Instituto de Matemática e Estatística da USP

MAT 226 - Equações Diferenciais I

Gabarito da 1^a Prova, realizada em 12 de setembro de 2019

Questão 1) (2 pts)

Determine todas as soluções da equação diferencial $xy' + 2y = 1$, explicitando seus domínios.

Solução. Primeiramente, observe que a função constante $y \equiv 1/2$, definida em $\mathbb{R}$, é uma solução. Para $x > 0$, $xy' + 2y = 1$ é equivalente à equação separável $y' = \frac{1-2y}{x}$, cuja solução geral é obtida do modo seguinte:

$$\begin{aligned} y' = \frac{1-2y}{x} &\iff \frac{y'}{1-2y} = \frac{1}{x} \\ &\iff -\frac{1}{2}\log|1-2y| = \log x + k \\ &\iff |1-2y|^{-1/2} = e^k x \\ &\iff y = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{2}, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Analogamente, para $x < 0$, obtemos soluções com expressões idênticas. Assim, a família de todas as soluções da equação diferencial dada é

$$\{f_c : c \neq 0\} \cup \{g_c : c \neq 0\} \cup \{h\},$$

onde $f_c(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{2}$ são definidas em $(0, \infty)$, $g_c(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{2}$ são definidas em $(-\infty, 0)$ e $h \equiv 1/2$ é definida em $\mathbb{R}$.

Questão 2) (2,5 pts) (a) Mostre que o pvi $\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tem infinitas soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(b) Por que isto não contradiz o teorema de existência e unicidade enunciado em sala?

Solução. (a) A equação diferencial $y' = y^{2/3}$ é separável e é fácil ver que $y(x) = \frac{(x-c)^3}{27}$, $c \in \mathbb{R}$, são algumas de suas soluções, bem como a função identicamente nula $y \equiv 0$. "Colando"essas duas soluções adequadamente, obteremos infinitas soluções para o pvi. Para $c > 0$, considere $y_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$y_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < c \\ \frac{(x-c)^3}{27}, & \text{se } x \geq c \end{cases}$$

que é de classe C^1 e satisfaz o pvi dado. A família $\{y_c : c > 0\}$ é um conjunto infinito de soluções do pvi.

(b) A função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = y^{2/3}$ não é Lipschitz na segunda variável em nenhuma vizinhança da origem, que é uma das hipóteses do teorema de existência e unicidade.

Questão 3) (2,5 pts) Considere o pvi $\begin{cases} y' + \frac{1}{1-x}\, y &= \frac{1}{1-x}\, f(x) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$, sendo $f \in C(-1,1]$ arbitrária.

(a) Resolva o pvi.

(b) Mostre que $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = f(1)$.

Solução. (a)

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{1-x}\, y &= \frac{1}{1-x}\, f(x) \\ y(0) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{1-x} y' + \frac{1}{(1-x)^2}\, y &= \frac{1}{(1-x)^2}\, f(x) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\frac{y}{1-x}\right)' &= \frac{1}{(1-x)^2}\, f(x) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \frac{y}{1-x} = \int_0^x \frac{1}{(1-t)^2}\, f(t)\, dt.$$

Ou seja, a solução do pvi é dada por

$$y(x) = (1-x)\int_0^x \frac{f(t)}{(1-t)^2}\, dt, \quad -1 < x < 1.$$

(b) Para todo $a \in (0,1)$, temos

$$y(x) = (1-x)\int_0^a \frac{f(t)}{(1-t)^2}\, dt + (1-x)\int_a^x \frac{f(t)}{(1-t)^2}\, dt.$$

Temos, para $a < x < 1$,

$$\min_{a\le t\le x} f(t) \int_a^x \frac{1}{(1-t)^2}\, dt \le \int_a^x \frac{f(t)}{(1-t)^2}\, dt \le \max_{a\le t\le x} f(t) \int_a^x \frac{1}{(1-t)^2}\, dt$$

e

$$\int_a^x \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-a}.$$

Segue então do teorema do valor intermediário que existe ξ, $a < \xi < x$, tal que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{(1-t)^2}\, dt = f(\xi)\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-a}\right]$$

e, portanto,

$$(1-x)\int_a^x \frac{f(t)}{(1-t)^2}\, dt = f(\xi)\left(1 - \frac{1-x}{1-a}\right).$$

Daí,

$$|y(x) - f(1)| \leq \left|(1-x)\int_0^a \frac{f(t)}{(1-t)^2}\,dt\right| + |f(\xi) - f(1)| + \max|f|\frac{1-x}{1-a}$$

Dado $\epsilon > 0$, como f é contínua em 1, é possível escolher $a \in (0,1)$ tal que $|f(\xi) - f(1)| < \epsilon$ para todo ξ tal que $a < \xi < 1$. Escolhido e fixado um tal a, temos, para todo $x > a$,

$$|y(x) - f(1)| \leq \epsilon + \left|(1-x)\int_0^a \frac{f(t)}{(1-t)^2}\,dt\right| + \max|f|\,\frac{1-x}{1-a}$$

O limite quando x tende a 1 das duas parcelas à direita da desiguldade acima é 0. Logo, para todo $x > a$ suficientemente próximo de 1, temos $|y(x) - f(1)| \leq 2\epsilon$. Isto prova que $\lim_{x\to 1} y(x) = f(1)$.

Questão 4) (3 pts) Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = f(10) = 0$ e $f(y) > 0$ se $0 < y < 10$.

Seja y a solução do pvi $\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ definida em seu intervalo maximal I.

(a) Mostre que $0 < y(x) < 10$ para todo $x \in I$.

(b) Mostre que $I \supset [0, \infty)$.

(c) Mostre que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 10$.

Solução. (a) Como f é de classe C^1, o teorema de existência e unicidade se aplica. Observe que $y_0 \equiv 0$ e $y_{10} \equiv 10$ são as respectivas soluções dos pvi's

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= 10 \end{cases}$$

pois $f(0) = f(10) = 0$. Assim, o gráfico de y não pode intersectar nenhum dos gráficos de y_0 e de y_{10}. Como y é necessariamente contínua, segue do teorema do valor intermediário que $y(x) \in (0, 10)$ para todo $x \in I$.

(b) Suponha que $[0, \infty) \not\subset I$. Como I é um intervalo aberto, temos $I = (a, b)$ para algum $b > 0$ finito. Além disso, $y'(x) = f(y(x)) > 0$ para todo $x \in I$, de modo que y é estritamente crescente em I. Do item (a), temos que y é limitada, existindo $\lim_{x\to b^-} y(x) = L \in (1, 10]$ (lembre que $y(0) = 1$). Segue da continuidade de f que $\lim_{x\to b^-} y'(x) = f(L)$. Para cada $x \in I$, o teorema do valor médio garante a existência de $\xi \in (x, b)$ tal que

$$\frac{y(x) - L}{x - b} = y'(\xi)$$

Fazendo $x \to b^-$, temos que y tem derivada lateral em b, e esta vale $f(L)$. Assim, poderíamos estender y a uma função contínua definida em $(a, b]$ que satisfaz o pvi, contradizendo a maximalidade de I.

(c) Dado $n \in \mathbb{N}$, o teorema do valor médio fornece $\xi_n \in [n, n+1]$ satisfazendo $y'(\xi_n) = y(n+1) - y(n)$. Fazendo $n \to \infty$, obtemos $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = L - L = 0$, donde $f(L) = 0$ e portanto $L = 10$.