MAT 226 - Equações Diferenciais I - IME - USP

2^a Prova - 24 de outubro de 2019

Questão 1) Considere $y_1(x) = e^x \cos x$, $y_2(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $y_3(x) = 1$, $y_4(x) = x$, $y_5(x) = x^2$. Mostre que $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ é linearmente independente.

Solução 1. Basta verificar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $W(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)(x_0) \neq 0$. Temos

$$
\begin{aligned}
W(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)(x) &= \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) & y_5(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y_4'(x) & y_5'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y_4''(x) & y_5''(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y_4'''(x) & y_5'''(x) \\ y_1''''(x) & y_2''''(x) & y_3''''(x) & y_4''''(x) & y_5''''(x) \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 1 & x & x^2 \\ y_1'(x) & y_2'(x) & 0 & 1 & 2x \\ y_1''(x) & y_2''(x) & 0 & 0 & 2 \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & 0 & 0 & 0 \\ y_1''''(x) & y_2''''(x) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= -2 \det \begin{bmatrix} y_1'''(x) & y_2'''(x) \\ y_1''''(x) & y_2''''(x) \end{bmatrix} \\
&= -2 \det \begin{bmatrix} -2e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) & 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \\ -4e^x \cos x & -4e^x \operatorname{sen} x \end{bmatrix} \\
&= -16e^{2x} \det \begin{bmatrix} \cos x + \operatorname{sen} x & -\cos x + \operatorname{sen} x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{bmatrix} \\
&= -16e^{2x} \big(\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) + 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) \big)
\end{aligned}
$$

e portanto $W(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)(0) = 16 \neq 0$.

Solução 2. Em primeiro lugar, provemos que $\{y_1, y_2\}$ é LI. Para tanto, tomemos constantes c_1 e c_2 tais que $c_1 y_1 + c_2 y_2$ é a função identicamente nula. Então

$$c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x = 0 \text{ para todo } x.$$

Suponhamos que o domínio das funções é [1] $\mathbb{R}$. Fazendo $x = 0$ e depois $x = \pi/2$ na equação precedente, vem que $c_1 = 0$ e $e^{\pi/2}c_2 = 0$, logo $c_1 = c_2 = 0$ e portanto $\{y_1, y_2\}$ é LI.

Seja V o espaço vetorial gerado por $\{y_1, y_2\}$ e considere o operador linear $D : V \to V$ definido por $Dy = y'$. Temos que $Dy_1 = y_1 - y_2$ e $Dy_2 = y_1 + y_2$. Logo D é um isomorfismo. Logo $D^3 : V \to V$, $D^3 y = y'''$ também é um isomorfismo, pois é uma composição de isomorfismos.

Sejam agora $c_1, \cdots, c_5$ constantes tais que

$$c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 + c_5y_5 = 0$$

Apliquemos D^3 na equação acima. $D^3(c_3y_3 + c_4y_4 + c_5y_5) = 0$, pois $c_3y_3 + c_4y_4 + c_5y_5$ é um polinômio de grau menor ou igual a 2. Logo $D^3(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$. Como D^3 restrito a V é um isomorfismo, $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$. Como $\{y_1, y_2\}$ é LI, $c_1 = c_2 = 0$. Daí, $c_3 + c_4x + c_5x^2$ é o polinômio nulo, logo $c_3 = c_4 = c_5 = 0$. Isto prova que $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ é LI.

Questão 2) Considere $X = C([1, 2])$ munido da métrica $d(\phi, \psi) = \max\{|\phi(x) - \psi(x)|;\ 1 \leq x \leq 2\}$. Considere $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{x}$, $x > 0$. Defina $\mathcal{F} : X \to X$ por

$$[\mathcal{F}(\phi)](x) \;=\; 1 + \int_1^x f(t, \phi(t))\, dt$$

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ é uma contração.

(b) Determine o ponto fixo de $\mathcal{F}$.

Solução. (a) Dadas $\phi, \psi \in X$, para todo $x \in [1, 2]$, temos

$$[\mathcal{F}(\phi)](x) - [\mathcal{F}(\psi)](x) = \int_1^x \left[\frac{2t - \phi(t)}{t} - \frac{2t - \psi(t)}{t}\right] dt = \int_1^x \frac{\phi(t) - \psi(t)}{t}\, dt;$$

logo,

$$|\,\mathcal{F}(\phi)(x) - \mathcal{F}(\psi)(x)\,| \leq \int_1^x \frac{|\phi(t) - \psi(t)|}{t}\, dt \leq d(\phi, \psi) \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \leq d(\phi, \psi) \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = (\log 2) d(\phi, \psi)$$

Como $\log 2 < 1$, isto prova que (F) é uma contração.

(b) O teorema do ponto fixo de Banach garante a existência de um único $y \in C([1, 2])$ verificando $\mathcal{F}(y) = y$, isto é, y satisfaz $y(x) = 1 + \int_1^x \frac{2t - y(t)}{t}\, dt$. Isto é o mesmo que dizer que y é solução do problema de valor inicial

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{2x - y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

[1] Este mesmo argumento funciona se o domínio considerado for um intervalo que contenha um ponto no qual o seno se anula e um outro ponto no qual o seno não se anula.

Assim, para determinar o ponto fixo de $\mathcal{F}$, basta resolver (1). Tal equação diferencial é equivalente a $xy' + y = 2x$, cujo lado direito é $(xy)'$. Então y deve satisfazer $xy(x) = x^2 + c$, para um oportuno $c \in \mathbb{R}$. Impondo a condição inicial $y(1) = 1$, concluímos que o ponto fixo de $\mathcal{F}$ é $y(x) = x$.

Questão 3) Sejam a e b constantes positivas. Mostre que, se $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$y''' + ay'' + by' = 0,$$

então existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to\infty} y(x) = L$.

Solução. A equação associada é $\lambda(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$ e tem raízes $\lambda_0 = 0$, $\lambda_+ = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ e $\lambda_- = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

Se $a^2 - 4b > 0$, temos $-a \pm \sqrt{a^2 - 4b} < 0$ (lembre que $b > 0$) e portanto $\lambda_+ < 0$ e $\lambda_- < 0$. Neste caso, existirão constantes $c_0, c_+, c_- \in \mathbb{R}$ tais que

$$y(x) = c_0 e^{\lambda_0 x} + c_+ e^{\lambda_+ x} + c_- e^{\lambda_- x} = c_0 + c_+ e^{\lambda_+ x} + c_- e^{\lambda_- x},$$

donde concluímos que $\lim_{x\to\infty} y(x) = c_0$.

Se $a^2 - 4b = 0$, então $\lambda_+ = \lambda_- = -\frac{a}{2} < 0$. Sendo $-\frac{a}{2}$ uma raiz dupla, existirão constantes c_0, c_1, c_2 tais que

$$y(x) = c_0 e^{\lambda_0 x} + c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x} = c_0 + c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x},$$

donde concluímos, usando a regra de L'Hôpital, que $\lim_{x\to\infty} y(x) = c_0$.

Se $a^2 - 4b < 0$, escolhemos $r > 0$ tal que $(ir)^2 = a^2 - 4b$ e obtemos $\lambda_+ = \frac{-a+ri}{2}$ e $\lambda_- = \frac{-a-ri}{2}$. Neste caso, existirão constantes $c_1, c_+, c_- \in \mathbb{R}$ tais que

$$y(x) = c_1 + c_+ e^{-ax/2} \cos(rx) + c_- e^{-ax/2} \operatorname{sen}(rx),$$

e também podemos concluir que $\lim_{x\to\infty} y(x) = c_1$.

A conclusão é que o limite $\lim_{x\to\infty} y(x)$ sempre existe.

Questão 4) Sejam $V = \{y \in C^2([0, 2\pi]);\ y'(0) = y'(2\pi) = 0\}$, $W = C([0, 2\pi])$.
Considere $L : V \to W$, $Ly = y'' + y$.
(a) Mostre que $f \in W$ pertence à imagem de L se e somente se $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos t\, dt = 0$.
(b) Mostre que a dimensão do núcleo de L é igual a 1.

Solução. Dizer que $f \in W$ é um elemento da imagem de L é equivalente e dizer que o problema a seguir admite solução

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y'(0) = y'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Pelo método da variação dos parâmetros, a equação diferencial $y'' + y = f(x)$ tem solução geral da forma

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x) + \int_0^x \operatorname{sen}(x - t) f(t)\, dt\,.$$

Derivando:

$$y'(x) = -c_1 \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(x) + \int_0^x \cos(x - t) f(t)\, dt\,,$$

de modo que $y'(0) = c_2$ e $y'(2\pi) = c_2 + \int_0^{2\pi} \cos(2\pi - t) f(t)\, dt$. Assim, toda solução da equação diferencial $y'' + y = f(x)$ satisfaz

$$y'(2\pi) = y'(0) + \int_0^{2\pi} \cos(t) f(t)\, dt\,.$$

Para que tais soluções sejam elementos de V (o domínio do operador L), devemos impor as condições $y'(0) = y'(2\pi) = 0$, concluindo que $f \in W$ pertence à imagem de L se, e somente se, f verifica $\int_0^{2\pi} \cos(t) f(t)\, dt = 0$.

O núcleo de L é formado pelas soluções do problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y'(0) = y'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

A solução geral de $y'' + y = 0$ é da forma $y(x) = c_1 \cos(c) + c_2 \operatorname{sen}(x)$ e tem derivada $y'(x) = -c_1 \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(x)$, e portanto satisfaz $y'(0) = y'(2\pi) = c_2$. Assim, uma tal y pertence ao núcleo de L se, e só se, $c_2 = 0$. Logo, $Ly = 0$ se e só se $y(x) = c \cos(x)$ para algum $c \in \mathbb{R}$, de modo que a dimensão do núcleo de L é 1.