MAT 226 - Equações Diferenciais I

3^a Prova - 28 de novembro de 2019

Questão 1) (2 pts) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Resolva o pvi $X' = AX$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Esboce o gráfico da curva parametrizada encontrada no item (a).

Questão 2) (3 pts) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Seja X a solução pvi $X' = AX$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mostre que $\lim_{t \to -\infty} \|X(t)\| = 0$ e $\lim_{t \to +\infty} \|X(t)\| = +\infty$.

(b) Mostre que, para todo $\delta > 0$, existe $X_0 \in \mathbb{R}^3$, $\|X_0\| < \delta$, tal que a solução do pvi $X' = AX$, $X(0) = X_0$, satisfaz $\sup_{t \geq 0} \|X(t)\| = +\infty$.

Questão 3) (2,5 pts)

Sejam A e B matrizes quadradas reais tais que $AB = BA$. Mostre que $e^A e^B = e^B e^A$.

Questão 4) (2,5 pts) Considere o sistema $\begin{cases} \theta' &= \nu \\ \nu' &= -\sin\theta \end{cases}$ e a função $E(\theta, \nu) = \frac{1}{2}\nu^2 - \cos\theta$.

(a) Mostre que, se $(\theta(t), \nu(t))$, $t \in I$, é uma solução do sistema, então $E(\theta(t), \nu(t))$, $t \in I$, é uma função constante.

(b) Seja $(\theta(t), \nu(t))$ a solução do sistema que satisfaz $(\theta(0), \nu(0)) = (0, 4)$. Mostre que $\theta(t) \geq 2\sqrt{3}t$, $t \geq 0$.