MAT 320 - Introdução à Análise Complexa - Turma 42
1^a Prova - 15 de março de 2019

Questão 1) Escreva na forma $a + bi$, a e b reais, o número complexo dado.

$$\text{(a)} \left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^5 \qquad\qquad \text{(b)}\ 1 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 3e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

`Solução:` (a)

$$\frac{2+2i}{1-i} = \frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(2-2)+i(2+2)}{1+1} = 2i.$$

Logo

$$\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)^5 = (2i)^5 = 32\, i^5 = 32\, i.$$

(b)

$$1 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 3e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 1 + 2(e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}) + e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 1 + 4\cos(\frac{2\pi}{3}) + \cos(\frac{2\pi}{3}) - i\,\mathrm{sen}\,(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Questão 2) Seja $z = x + iy$, x e y reais.
(a) Calcule $z^2 + \overline{z}^2$. (b) Mostre que $z^2 + \overline{z}^2 = 2$ se, e somente se, $x^2 - y^2 = 1$.

`Solução:` (a) $z^2 = (x+iy)(x+iy) = (x^2 - y^2) + 2xyi$, logo $(\overline{z})^2 = \overline{z^2} = (x^2 - y^2) - 2xyi$, logo $z^2 + \overline{z}^2 = 2(x^2 - y^2)$.

(b) Segue de $z^2 + \overline{z}^2 = 2(x^2 - y^2)$ que $z^2 + \overline{z}^2 = 2 \Longleftrightarrow 2(x^2 - y^2) = 2 \Longleftrightarrow (x^2 - y^2) = 1$.

Questão 3) (a) Calcule $(1+2i)^3$ e $(1-2i)^3$. (b) Escreva na forma $a + bi$, a e b reais, todas as raízes cúbicas de $11 + 2i$ e todas as raízes cúbicas de $11 - 2i$.

`Solução:` (a) $(1+2i)^2 = -3 + 4i$, logo $(1+2i)^3 = (-3+4i)(1+2i) = -3 - 8 + 4i - 6i = -11 - 2i$. $(1-2i)^3 = \overline{(1+2i)^3} = -11 + 2i$.

(b) Pelo item a, $11 + 2i = -(1+2i)^3 = (-1-2i)^3$. Logo, uma das raízes cúbicas de $11 + 2i$ é $-1 - 2i$. As demais são o produto dessa raiz cúbica que encontramos por ω e por ω^2, sendo $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e, portanto, $\omega^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Assim, as três raízes cúbicas de $11 + 2i$ são:

$$-1 - 2i,\ (-1-2i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (\frac{1}{2} + \sqrt{3}) + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ e } (-1-2i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (\frac{1}{2} - \sqrt{3}) + i(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Analogamente, segue de $11 - 2i = (-1+2i)^3$ que as três raízes cúbicas de $11 + 2i$ são:

$$-1 + 2i,\ (-1+2i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (\frac{1}{2} + \sqrt{3}) - i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ e } (-1+2i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (\frac{1}{2} - \sqrt{3}) - i(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Questão 4) (a) Encontre todas as soluções do sistema $\begin{cases} z+w &= 22 \\ zw &= 125 \end{cases}$.

(b) Encontre todos os possíveis valores de $u+v$, sabendo que (u,v) satisfaz $\begin{cases} u^3+v^3 &= 22 \\ uv &= 5 \end{cases}$.

`Solução:` (a)

$$\begin{cases} z+w &= 22 \\ zw &= 125 \end{cases} \iff \begin{cases} z+\frac{125}{z} &= 22 \\ z+w &= 22 \end{cases} \iff \begin{cases} z^2-22z+125 &= 0 \\ z+w &= 22 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 11 \pm 2i \\ z+w = 22 \end{cases}$$

Temos portanto duas soluções para o sistema:

$$(z,w) = (11+2i, 11-2i) \quad \text{e} \quad (z,w) = (11+2i, 11-2i).$$

(b) Fazendo $z = u^3$ e $w = v^3$, temos, pelo item a,

$$\begin{cases} u^3+v^3 &= 22 \\ uv &= 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z+w &= 22 \\ zw &= 125 \end{cases} \iff \begin{array}{c} (z,w) = (u^3,v^3) = (11+2i, 11-2i) \\ \text{ou} \\ (z,w) = (u^3,v^3) = (11-2i, 11+2i) \end{array}$$

Ou seja, para que (u,v) seja solução do sistema dado, é necessário (mas não suficiente) que u seja uma raiz cúbica de $11+2i$ e que v seja uma raiz cúbica de $11-2i$, ou vice-versa ($v^3 = 11+2i$ e $u^3 = 11-2i$). Como só estamos interessados na soma $u+v$, podemos então supor que u seja uma raiz cúbica de $11+2i$ e que v seja uma raiz cúbica de $11-2i$. Para que um tal par (u,v) seja solução do sistema dado, é suficiente que $uv = 5$ (lembrando que o fato de u^3v^3 ser igual a 125 não implica necessariamente que uv seja igual a 5).

Na Questão 3, vimos que as raízes cúbicas de $11+2i$ são

$$u_1 = -1-2i, \qquad u_2 = (\frac{1}{2}+\sqrt{3}) + i(1-\frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad \text{e} \qquad u_3 = (\frac{1}{2}-\sqrt{3}) + i(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$$

e que as raízes cúbicas de $11-2i$ são

$$v_1 = -1+2i, \qquad v_2 = (\frac{1}{2}+\sqrt{3}) - i(1-\frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad \text{e} \qquad v_3 = (\frac{1}{2}-\sqrt{3}) - i(1+\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Temos $u_1v_1 = 1+2^2 = 5$, $u_2v_2 = (\frac{1}{2}+\sqrt{3})^2 + (1-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 5$ e $u_3v_3 = (\frac{1}{2}-\sqrt{3})^2 + (1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 5$. Por outro lado, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_3, u_3, v_1 e u_3v_2 não são reais, logo são diferentes de 5.

Concluímos assim que os possíveis valores de $u+v$ são

$$u_1+v_1 = -2 \qquad u_2+v_2 = 1+2\sqrt{3} \qquad u_3+v_3 = 1-2\sqrt{3}.$$

`Contextualização`

A Questão 4 é parte dos cálculos necessários para resolver pelo método de Cardano a equação polinomial $x^3-15x-22=0$. Esse método consiste em procurar soluções da forma $x = u+v$. Substituindo $x = u+v$ em $x^3-15x-22=0$, vem:

$$(u+v)^3 - 15(u+v) - 22 \;=\; u^3+v^3+3uv(u+v) - 15(u+v) - 22 \;=\; (u^3+v^3-22) + 3(u+v)(uv-5) = 0.$$

Ou seja, para que $u+v$ seja raiz do polinômio $x^3-15x-22$ é suficiente que $u^3+v^3 = 22$ e $uv = 5$. Pela Questão 4, os únicos tais valores de $u+v$ são $x_1 = -2$, $x_2 = 1+2\sqrt{3}$ e $x_3 = 1-2\sqrt{3}$. Como o polinômio $x^3-15x-22$ tem grau três, x_1, x_2 e x_3 são todas suas raízes; afirmação que pode ser comprovada pela identidade

$$x^3-15x-22 \;=\; (x+2)(x-1-2\sqrt{3})(x-1+2\sqrt{3}).$$