DEDUÇÃO DAS LEIS DE KEPLER

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA USP
MAT 226 – NOTAS DE AULA
2° SEMESTRE DE 2019

Versão ainda incompleta

O objetivo destas notas é deduzir as leis de Kepler, que serão enunciadas só após terem sido deduzidas, a partir da lei da gravitação universal e da segunda lei de Newton. Queremos descrever a trajetória de um planeta orbitando em torno do sol, ignorando todas as interações dos dois com os demais corpos celestes. Suporemos que o sol está fixo [1] na origem de um sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^3$ e que o planeta está na posição $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ em cada instante $t \in \mathbb{R}$.

A lei da gravitação universal afirma que a força exercida no planeta pelo sol é paralela a $\mathbf{x}$, tem sentido contrário a $\mathbf{x}$ e tem intensidade inversamente proporcional a $|\mathbf{x}|^2$. A constante de proporcionalidade é igual ao produto de uma constante universal G pelo produto das massas do sol M e do planeta m. A segunda lei de Newton afirma que a força exercida no planeta é igual a m multiplicada pela aceleração $\mathbf{x}''(t)$. Omitindo o argumento t das funções $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}''$, vem que a trajetória do planeta satisfaz

$$m\mathbf{x}'' = -GMm\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\,.$$

Para simplificar as fórmulas é conveniente (e lícito) supor que foram adotadas unidades de medida tais que $GM = 1$. Cancelando m, vem

$$\mathbf{x}'' = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\,. \tag{1}$$

Denotando $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, esta equação diferencial vetorial pode ser destrinchada em um sistema de três equações diferenciais escalares:

$$x_i'' = -\frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Conservação do Momento Angular.

Proposição 1. *A grandeza vetorial $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}$ fica constante ao longo do movimento. Isto implica que existe um plano passando pela origem que contém todos os pontos $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ da trajetória do planeta.*

[1] Esta suposição não é muito realista. Ao final do texto discutiremos como tratar do problema levando em conta que o sol também se move sob atração do planeta. Veremos que valem as mesmas leis de Kepler, exceto por um pequeno ajuste.

Demonstração: Tomando o produto vetorial dos dois membros da igualdade (1) por $\mathbf{x}$ e usando que $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$ (veja o Corolário 1 do Apêndice 1), vem que

$$\mathbf{x}'' \times \mathbf{x} = 0$$

Aplicando a regra do produto (que também vale para o produto vetorial de duas funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$; verifique isto), e usando mais uma vez o Corolário 1 e a igualdade anterior temos

$$(\mathbf{x}' \times \mathbf{x})' = \mathbf{x}'' \times \mathbf{x} + \mathbf{x}' \times \mathbf{x}' = \mathbf{x}'' \times \mathbf{x} = 0.$$

Ou seja, $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}$ é constante. Ou seja, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}, \text{ para todo } t. \tag{3}$$

Tomando o produto escalar dos dois membros de $\mathbf{x}' \times \mathbf{x} = \mathbf{v}$ por $\mathbf{x}$ e usando a Proposição 5, vem:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{4}$$

Vamos concluir a demonstração considerando separadamente os casos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, a equação (4) expressa o fato geométrico de que todo ponto da trajetória do planeta $\mathbf{x}(t)$ pertence ao plano que passa pela origem e é perpendicular a $\mathbf{v}$.

Suponhamos agora que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Denotando $|\mathbf{x}|$ por r, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{x}}{r}\right) = \frac{r\mathbf{x}' - r'\mathbf{x}}{r^2} = \frac{r^2\mathbf{x}' - rr'\mathbf{x}}{r^3} = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}' - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')\mathbf{x}}{r^3} = \frac{(\mathbf{x} \times \mathbf{x}') \times \mathbf{x}}{r^3} = 0.$$

Na primeira destas igualdades, usamos as regras de derivação do Cálculo 1, que valem também para funções vetoriais; na segunda, apenas multiplicamos o numerador e o denominador por r; na terceira, usamos que $r^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ e que

$$rr' = \frac{1}{2}(r^2)' = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}';$$

na quarta, usamos a identidade vetorial (13); na última, usamos (3) e a hipótese $\mathbf{v} = 0$.

Provamos portanto que $\mathbf{x}/r$ é constante, ou seja, que, para todo t, $\mathbf{x}(t)$ pertence a uma semi-reta que tem a origem como extremidade. $\square$

A grandeza vetorial $\mathbf{L} = m\mathbf{x}' \times \mathbf{x}$ é chamada de *momento angular* do planeta em relação à origem.

Como o movimento é planar, uma mudança de coordenadas faz com que o plano do movimento coincida com o plano xy. Ou seja, podemos supor que $\mathbf{x}(t) = (x, y, 0)$ e que, portanto, $\mathbf{x}' \times \mathbf{x} = (0, 0, x'y - xy')$. Como $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}$ é constante ao longo do movimento, a grandeza escalar $x'y - xy'$ também é. Vamos em seguida usar coordenadas polares para deduzir a segunda lei de Kepler (a *lei das áreas*) a partir da conservação de $x'y - xy'$.

Segue de (2) que as equações que descrevem o movimento do planeta se reduzem a

$$\begin{cases} x'' &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ y'' &= -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases} \tag{5}$$

Áreas iguais em tempos iguais (segunda lei de Kepler).

Seja $((x(t), y(t))$ uma solução de (5) de classe C^2, definida em um intervalo aberto I. Diminuindo I se necessário, podemos supor que, para todo $t \in I$, $(x(t), y(t))$ esteja contido em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ que seja a imagem difeomorfa de um outro aberto $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^2$ através da aplicação

$$\tilde{U} \ni (r,\theta) \quad \longmapsto \quad (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \in U$$

(veja o Apêndice 2). Isto implica que existe uma curva de classe C^2, $(r(t), \theta(t)) \in \tilde{U}$, $t \in I$, tal que

$$\begin{cases} x(t) &= r(t)\cos[\theta(t)] \\ y(t) &= r(t)\,\mathrm{sen}[\theta(t)] \end{cases}, \text{ para todo } t \in I.$$

As derivadas de $(x(t), y(t))$ podem ser expressas em termos das derivadas de $(r(t), \theta(t))$ usando a regra da cadeia. É o que fazemos a seguir, omitindo o argumento t, como de costume:

$$\begin{cases} x' &= r'\cos\theta - r(\mathrm{sen}\,\theta)\,\theta' \\ y' &= r'\,\mathrm{sen}\,\theta + r(\cos\theta)\,\theta' \end{cases}, \tag{6}$$

donde decorre que $x'y - xy' = -(r^2\theta')$. Como $x'y - xy'$ é uma função constante em I, segue que também

$$r^2\theta' \text{ é constante em } I. \tag{7}$$

Em particular, como $r(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, segue que $\theta'(t)$ tem sinal constante ou é nula em I. É positiva ou negativa se o momento angular for não-nulo e é nula se o momento angular for nulo. No caso em que é nulo, o movimento do astro está contido em uma semi-reta passando pelo sol. Isso corresponde ao caso em que o astro está ou em rota de colisão com o sol ou está escapando da atração gravitacional do sol viajando em linha reta. Vamos considerar apenas o caso em que $\theta'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Em qualquer ponto da trajetória pode-se repetir o argumento para algum intervalo aberto que a princípio pode depender do ponto. Requer resultados que veremos no curso [2] concluir daí que $\theta'(t) \neq 0$ para todo t pertencente a qualquer intervalo onde esteja definida uma solução de (5). Logo, a função $\theta(t)$ ou é estritamente crescente ou é estritamente decrescente no domínio de qualquer solução definida em um intervalo qualquer I e a imagem da função θ, definida em I, é também um intervalo aberto, que chamaremos de J.

Vamos denotar por

$$J \ni \theta \longmapsto t(\theta) \in I$$

a função inversa da bijeção

$$I \ni t \longmapsto \theta(t) \in J.$$

[2]Em um contexto mais geral, veremos que, dados $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única solução de (5) definida em um *intervalo maximal* J (que é aberto), satisfazendo $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ e $(x'(0), y'(0)) = (u_0, v_0)$ e tal que qualquer outra solução de (5) satisfazendo $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ e $(x'(0), y'(0)) = (u_0, v_0)$ definida em um intervalo contendo t_0 é a restrição dessa solução definida em J. Acabamos de provar que, se o momento angular, que é constante, for não-nulo (isto é, se o movimento não estiver contido em uma semi-reta), então, dado qualquer ponto da trajetória $(x(t_1), y(t_1))$, $t_1 \in J$, temos $\theta'(t) \neq$ para todo t pertencente em um intervalo contendo t_1. Em particular, $\theta'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$. Como θ' é contínua e J é um intevalo, segue do teorema do valor intermediário que θ' não muda de sinal em J.

E por $\tilde{r}$ a função

$$J \ni \theta \longmapsto \tilde{r}(\theta) = r(t(\theta)) > 0.$$

Suponhamos que $\theta'(t) > 0$ para todo $t \in I$ e, portanto, a função $t \mapsto \theta(t)$ é estritamente crescente em I. O intervalo J pode ter comprimento maior do que 2π de modo que pode ocorrer

$$(r_1 \cos(\theta(t_1)), r_1 \operatorname{sen}(\theta(t_1))) = (r_2 \cos(\theta(t_2)), r_2 \operatorname{sen}(\theta(t_2)))$$

mesmo com $t_1 \neq t_2$. Ou seja, o planeta pode passar duas vezes pelo mesmo ponto do plano, apesar de θ ser estritamente crescente em t.

Fixado um $\theta_0 \in J$, definamos

$$\tilde{A}(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} \tilde{r}(s)^2\, ds$$

e $A(t) = \tilde{A}(\theta(t))$. A função A pode ser interpretada como *a área varrida em torno do sol pelo planeta* (ver o Apêndice 2) entre os instantes $t(\theta_0)$ e t. A segunda lei de Kepler afirma que *o planeta varre áreas iguais em tempos iguais*, isto é, para quaisquer $t_1, t_2 \in I$, o valor de $A(t_2) - A(t_1)$ só depende de $t_2 - t_1$. Isto decorre da seguinte proposição:

Proposição 2. *$A'(t)$ é constante em $t \in I$.*

Demonstração: Segue da definição de $\tilde{A}$ e do teorema fundamental do cálculo que $\tilde{A}'(\theta) = \frac{1}{2}\tilde{r}(\theta)^2$. Pela regra da cadeia e pela definição da função $\tilde{r}$

$$A'(t) = \tilde{A}'(\theta(t))\,\theta'(t) = \frac{1}{2}\tilde{r}(\theta(t))^2\,\theta'(t) = \frac{1}{2}r(t)^2\theta'(t).$$

A proposição segue agora de (7). □

Nós não usamos diretamente (1) nem sua consequência (5) para demonstrar que o momento angular se conserva e que a segunda lei de Kepler é satisfeita, mas apenas a Proposição 1, que depende apenas do fato de que a força de atração é paralela a $\mathbf{x}$. Seguindo os passos das demonstrações anteriores, pode-se demonstrar mais geralmente que uma partícula se movendo em um campo *central* de forças (força paralela ao vetor posição) tem o seu momento angular conservado e tem trajetória plana satisfazendo a segunda lei de Kepler (ver [1]).

As trajetórias elípticas dos planetas (primeira lei de Kepler).

Segue de (6) que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & r''\cos\theta - 2r'(\operatorname{sen}\theta)\,\theta' - r(\cos\theta)\,\theta'^2 - r(\operatorname{sen}\theta)\,\theta'' \\ y'' & = & r''\operatorname{sen}\theta + 2r'(\cos\theta)\,\theta' - r(\operatorname{sen}\theta)\,\theta'^2 + r(\cos\theta)\,\theta'' \end{array}\right. \tag{8}$$

e daí

$$x''\cos\theta + y''\operatorname{sen}\theta = r'' - r\theta'^2 \tag{9}$$

Decorre de (5) e de $(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ que $x''\cos\theta = -\frac{1}{r^2}(\cos\theta)^2$ e $y''\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{r^2}(\operatorname{sen}\theta)^2$. Daí,

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{1}{r^2} \tag{10}$$

Vamos agora fazer o que se chama em equações diferenciais de uma *mudança de variável independente*, de t para θ, na equação (9). Ou seja, a partir de (10), vamos encontrar uma equação diferencial que seja satisfeita não pela função $r(t)$ mas pela função $\tilde{r}(\theta) = r(t(\theta))$. Frequentemente a distinção entre r e $\tilde{r}$ é omitida. Embora na linguagem moderna r e $\tilde{r}$ sejam funções diferentes, ambas "são" a distância do planeta ao sol, só que expressa *em função de variáveis independentes distintas.* Ainda hoje essa nomenclatura é quase que universalmente aceita em ciência ou matemática aplicada.

Como já fizemos na demonstração da Proposicão 2, vamos denotar com uma linha tanto a derivada de uma função em relação a t quanto em relação a θ. Afinal, para saber o que é a derivada de uma função, o nome que se dá à variável dela é irrelevante. Na literatura de física, o costume é denotar r' por $\dot{r}$ e $\tilde{r}'$ por $\frac{dr}{d\theta}$. Essa notação é também usada em [1].

Calculemos, usando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\tilde{r}(\theta)} = -\frac{1}{\tilde{r}(\theta)^2}\frac{d}{d\theta}r(t(\theta)) = -\frac{1}{\tilde{r}(\theta)^2}\,r'(t(\theta))\,t'(\theta) = -\frac{1}{\tilde{r}(\theta)^2}\,r'(t(\theta))\,\frac{1}{\theta'(t(\theta))}. \tag{11}$$

Nesta última passagem, usamos o teorema da função inversa do Cálculo 1. Segue de (7) que

$$\tilde{r}(\theta)^2\,\theta'(t(\theta)) = r(t(\theta))^2\,\theta'(t(\theta)), \quad \theta \in J,$$

é uma função constante. Chamemos essa constante de k. Continuamos a supor que $\theta'(t) > 0$ para todo $t \in I$, de modo que $k > 0$. [3] Segue então de (11) que

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\tilde{r}(\theta)} = -\frac{r'(t(\theta))}{k}$$

Derivando mais uma vez em relação a θ, vem

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\tilde{r}(\theta)} = -\frac{r''(t(\theta))}{k}\,t'(\theta) = -\frac{r''(t(\theta))}{k\,\theta'(t(\theta))}.$$

e, portanto,

$$r''(t(\theta)) = -k\,\theta'(t(\theta))\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\tilde{r}(\theta)}$$

Fazendo a mudança de variável $t = t(\theta)$ em (10) e usando esta fórmula que acabamos de obter para $r''(t(\theta))$, vem:

$$k\,\theta'(t(\theta))\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\tilde{r}(\theta)} + \tilde{r}(\theta)\,\theta'(t(\theta))^2 = \frac{1}{\tilde{r}(\theta)^2}.$$

Dividindo por $k\,\theta'(t(\theta))$ e usando que $k = r^2\theta'$, vem

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{k^2}.$$

Defina $f(\theta) = \frac{1}{\tilde{r}(\theta)}$, $\theta \in J$. A função f satisfaz a equação diferencial linear

$$f'' + f = \frac{1}{k^2} \tag{12}$$

Qualquer solução de (12) é da forma (ver [2, Capítulo 3])

$$f(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{k^2},$$

A e θ_0 constantes.

[3] $k = L/m$, sendo L o momento angular escalar do planeta em relação à origem e m é sua massa

Agora que não vamos mais usar a regra da cadeia, podemos omitir o til em $\tilde{r}$.

A Primeira Lei de Kepler, que afirma que *a trajetória de um planeta em torno do sol é uma elipse com foco no sol*, decorre da seguinte proposição.

Proposição 3. *Seja $(x(t), y(t))$ uma solução limitada de (5). A imagem da curva parametrizada $(x(t), y(t))$ consiste de uma elipse com um dos focos na origem.*

Demonstração: Mostramos que se $(x(t), y(t))$ é uma solução de (5), a imagem da curva parametrizada $(x(t), y(t))$ consiste de um conjunto de pontos (x, y) cujas coordenadas polares (r, θ) satisfazem a equação

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{k^2}$$

A e θ_0 constantes arbitrárias. Para provar que uma curva limitada representada por essa equação é uma elipse com um dos focos na origem, podemos fazer uma rotação dos eixos coordenados e supor que $\theta_0 = 0$. Substituindo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos\theta = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = A\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{k^2},$$

daí,

$$k^4(1 - Ax)^2 = x^2 + y^2.$$

Completando quadrados, vemos que esta é a equação de uma elipse se $|A|k^2 < 1$, de uma parábola se $|A|k^2 = 1$ e de uma hipérbole se $|A|k^2 > 1$.

No Apêndice 2, mostramos que, se $|A|k^2 < 1$, a equação

$$r = \frac{1}{\frac{1}{k^2} + A\cos\theta}$$

representa, em coordenadas polares, uma elipse com um dos focos na origem. $\square$.

A Terceira Lei de Kepler.

Ajuste necessário para levar em conta o movimento do Sol.

Apêndice 1 - Cálculo Vetorial

Dados $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, defina

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad (i,j,k) \in \{(1,2,3),(3,1,2),(2,3,1)\} \\ -1, & \text{se} \quad (i,j,k) \in \{(2,1,3),(1,3,2),(3,2,1)\} \\ 0, & \text{se} \quad \{i,j,k\} \neq \{1,2,3\} \end{cases}.$$

O *produto vetorial* de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ em $\mathbb{R}^3$ é o vetor $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ cuja i-ésima coordenada é

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} x_j y_k.$$

Para simplificar a notação, vamos adotar a seguinte convenção: sempre que em um produto houver dois subscritos repetidos, entende-se que cada letra repetida é o índice de um somatório de 1 até 3. Assim podemos reescrever a equação acima como

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k.$$

Proposição 4. *Para todos* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$*, temos* $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$*.*

Demonstração: Segue da definição de ϵ_{ijk} que $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$, para todo (i, j, k). Daí

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k = -\epsilon_{ikj} y_k x_j = -\epsilon_{ilm} y_l x_m = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})_i,$$

para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ (na penúltima passagem, só mudamos o nome dos índices dos somatórios). □

Corolário 1. *Para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$*,* $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$*.*

Demonstração: Segue da Proposição anterior que $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{x}$. □

Exercício 1. *Mostre que o produto vetorial não é associativo.*

O *produto escalar* de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ em $\mathbb{R}^3$ é o número real

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.$$

Usando a convenção dos subscritos repetidos, podemos escrever $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i$. É óbvio que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Proposição 5. *Para todos* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$*, temos*

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$$

Demonstração: Segue da definição de ϵ_{ijk} que $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, para todo (i, j, k).

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = x_i \epsilon_{ijk} x_j y_k = \epsilon_{ijk} x_i x_j y_k = -\epsilon_{jik} x_j x_i y_k = -x_j \epsilon_{jik} x_i y_k = -x_j \epsilon_{jlm} x_l y_m = -\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}).$$

Logo $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$. Desta igualdade, trocando os papeis de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ e usando que o produto escalar é comutativo, segue que $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$. □

Dados $i, j \in \{1, 2, 3\}$, defina

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Usando a convenção dos subscritos repetidos, podemos escrever $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \delta_{ij} x_i y_j$.

Proposição 6. *Dados* $j, k, l, m \in \{1, 2, 3\}$*, temos*

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

Demonstração: Se $i = j$ ou $l = m$, os dois membros da igualdade que queremos demonstrar são nulos. Se $i \neq j$ e $l \neq m$, ocorre um e apenas um dos três casos seguintes:

(1) Para todo $k \in \{1,2,3\}$, k é igual a j, a k, a j ou a m.
(2) $i = l$ e $j = m$.
(3) $i = m$ e $j = l$.

No caso (1), os dois membros são nulos. No caso (2), os dois membros são iguais a 1. No caso (3), os dois membros são iguais a -1. $\square$

A seguinte proposição é usada na demonstração de que o movimento de uma partícula submetida a um campo de forças central está contido em um plano.

Proposição 7. *Para todos* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, *temos*

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x}. \tag{13}$$

Demonstração: Usando a convenção dos subscritos repetidos, segue das definições que a i-ésima componente do primeiro membro de (13) é dada por

$$[(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}]_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}x_l y_m z_k$$

Por outro lado,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}x_l y_m z_k = \epsilon_{kij}\epsilon_{jlm}x_l y_m z_k = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})x_l y_m z_k =$$

$$x_k y_i z_k - x_i y_k z_k = (x_k z_k)y_i - (y_k z_k)x_i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})y_i - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})x_i$$

A primeira desta série de igualdades decorre do fato de que $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$; a segunda, da Proposição 6; a terceira, da definição de δ_{pq}; a última da definição do produto escalar. O último termo obtido é a i-ésima componente do segundo membro de (13). $\square$

Continuaremos a usar a convenção dos subscritos repetidos até o resto deste apêndice.

Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derivável, o *gradiente* de f é a aplicação $\texttt{grad}\, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja i-ésima componente $(\texttt{grad}\, f)_i$, $i = 1,2,3$, é igual à derivada parcial de f em relação a i-ésima coordenada de $\mathbb{R}^3$,

$$(\texttt{grad}\, f)_i = \partial_i f, \quad i = 1,2,3.$$

Dada $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derivável, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, o *rotacional* de $\mathbf{F}$ é a aplicação $\texttt{rot}\, F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja i-ésima componente, $i = 1,2,3$, é dada por

$$(\texttt{rot}\, \mathbf{F})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j F_k.$$

O *divergente* de $\mathbf{F}$ é a aplicação $\texttt{div}\, \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\texttt{div}\, F = \partial_i F_i.$$

Exercício 2. *Considere* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de classe* C^2.
Mostre que: (*a*) $\texttt{rot}\,(\texttt{grad}\, f) = 0$ *e* (*b*) $\texttt{div}\,(\texttt{rot}\, \mathbf{F}) = 0$.

A sucessão de aplicações (verifique que elas são lineares)

$$0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) \stackrel{\texttt{grad}}{\longrightarrow} C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \stackrel{\texttt{rot}}{\longrightarrow} C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \stackrel{\texttt{div}}{\longrightarrow} C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

é o chamado *complexo de De Rham* em $\mathbb{R}^3$.

Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ possuindo derivadas de segunda ordem, o *laplaciano* de f é a aplicação $\Delta f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\Delta f = \partial_j \partial_j f$.

Dada $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ possuindo derivadas de segunda ordem, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, o *laplaciano* de $\mathbf{F}$ é a aplicação $\Delta\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja i-ésima componente, $i = 1,2,3$, dada por $(\Delta\mathbf{F})_i = \Delta F_i$.

A seguinte identidade vetorial é usada para provar, a partir das equações de Maxwell, que o campo elétrico e o campo magnético no vácuo satisfazem a equação da onda.

Exercício 3. *Dada* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de classe* C^2*, mostre que*

$$\texttt{rot}\,(\texttt{rot}\,\mathbf{F}) = \texttt{grad}\,(\texttt{div}\,\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}.$$

Apêndice 2 - Coordenadas Polares

Denotamos por $\mathbb{R}^+$ o intervalo aberto $(0,\infty)$.

Segue das propriedades elementares das funções trigonométricas que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

é sobrejetora e que $P(r_1,\theta_1) = P(r_2,\theta_2)$ se e somente se $r_1 = r_2$ e $\theta_1 - \theta_2$ é um múltiplo inteiro de 2π. Além disso, P é uma função de classe C^∞.

Para cada $\theta_0 \in \mathbb{R}$, a restrição de P a $\mathbb{R}^+ \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ é uma bijeção. Denotaremos essa restrição por P_{θ_0}. A inversa de P_{θ_0} entretanto é descontínua na semi-reta $\{(r\cos\theta_0, r\,\mathrm{sen}\,\theta_0);\ r > 0\}$, que é a imagem de $\mathbb{R}^+ \times \{\theta_0\}$. Jogando fora essa semi-reta problemática do contradomínio, a restrição de P a $\mathbb{R}^+ \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ torna-se um *difeomorfismo* (isto é, uma bijeção de classe C^∞ com inversa C^∞). Esta afirmação, que pode ser demonstrada com técnicas de trigonometria e do Cálculo 1, decorre também do Teorema da Função Inversa do Cálculo 5.

Área em coordenadas polares.

Dados $\theta_1 < \theta_2$, $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, e uma função não-negativa f de classe C^1 definida em $[\theta_1, \theta_2]$, considere a região

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [\theta_1, \theta_2];\ 0 \le r \le f(\theta)\}.$$

Seja $\tilde{D}$ a imagem de D sob a ação da aplicação P, isto é,

$$\tilde{D} = \{(x,y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta);\ (r,\theta) \in D\}$$

A área de $\tilde{D}$ pode ser calculada em termos de θ_1, θ_2 e f usando a fórmula de mudança de variáveis para integrais duplas. Para isso, calculemos o determinante do jacobiano de P,

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

Daí, a área de $\tilde{D}$ é dada por

$$\int_{\tilde{D}} dx\, dy = \int_D r\, dr\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{f(\theta)} r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2\, d\theta.$$

Equação da elipse em coordenadas polares.

Consideremos uma elipse E com focos em $(0,0)$ e $(0,2c)$ e eixo maior $2a$, $a > c$. Se $(x,y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \in E$, $|\theta| < \pi$, então temos, pela lei dos cossenos e pela definição de elipse,

(14) $$\sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr\cos\theta} = 2a - r.$$

Elevando ao quadrado os dois membros e isolando r, vem:

(15) $$r = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\theta}$$

Reciprocamente, se vale (15) e $a > c$, então

$$r = \frac{a-c}{a - c\cos\theta}\,(a+c) \leq a + c < 2a$$

e (15) implica (14). Ou seja, (15) é a equação de E em coordenadas polares.

Sejam agora $A < 0$ e $k > 0$ reais tais que $|A|k^2 < 1$ e seja E o conjunto dos pontos do planos cujas coordenadas polares satisfazem

(16) $$r = \frac{1}{\frac{1}{k^2} + A\cos\theta}$$

O sistema de equações em a e c

$$\frac{1}{k^2} = \frac{a}{a^2 - c^2}, \quad A = -\frac{c}{a^2 - c^2}$$

possui uma única solução, a saber,

$$a = \frac{k^2}{1 - A^2k^4}, \quad c = -\frac{Ak^4}{1 - A^2k^4}.$$

Logo, a equação (16) representa uma elipse com um dos focos na origem e o outro no semi-eixo das abscissas positivas.

Analogamente demonstra-se que, dados A e k positivos com $Ak^2 < 1$, (16) é a equação em coordenadas polares uma elipse com um dos focos na origem e o outro no semi-eixo das abscissas negativas.

Finalmente, se $A = 0$, (16) é a equação do círculo centrado na origem e raio k, que é um caso degenerado de elipse com um foco na origem.

Referências

[1] Djairo de Figueiredo e Aloísio Neves, Equções Diferenciais Aplicadas, IMPA, 1998.

[2] Kreider, Kuller e Ostberg, Equações Diferenciais, Editora da USP, 1972.