USP - MAT 554 - 2020 - 2° SEMESTRE DE 2020

EXERCÍCIOS SOBRE OPERADORES DE FREDHOLM

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

Definição: Sejam X e Y espaços vetoriais complexos e seja $T : X \to Y$ uma transformação linear. Dizemos que T é um operador de Fredholm se $\ker T$ e $\dfrac{Y}{\operatorname{Im} T}$ têm dimensão finita. Definimos então

$$\operatorname{ind} T \;=\; \dim \ker T \;-\; \dim \frac{Y}{\operatorname{Im} T}.$$

1) Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável, seja $\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ uma base de X. Sejam T, S operadores lineares em X, $S(x_0) = 0$, $S(x_{i+1}) = x_i$, $T(x_i) = x_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$.
(a) Mostre que, para todo $j > 0$ inteiro, T^j e S^j são operadores de Fredholm e calcule seus índices.
(b) Mostre que, para todos j, k inteiros positivos, $T^j S^k - S^k T^j$ é um operador de posto finito.

2) Seja $X = V_1 \oplus V_2$ uma decomposição em soma direta de subespaços do espaço vetorial de dimensão infinita X, sejam $T_i : V_i \to V_i$, $i = 1, 2$, operadores de Fredholm. Defina $T : X \to X$ por $T(v_1 + v_2) = T_1(v_1) + T_2(v_2)$, $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$. Mostre que T é um operador de Fredholm e $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} T_1 + \operatorname{ind} T_2$.

3) Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita. Mostre que para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe um operador de Fredholm $T_n : X \to X$ tal que $\operatorname{ind} T_n = n$.

4) Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita, seja $F : X \to X$ um operador linear de posto finito. Mostre que $I + F$ é um operador de Fredholm e $\operatorname{ind}(I + F) = 0$.

Sugestão: siga, integral ou parcialmente, o roteiro indicado nos itens seguintes.

(a) Seja $\{w_1, \cdots, w_n\}$ uma base de $\operatorname{Im} F$, sejam $z_1, \cdots, z_n \in X$ tais que $F z_j = w_j$, $j = 1, \cdots, n$. Mostre que $\{[z_1], \cdots, [z_n]\}$ é uma base de $\dfrac{X}{\ker F}$.

(b) Mostre que existem funcionais lineares $l_j : X \to \mathbb{C}$, $j = 1, \cdots, n$, tais que

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j(x)\, w_j, \text{ para todo } x \in X.$$

(c) Considere $l : X \to \mathbb{C}^n$, $l(x) = (l_1(x), \cdots, l_n(x))$, $x \in X$. Mostre que l é sobrejetora e que $\ker l = \ker F$.

(d) Considere $A = (\!(l_j(w_k))\!)_{1\le j,k\le n} \in M_n(\mathbb{C})$. Mostre que, se $x, f \in X$ e $(I+F)(x) = f$ então $l(x) + A\, l(x) = l(f)$.

(e) Dados $f \in X$ e $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ tais que $(I+A)\xi = l(f)$, seja $x = f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k w_k$. Mostre que $l(x) = \xi$ e $(I+F)x = f$.

(f) Mostre que $\ker(I+F) \ni x \longmapsto l(x) \in \ker(I+A) \coloneqq \{\xi \in \mathbb{C}^n;\ (I+A)\xi = 0\}$ é um isomorfismo linear com inversa dada por $\xi \longmapsto -\sum_{j=1}^{n} \xi_j w_j$

(g) Seja $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \dfrac{\mathbb{C}^n}{\mathrm{Im}\,(I+A)}$ a projeção canônica, $\mathrm{Im}\,(I+A) \coloneqq \{(I+A)\xi;\ \xi \in \mathbb{C}^n\}$.
Mostre que $\ker \pi \circ l = \mathrm{Im}\,(I+F)$.

Observação: No caso em que $X = H$ é um espaço de Hilbert, usando que o índice define uma aplicação contínua de $\mathcal{F}(H) = \{$operadores de Fredholm contínuos$\}$ em $\mathbb{Z}$, e que todo operador compacto é limite de operadores de posto finito, segue do Problema 4 que, se K é um operador compacto, então $I + K$ é um operador de Fredholm de índice zero.

5) Seja $T : X \to Y$ um operador de Fredholm; sejam $M \subseteq X$ e $N \subseteq Y$ tais que $X = \ker T \oplus M$ e $Y = \mathrm{Im}\, T \oplus N$; sejam $p : X \to M$ e $q : Y \to \mathrm{Im}\, T$ as projeções associadas a essas duas decomposições em soma direta de subespaços.
(a) Mostre que a restrição de T a M define um isomorfismo $T_0 : M \to \mathrm{Im}\, T$.
(b) Considere $S = \iota \circ T_0^{-1} \circ q : Y \to X$, em que $\iota : M \to X$ é a inclusão. Mostre que $I_X - ST$ e $I_Y - TS$ são operadores de posto finito.
(c) Mostre que S é um operador de Fredholm e $\mathrm{ind}\, S = -\mathrm{ind}\, T$ (use um resultado demonstrado na primeira aula).

Observação: No caso em que X e Y são espaços de Banach e T é contínuo, $\mathrm{Im}\, T$ é necessariamente um subespaço fechado e é possível tomar M e N fechados e p e q contínuas. Segue então (esta é uma consequência do *Teorema de Baire*) que S também é contínuo. Ou seja, todo operador de Fredholm contínuo possui uma inversa-modulo-compactos linear e contínua. A recíproca desta afirmação é o *Teorema de Atkinson*.