SÉRIES - DEFINIÇÕES E TEOREMAS

MAT 0320 - TURMA 42

1° SEMESTRE DE 2019

Convergência.

Dados $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, dizemos que *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* se a sequência das *somas parciais*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

possui um limite, isto é, se existe $S \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |s_n - S| = 0$. Se o limite $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe, dizemos que a série diverge. O limite S, quando existe, é chamado de *soma da série*. Denota-se então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Critério do termo geral.

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. A recíproca não é verdadeira. Pode acontecer de ser verdade que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e, entretanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergir. O exemplo mais conhecido é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Esta série diverge, apesar de $\frac{1}{n}$ tender a zero quando n tende a infinito.

Séries de termos não-negativos.

Se $a_n \geq 0$ para todo n, a sequência das somas parciais é não-decrescente, isto é, $s_n \leq s_{n+1}$ para todo n. Se existe $M > 0$ tal que $s_n \leq M$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e a soma da série é menor ou igual a M. Se não existe um tal M, então $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ e, portanto, a série diverge.

Critério da comparação.

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n e se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Obviamente vale também a contrapositiva: se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. Mas não vale a recíproca. Pode acontecer de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergir e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir. Por exemplo, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ para todo n, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Séries absolutamente convergentes.

Se $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ também converge e temos $\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$. Dizemos então que $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ é *absolutamente convergente.*

Critério da razão.

Sejam $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(1) Se $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge absolutamente.

(2) Se $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para todo n suficientemente grande (isto ocorre, por exemplo, se $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$), então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.

Raio de convergência de uma série de potências.

Seja $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, uma série de potências. Um dos três casos seguintes ocorre.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ converge absolutamente, qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$.

(2) Existe $r > 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ converge absolutamente se $|z| < r$ e diverge se $|z| > r$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ diverge se $z \neq 0$.

Quando ocorre o caso (2), o número r é chamado *raio de convergência.* No caso (1), diz-se que o raio de convergência é infinito. No caso (3), o raio de convergência é zero.

Derivação de séries de potências.

Seja $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, uma série de potências com raio de convergência r, $0 < r \leq \infty$. A soma da série $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ é uma função holomorfa no domínio $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < r\}$. Os raios de convergência das séries $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$ são iguais e vale a igualdade $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$, $|z| < r$.