MAT0230 - Geometria e Desenho Geométrico I

Prof. Severino Toscano do Rego Melo

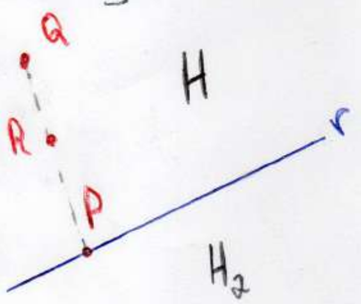
Jailson Santos Silva

nº USP: 11838374

# Prova 21/12

1) Sejam $r$ uma reta e $\pi$ um plano que a contém. Chame de $H$ um dos dois semiplanos contidos em $\pi$ determinados por $r$. Considere $P \in r$ e $Q \in H$. Mostre que, se $P-R-Q$, então $R \in H$.

→ Ilustração:




→ Considere $\pi = H \cup r \cup H_2$, sendo $H_2$ o outro semiplano contido em $\pi$ determinado por $r$.

→ Por definição: $\overline{PQ} = \{P,Q\} \cup \{A \in \overleftrightarrow{PQ} : P-A-Q\}$.

→ Suponha que $R$ não pertença a $H$, logo, há duas possibilidades:

$P, Q \in \pi$, então por I.3 $\overleftrightarrow{PQ} \subset \pi$, e como $P-R-Q$, $R \in \overline{PQ}$, por fim, $R \in \pi$.

$R \in \overleftrightarrow{PQ}$

• Se $R \in r$, $P, R \in r$ e como $P$ e $R$ são pontos distintos ($P-R-Q$ implica isto), então, $\overleftrightarrow{PR} = r$. → por I.1

Mas $P, R \in r$ e $P-R-Q$ implicam que $Q \in \overrightarrow{PR} = \{C \in \overleftrightarrow{PR} : P-R-C\} \cup \overline{PR}$, ou seja, $Q \in r$, o que é um ABSURDO, pois $Q \in H$.

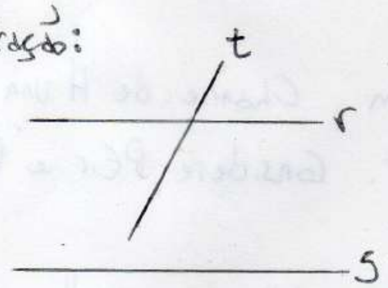
• Se $R \in H_2$, por SP.1(ii) $\overline{QR}$ intercepta a reta $r$. Suponha que o ponto de interseção seja $T$, então, $Q-T-R$. No entanto, sabe-se que $Q-R-P$, logo, $Q-T-R-P$ e sendo $T, P \in r$ chega-se a um ABSURDO, pois um segmento que não está contido numa reta não pode interceptá-la duas vezes.

$\therefore R \in \underbrace{H \cup r \cup H_2}_{\pi}$ e $R \notin r \cup H_2$, logo, $R \in H$.

Proposição: Sejam r, s e t três retas coplanares. Se r e s são paralelas e r e t são concorrentes, então s e t são concorrentes.

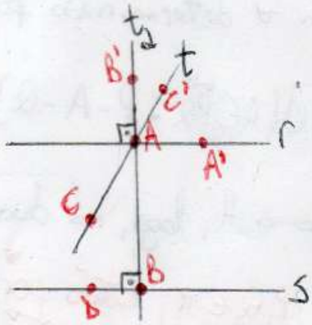
2) a) Use o Quinto Postulado de Euclides para demonstrar a Proposição acima.

→ Ilustração:




→ Seja $r \cap t = A$, trace a reta $t_2$ perpendicular à r passando por A.

→ Na pág. 165 do Elementary Geometry from an Advanced Standpoint - E. Moise, é provado o Teorema 3 que diz que projeções paralelas preservam congruência, isto é, como $r \parallel s$, então, $t_2$ também é perpendicular à s, e, como já visto no Exercício 7 da Lista de Problemas, os quatro ângulos formados por s e $t_2$ são retos. Considere $s \cap t_2 = B$.




→ Marque $C \in t$ tal que C está do mesmo lado que s em relação à r.

→ Marque $A' \in r$ tal que A' está do mesmo lado que B em relação à t.

→ Marque também $C' \in t$ tal que $C'-A-C$, e, $B' \in t_2$ tal que $B'-A-B$.

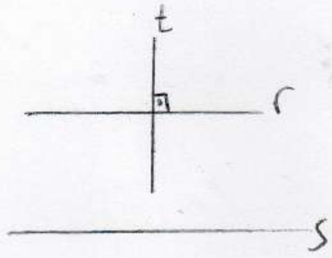
Então, pela Definição 10 e M.4 sabe-se que $m(\angle A'AB') = m(\angle A'AC') + m(\angle C'AB') = 90$, supondo $m(\angle A'AC') > 0$ se tem $m(\angle C'AB') < 90$, ou seja, $m(\angle BAC) < 90$.
oposto pelo vértice.

↳ r e t são concorrentes, logo, há dois casos: r e t são perpendiculares, e, r e t não são perpendiculares. Toda a resolução até esse momento está considerando o 2º caso, onde r e t não são perpendiculares, e nesse caso é perfeitamente cabível supor $m(\angle A'AC') > 0$.

→ Marque $D \in s$ tal que D está do mesmo lado que C em relação à $t_2$. Sabe-se que $m(\angle ABD) = 90$.

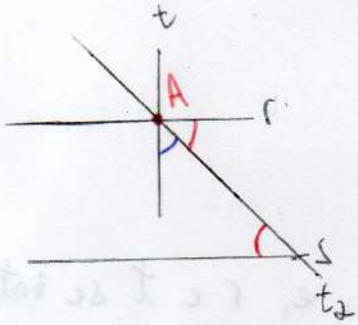
→ $m(\angle ABD) = 90$ e $m(\angle BAC) < 90$, logo, $m(\angle ABD) + m(\angle BAC) < 180$, e, pelo Quinto Postulado de Euclides as retas s e t são concorrentes e se interceptarão num ponto do mesmo lado desses ditos ângulos internos ($\angle ABD$ e $\angle BAC$).

↳ Como mencionado anteriormente há o caso onde $r$ e $t$ são perpendiculares:




também é possível usar o Q.P.E. neste caso.

↳ Seja $r \cap t = A$, trace a reta $t_2$ que passe por $A$ e forme um ângulo com $t$ que vale metade de um ângulo reto (45).

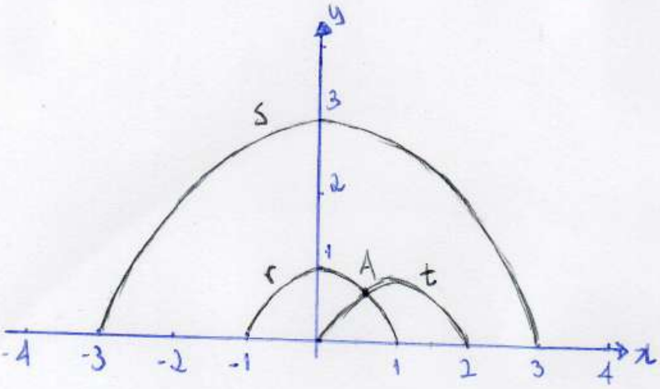



→ Então, por M.4 sabe-se que os ângulos em vermelho e azul em $A$ valem 45 cada, e, por ângulos alternos internos sabe-se que o outro ângulo interno às retas $s$, $t$ e $t_2$ também vale 45.

Sendo assim, pelo Quinto Postulado de Euclides as retas $s$ e $t$ são concorrentes, e se interceptarão no mesmo lado (em relação a $t_2$) que esses ângulos internos.

b) A Proposição também é verdadeira no Plano de Poincaré?

→ Considere as "retas" $\underbrace{C_{0,1}}_{r}$, $\underbrace{C_{0,3}}_{s}$ e $\underbrace{C_{1,1}}_{t}$:




→ r e s não se interceptam, logo, são "retas" paralelas, e, r e t se interceptam num único ponto $A = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, logo, r e t são concorrentes. No entanto, s e t não se interceptam, ou seja, s e t são paralelas, o que contradiz a Proposição.

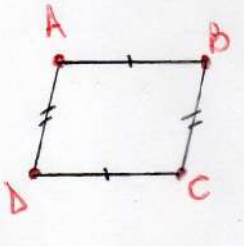
∴ Por contraexemplo é provado que a Proposição não vale no Plano de Poincaré!

3) Sejam A, B, C e D quatro pontos coplanares. Suponha que: (i) A, B e C não são colineares, (ii) A, C e D não são colineares, (iii) os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são congruentes e (iv) os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes.

a) Mostre que os ângulos $\angle ACD$ e $\angle CAB$ são congruentes.

Sugestão: Use congruência de triângulos.

→ Ilustração:



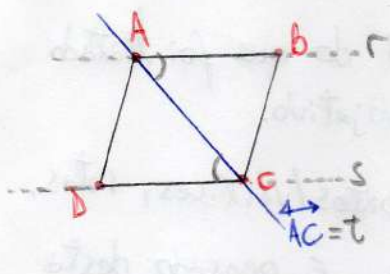

→ Considere os triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta ACD$. Como $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e ambos os triângulos partilham do lado $\overline{AC}$, então, $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ pelo caso LLL de congruência.

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \angle ACD \cong \angle CAB$, bem como $\angle DAC \cong \angle ACB$ e $\angle ADC \cong \angle CBA$.

b) Mostre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos.

Suponha ademais que: (v) D e B estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AC}$.

→ Ilustração:




→ Por I.1 considere as retas r, s e t tais que $A, B \in r$, $D, C \in s$ e $A, C \in t = \overleftrightarrow{AC}$.

Perceba que r, s e t são retas traçadas a partir de pontos coplanares, logo, r, s e t são coplanares.

Além disso, r e t são concorrentes, pois $r \cap t = A$, e, s e t são concorrentes, pois $s \cap t = C$.

Logo, ao observar os pontos $B \in r$ e $D \in s$ em lados opostos da reta t, tem-se os ângulos alternos internos $\angle BAC$ e $\angle ACD$.

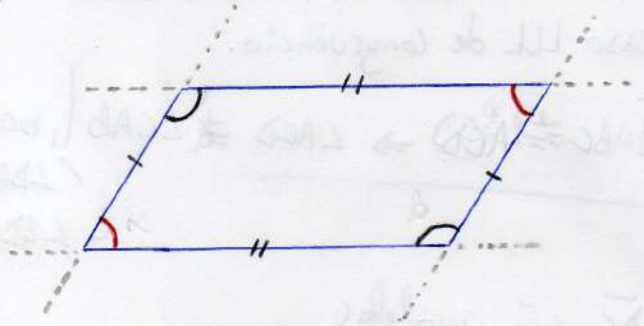
→ Pela Proposição 3 se um par de ângulos alternos internos for congruente, então r e s são paralelas. E, já foi provado no item anterior que $\angle BAC \cong \angle ACD$, logo, r e s são paralelas.

$\therefore \overline{AB} \subset r = \overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{DC} \subset s = \overleftrightarrow{DC}$, e, como $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, então, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

c) Faça uma figura e enuncie em linguagem da escola básica um corolário dos itens (a) e (b).

→ "Dado um polígono de quatro lados, se os lados opostos tiverem mesma medida, então, dois-a-dois os ângulos das diagonais são congruentes, e os lados opostos são paralelos".

→ Ilustração:



→ Considerações:

O corolário enunciado acima é uma "versão" mais geral do que foi tratado nas questões 3a e 3b, buscando ser mais acessível e objetivo.

Por esses motivos o corolário não faz de notação de pontos/vértices, retas, segmentos ou ângulos um uso, ou seja, sem nomenclaturas. É pensado desta forma a fim de não "assustar" os estudantes, bem como facilitar que captem a noção geométrica, transcendendo a notação ou nomenclatura.

Outro detalhe é que esse corolário é um pouco mais "geral" do que as respostas dos itens a) e b), no entanto, se trata de demonstrações análogas:

No item a), $\Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \angle ACD \cong \angle CAB$ e $\angle DAC \cong \angle ACB$ e $\angle ADC \cong \angle CBA$, logo, $\angle ADC \cong \angle CBA$ e $\angle BAD \cong \angle DCB$, pois $m(\angle BAD) = m(\angle BAC) + m(\angle CAD) = m(\angle DCB)$, portanto, dois-a-dois os ângulos das diagonais são congruentes. $m(\overset{||}{\angle DCA})$ $m(\overset{||}{\angle ACB})$

No item b), $\angle DAC$ e $\angle ACB$ são ângulos alternos internos congruentes (por $\Delta ABC \cong \Delta ACD$), logo, pela Prop. 3 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, portanto, os lados opostos são paralelos.