EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA EQUAÇÕES EXATAS

Teorema da Função Implícita. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $(x_0, y_0) \in U$, $\psi \in C^1(U)$. Suponha que $\psi(x_0, y_0) = C$ e $\psi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Então existem intervalos abertos $I \ni x_0$ e $J \ni y_0$, $I \times J \subseteq U$, tais que

$$\forall x \in I,\ \exists!\, y = y(x) \in J,\ \psi(x, y(x)) = C.$$

Além disso, a função $y : I \to J$ assim definida é de classe C^1 e satisfaz $y(x_0) = y_0$.

Proposição 1. *A função $y : I \to J$ definida no enunciado dado acima do Teorema da Função Implícita é a única função contínua de I em $\mathbb{R}$ tal que $y(x_0) = y_0$ e $\psi(x, y(x)) = C$ para todo $x \in I$.*

Demonstração: Seja $z : I \to \mathbb{R}$ contínua, $z(x_0) = y_0$ e $\psi(x, z(x)) = C$ para todo $x \in I$. Defina

$$A = \{x \in I;\ z(x) = y(x)\}.$$

Então temos:

- $A \neq \emptyset$. [$x_0 \in A$.]
- $\forall x_1 \in A$, $\exists$ intervalo aberto $\tilde{I} \ni x_1$, $\tilde{I} \subseteq z^{-1}(J) \subseteq A$, sendo J o intervalo aberto cuja existência é garantida pela versão do Teorema da Função Implícita enunciada acima. [(i) $\exists \tilde{I} \ni x_1$, $\tilde{I} \subseteq z^{-1}(J)$ porque z é contínua em x_1. (ii) Segue do TFI que, $\forall x \in I$, $\exists!$ $y = y(x) \in J$ tal que $\psi(x, y(x)) = C$. Mas $\psi(x, z(x)) = C$ e $z(x) \in J$ se $x \in \tilde{I} \subseteq I$. Logo $z(x) = y(x)$ e portanto $x \in A$.]
- Se $x_n \in A$ e $x_n \to x \in I$, então $x \in A$. [$z(x_n) \to z(x)$ e $y(x_n) \to y(x)$.]

A demonstração da Proposição segue agora do lema seguinte. $\square$

Lema 1. *Seja I um intervalo aberto e seja $A \subseteq I$ satisfazendo: (i) $A \neq \emptyset$, (ii) $\forall x_1 \in A$, $\exists$ intervalo aberto $\tilde{I}$, $x_1 \in \tilde{I} \subseteq A$ e (iii) se $x_n \in A$ e $x_n \to x \in I$, então $x \in A$. Então $A = I$.*

Demonstração: Suponha que existam $x_1 \in A$ e $x_2 \in I \setminus A$, $x_1 < x_2$. Defina $S = \{y \in I;\ [x_1, y] \subseteq A\}$ e $\beta = \sup S$. Temos que x_2 é cota superior de S, pois $x_2 \notin A$. Logo $\beta \leq x_2$. Tome $y_n \in S \subseteq A$, $y_n \to \beta$. Segue de (iii) que $\beta \in A$. Daí segue de (ii) que existe $z > \beta$, $z \in A$. Logo β não é cota superior de S. Por absurdo, provamos que não existem $x_1 \in A$ e $x_2 \in I \setminus A$, $x_1 < x_2$.

Analogamente, demonstra-se que não existem $x_1 \in A$ e $x_2 \in I \setminus A$, $x_1 > x_2$. Então ou $A = I$ ou $A = \emptyset$. Segue de (i) que $A = I$. $\square$

Segue facilmente agora o teorema de existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial para equações exatas:

Teorema 1. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $(x_0, y_0) \in U$, $M, N \in C(U)$, $N(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in U$. Suponha que existe $\psi \in C^1(U)$ tal que $\psi_x = M$, $\psi_y = N$. Então existe um intervalo aberto $I \ni x_0$ e uma única função $y \in C^1(U)$ tal que*

$$y(x_0) = y_0, \quad (x, y(x)) \in U \text{ e } y'(x) = -\frac{M(x, y(x))}{N(x, y(x))} \text{ para todo } x \in I.$$

Demonstração: Segue do Teorema da Função Implícita e da Proposição que existem um intervalo aberto $I \ni x_0$ e uma única função $y \in C^1(I)$ tal que

$$y(x_0) = y_0, \quad (x, y(x)) \in U \text{ e } \psi(x, y(x)) = \psi(x_0, y_0) \text{ para todo } x \in I.$$

Segue da regra da cadeia que

$$\psi_x(x, y(x)) \,+\, \psi_y(x, y(x))\, y'(x) \,=\, M(x, y(x)) \,+\, N(x, y(x))\, y'(x) = 0,$$

ou seja, $y'(x) = -M(x, y(x))/N(x, y(x))$, para todo $x \in I$.

Reciprocamente, se $z \in C(I)$ satisfaz $z(x_0) = y_0$ e $z'(x) = -M(x, z(x))/N(x, z(x))$, para todo $x \in I$, então

$$0 \,=\, M(x, z(x)) \,+\, N(x, z(x))\, z'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x, z(x)) = 0$$

e portanto

$$\psi(x, y(x)) = \psi(x_0, y_0) \text{ para todo } x \in I,$$

e portanto $y(x) = z(x)$ em I. $\square$