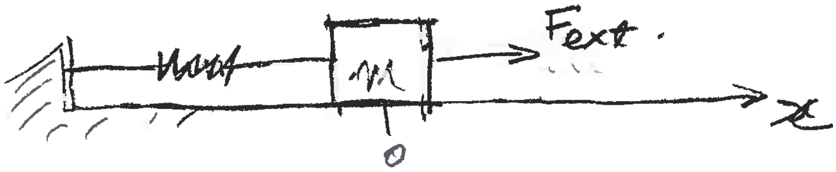
Ressonância

Exemplo 1. "O sistema massa-mola sem atrito e com força externa".



$$F = -kx + F_{ext} = ma = mx''$$

$$mx'' + kx = F_{ext} \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Solução geral de $mx'' + kx = 0$:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \alpha)$$

$A > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

constante

Suponha que $F_{ext}(t) = F\cos\omega t$, $\omega \neq \omega_0$

O "método dos coeficientes a determinar" garante que existem únicos c_1 e c_2 tais que

$$x_p(t) = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t$$

é solução particular de (1). Seja L o operador $Lx = mx'' + kx$. Então

$$L(\cos\omega t) = (-m\omega^2 + k)\cos\omega t$$

$$L(c_1\cos\omega t) = (-m\omega^2 + k)c_1\cos\omega t = F\cos\omega t$$

$$\Longleftrightarrow c_1 = \frac{F}{k - m\omega^2} = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (c_2 = 0)$$

Daí, a solução geral de (1) é

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\frac{1}{m}\cos\omega t}$$

$x(t)$ é a superposição de uma "cossenóide" de amplitude A com uma cossenóide de amplitude $\frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$. Note que a amplitude da segunda cossenóide tende a infinito quando a frequência da força externa ω tende à frequência natural de oscilação do sistema ω_0. Isto é o que se chama "ressonância".

—x—

Se a força externa for $F_{ext}(t) = F\cos\omega_0 t$, $L(F_{ext}) = 0$. O método dos coeficientes a determinar garante que existe uma única solução particular da forma

$$x_p(t) = c_1 t\cos\omega_0 t + c_2 t \operatorname{sen}\omega_0 t$$

Calculemos: $L(t\operatorname{sen}\omega_0 t) =$ $\quad (k = \omega_0^2 m)$

$= m(t\operatorname{sen}\omega_0 t)'' + m\omega_0^2(t\operatorname{sen}\omega_0 t)$

$= m.2.\omega_0\cos\omega_0 t - m\omega_0^2 t\operatorname{sen}\omega_0 t + m\omega_0^2 t\operatorname{sen}\omega_0 t$

$= 2m\omega_0\cos\omega_0 t$

Logo $L(c_2 t\operatorname{sen}\omega_0 t) = 2c_2 m\omega_0\cos\omega_0 t = F\cos\omega_0 t$

$\Leftrightarrow c_2 = \frac{F}{2m\omega_0}$ $\quad (c_1 = 0)$

Solução geral de (1):

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F}{2m\omega_0}\, t\, \mathrm{sen}(\omega_0 t).$$

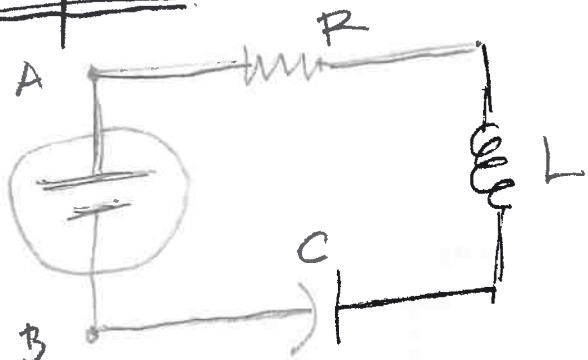
$A > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Note que, para $t_k = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\frac{\pi}{\omega_0}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k) = +\infty$$

Ou seja, quando a frequência externa é igual à frequência natural do sistema, a solução torna-se ilimitada.

Exemplo 2 "O circuito RLC"



R, L, C constantes positivas

A diferença de potencial entre A e B é determinada pela fonte de tensão $\frac{|}{T}$ e será denotada por V_{ext}. A diferença de potencial entre os extremos do resistor é Ri. A diferença de potencial nos extremos de indutância é $L\frac{di}{dt}$. A d-de-p no capacitor é $\frac{q}{C}$, sendo q a armazenada no capacitor, e $i = \frac{dq}{dt}$. Daí:

$$L q'' + R q' + \frac{1}{C} q = V_{ext} \quad (2)$$

Suponha que $V_{ext}(t) = V \operatorname{sen} \omega t$.

O método dos coeficientes a determinar garante que há apenas uma solução particular da forma

$$q_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

Substituindo na equação (2), determinam-se c_1 e c_2. Definido $\gamma = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, $Z^2 = R^2 + \gamma^2$, e α por $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\gamma}{Z}$ e $\cos \alpha = \frac{R}{Z}$, vem:

$$\boxed{q_p(t) = -\frac{V}{\omega Z} \cos(\omega t - \alpha)}$$

Qualquer solução de $L q'' + R q' + \frac{1}{C} q = 0$ tende a zero exponencialmente quando $t \to \infty$ (pois $L, R, C > 0$). Logo, para t suficientemente grande, qualquer solução de (2) fica arbitrariamente próxima de $q_p(t)$, chamada de "solução estacionária" de (2).

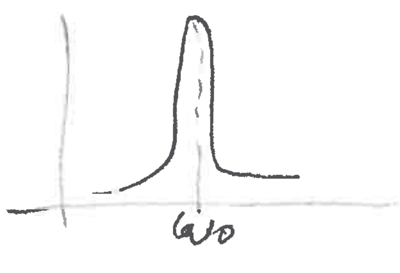
A corrente $i = \frac{dq}{dt}$ que passa pelo circuito, no "regime estacionário" é portanto dada por $i_s(t) = \frac{V}{Z} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha)$

A diferença de potencial ("estacionária") nos extremos do resistor é $V_R(t) = R\, i_s(t) = V \frac{R}{Z} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha)$

$$\frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \gamma^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Ou seja, a razão $\frac{\text{amplitude de } V_{ext}}{\text{amplitude de } V_R} = f(\omega)$.

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ assume máximo em $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Esta é a "frequência de ressonância". Esta ressonância é "benigna" pois o circuito funciona então como um "filtro de frequência" (que é usado em rádio AM). Dependendo da escolha de R, L, C, f pode ter um gráfico assim:



De modo que se V_{ext} for uma superposição de senóides de diferentes frequências, apenas a senóide de frequência ω_0 é "filtrada".

~~A pode ser medida nos extremos do resistor.~~

No rádio AM, V_{ext} é uma combinação linear de senoides emitidas pelas estações de rádio que podem ser captada no local. O "botão de frequência" faz variar ω_0. A diferença de potencial entre os extremos do resistor é enviada a um amplificador e transformada em som.

Esta é uma versão simplificada da história toda. Mas ilustra o papel do circuito R-L-C como "filtro de frequência"