P e Q é L_a. Suponha que $y_2 > y_1$. Uma possível parametrização do trecho de L_a entre P e Q é dada por

$$\gamma(t) \;=\; (a, t),\; t \in [y_1, y_2].$$

Usando (4), vem

$$L(\gamma) \;=\; \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y}\, dy \;=\; \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Daí definimos, no caso em que $y_2 > y_1$ e as abscissas são iguais,

$$d(P, Q) \;=\; \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

No caso em que $y_2 \leq y_1$, para que tenhamos $d(P, Q) = d(Q, P)$, devemos definir

$$d(P, Q) \;=\; \left|\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right|, \tag{5}$$

fórmula que obviamente vale também no caso em que $y_2 > y_1$.

Consideremos agora o caso em que $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ tais que P e Q pertençam a $C_{a,r}$. A curva $C_{a,r}$ pode ser parametrizada por

$$\gamma(\theta) \;=\; (a + r\sin\theta, r\cos\theta),\; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Sejam θ_1 e θ_2, $-\frac{\pi}{2} < \theta_1, \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, tais que $\gamma(\theta_i) = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. A distância entre $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ é dada então por

$$d(P, Q) = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}{r\cos\theta}\, d\theta\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec\theta\, d\theta\right| = \left|\log\left(\frac{1+\sin\theta_1}{\cos\theta_1}\right) - \log\left(\frac{1+\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\right)\right|.$$

Segue de $\gamma(\theta_i) = (x_i, y_i)$ que $\sin\theta_i = \frac{x_i - a}{r}$ e $\cos\theta_i = \frac{y_i}{r}$. Daí,

$$d(P, Q) = \left|\log\left(\frac{1 + \frac{x_1 - a}{r}}{\frac{y_1}{r}}\right) - \log\left(\frac{1 + \frac{x_2 - a}{r}}{\frac{y_2}{r}}\right)\right| = \left|\log\frac{(x_1 + r - a)\, y_2}{(x_2 + r - a)\, y_1}\right|. \tag{6}$$

---

[1]Nestas notas, apelamos apenas para uma parte da abordagem da geometria diferencial. A abordagem completa consiste em, a partir da "métrica riemanniana" $\frac{dx\,dy}{y^2}$ (que permite definir produto interno, norma e medida de ângulos em cada plano tangente do espaço), definir reta como sendo uma curva γ que minimize o comprimento de todas as curvas que conectem dois pontos quaisquer da curva γ. Essas "retas" são mais comumente chamadas de geodésicas e a distância entre dois pontos é definida como o comprimento da geodésica minimizante que os conecta. É possível demonstrar que as geodésicas de P relativas à métrica $\frac{dx\,dy}{y^2}$ são precisamente as curvas L_a e $C_{a,r}$ definidas no primeiro parágrafo desta seção. Ocorre entretanto que nem sempre uma "geometria riemanniana" é uma geometria de incidência (veja, por exemplo, as explanações em [2, Seção 9.3] e em [1, Capítulo 2]). O que é notável é que a geometria riemanniana definida pela métrica $\frac{dx\,dy}{y^2}$ em P seja não apenas uma geometria de incidência, mas uma geometria de incidência munida de uma distância que satisfaz o postulado de separação do plano na qual é válido o caso LAL de congruência de triângulos. Chama-se de plano de Poincaré o espaço P munido dessa geometria. Ele consiste de um modelo (realização concreta) do *plano de Lobachevski*, matemático que construiu sinteticamente, a partir da geometria euclideana, o primeiro exemplo de uma geometria não-euclideana.

O Exercício seguinte mostra que o teorema de Pitágoras não é válido no plano de Poincaré.

`Exercício` Considere os pontos $A = (0, 2)$, $B = (\sqrt{3}, 1)$, $C = (0, 1)$ no plano de Poincaré.
(a) Use a fórmula (5) para calcular $d(A, C)$.
(b) Encontre (a, r) tal que A e B pertençam a $C_{a,r}$.
(c) Encontre (b, s) tal que B e C pertençam a $C_{b,s}$.
(d) Use a fórmula (6) para calcular $d(A, B)$ e $d(B, C)$.
(e) Verifique que o ângulo $\angle BAC$ é reto.
(f) Verifique que $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 < d(B, C)^2$.

Verifiquemos agora a validade do postulado (D.4) para a distância d, que afirma que toda reta possui um sistema de coordenadas.

Consideremos primeiro uma reta do tipo L_a, $a \in R$, e definamos $f : L_a \to \mathbb{R}$ por $f(a, t) = \log t$, $t > 0$. Então f é uma bijeção e, para $P = (a, t)$ e $Q = (b, s)$ em L_a, verifica-se que $d(P, Q) = |f(t) - f(s)|$.

Consideremos agora uma reta do tipo $C_{a,r}$, $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Vimos que

$$C_{a,r} = \{(a + r \sin\theta, r \cos\theta);\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})\,\}.$$

Definamos $f : C_{a,r} \to \mathbb{R}$ por $f(a + r \sin\theta, r \cos\theta) = \log \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$. Para $P = (a + r \sin\theta_1, a, \cos\theta_1)$ e $Q = (a + r \sin\theta_2, a, \cos\theta_2)$, verifica-se que f é uma bijeção e $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$.

`Exemplo`: Considere a "reta" $C_{0,1}$ e $P = (0, 2)$. Para todo $a \in \mathbb{R}$ com $|a| < 3/2$, $C_{a,\sqrt{a^2+4}}$ não intercepta $C_{0,1}$ e contém P. Isto prova que existem infinitas paralelas a $C_{0,1}$ passando por P e, portanto, o quinto postulado de Euclides não se verifica no plano de Poincaré. É possível provar que dada qualquer reta no plano de Poincaré e dado um ponto fora dela, existem infinitas paralelas à reta dada passando pelo ponto dado.

9. Ângulos Alternos Internos

Sejam r, s e t três retas coplanares. Suponha que r e t são concorrentes, e também que s e t são concorrentes. Chame de P a interseção de r e t e chame de Q a interseção de s e t. Sejam $A \in r$ e $D \in s$ pontos em lados opostos da reta t. Dizemos então que os ângulos $\angle APQ$ e $\angle PQD$ são *alternos internos.*

Usando os postulados sobre medidas de ângulos (ou, como alternativa, os postulados de congruência de ângulos da geometria sintética), demonstra-se:

Proposição 3. *Sejam r, s e t três retas coplanares. Suponha que r e t são concorrentes, e também que s e t são concorrentes. Se um par de ângulos alternos internos forem congruentes, então r e s são paralelas.*

Usando, além do mais, o Quinto Postulado de Euclides, demonstra-se:

Proposição 4. *Sejam r, s e t três retas coplanares. Suponha que r e t são concorrentes, e também que s e t são concorrentes. Se r e s forem paralelas, pares de ângulos alternos internos são congruentes.*

10. Semelhança de Triângulos

Definição de área.

Dada reta r e ponto $P \notin r$, chamamos de *pé da perpendicular sobre r por P* o único ponto $Q \in r$ tal que $\overleftrightarrow{PQ}$ seja perpendicular a r.

Proposição 5. *Dado triângulo ΔABC, seja D o pé da perpendicular sobre $\overleftrightarrow{BC}$ por A, seja E o pé da perpendicular sobre $\overleftrightarrow{AC}$ por B. Se o ângulo em C for agudo, então $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE}$ e $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$.*

`Demonstração`: Como o ângulo em C é agudo, $E \neq C$ e $D \neq C$ (caso contrário $\angle C$ seria reto). Logo as semirretas do enunciado estão bem definidas.

Se $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{CD}$, então $D - C - B$. Considere o triângulo ΔADC. Como $\angle ADC$ é reto, $\angle ACD$ é agudo, logo seu suplementar $\angle ACB$ é obtuso, contrariando a hipótese. Analogamente prova-se que, se $\overrightarrow{CE} \neq \overrightarrow{CA}$, então $\angle ACB$ é obtuso. □

Proposição 6. *Dado triângulo ΔABC, seja D o pé da perpendicular sobre $\overleftrightarrow{BC}$ por A, seja E o pé da perpendicular sobre $\overleftrightarrow{AC}$ por B. Se o ângulo em C for agudo, então*

$$AD \cdot BC \ = \ BE \cdot AC.$$

`Demonstração`: Considere os triângulos ΔACD e ΔBCE. Pela Proposição 5, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE}$, logo $\angle ACD = \angle BCE$. Os ângulos $\angle CDA$ e $\angle BEC$ são retos, e portanto congruentes. Como a soma dos ângulos internos dos dois triângulos é igual, segue que $\angle CAD \simeq \angle CBE$. Pelo caso AAA de semelhança, concluímos que $\Delta ACD \sim \Delta BCE$, e portanto $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BE}{AD}$. □

Em um triângulo ΔXYZ, chamamos de altura relativa ao lado $\overline{XY}$ o comprimento do segmento $\overline{ZP}$, sendo $\overleftrightarrow{ZP}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{XY}$ e $P \in \overleftrightarrow{XY}$.

Dado o triângulo ΔABC, denotemos $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Denotemos por h_1, h_2 e h_3 as alturas relativas, respectivamente, aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Pelo menos dois ângulos de qualquer triângulo são agudos. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\angle B$ e $\angle C$ são agudos. Segue então da Proposição 6 que $ah_1 = bh_2$ e $ah_1 = ch_3$, logo $ah_1 = bh_2 = ch_3$. O número positivo

$$\alpha \ := \ \frac{ah_1}{2} \ = \ \frac{bh_2}{2} \ = \ \frac{ch_3}{2}$$

é, por definição, a área do triângulo ΔABC.

Referências

[1] R. Millman & G. Parker. Geometry – a metric approach with models. Springer, 1991.

[2] Edwin Moise. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Addison Wesley, 1963.