MAT 0320 - Turma 42 - 1° Semestre de 2019

Introdução à Análise Complexa

4ª Lista de Problemas

Questão 1) Seja C o segmento de reta que liga 1-i a 1+i orientado para cima. Calcule as seguintes integrais.

$$\text{(a)} \int_C \frac{1}{z}\,dz \qquad \text{(b)} \int_C \frac{1}{z^2}\,dz \qquad \text{(c)} \int_C (z^2+1)\,dz \qquad \text{(d)} \int_C e^z\,dz$$

Questão 2) Seja $\widehat{C}$ o caminho parametrizado $z(t) = 2t^2 - 1 + it$, $-1 \leq t \leq 1$. Calcule as seguintes integrais.

$$\text{(a)} \int_{\widehat{C}} \frac{1}{z}\,dz \qquad \text{(b)} \int_{\widehat{C}} \frac{1}{z^2}\,dz \qquad \text{(c)} \int_{\widehat{C}} (z^2+1)\,dz \qquad \text{(d)} \int_{\widehat{C}} e^z\,dz$$

Questão 3) Sejam C_1, C_2, C_3 os círculos positivamente orientados $|z| = 1$, $|z-3| = 1$, $|z| = 5$, respectivamente. Seja C_4 a elipse $x^2 + 25y^2 = 25$, também positivamente orientada. Calcule $\displaystyle\int_{C_k} \frac{1}{z(z-3)}\,dz$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Questão 4) Faça a mudança de variável $z = e^{i\theta}$ e transforme cada integral definida em uma integral de contorno. Use a a fórmula integral de Cauchy para calcular as integrais assim obtidas.

$$\text{(a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta}\,d\theta \qquad \text{(b)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$$

Questão 5) Para cada $R > 0$, seja C_R o caminho fechado positivamente orientado que consiste da união do segmento $[-R, R]$ com o semicírculo $H_R = \{Re^{i\theta};\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.
Seja f a função definida por $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$, $z \neq i$ e $z \neq -i$.

(a) Para cada $R > 1$, use a fórmula integral de Cauchy para calcular $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$.

(b) Mostre que, para cada $R > 1$, $\left|\displaystyle\int_{H_R} f(z)\,dz\right| \leq \dfrac{\pi R}{R^2-1}$

(c) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$.

Questão 6) (a) Mostre que $\sin\theta \geq \dfrac{2}{\pi}\theta$, se $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(b) Mostre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \leq \frac{\pi(1-e)}{2R}$, para todo $R > 0$.

(c) Mostre que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta = 0$.

Questão 7) Para cada $R > 0$ considere C_R e H_R como definidos no Problema 3 e $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$, $z^2 \neq -1$.

(a) Para cada $R > 1$, use a fórmula integral de Cauchy para calcular $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$.

(b) Mostre que, para cada $R > 1$, $\displaystyle\left|\int_{H_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{R^2}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$.

(c) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx$.

Questão 8) Para cada $a > 0$, considere H_a como definido no Problema 3 e $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$, $z \neq 0$. Dados $0 < r < R$, seja $C_{r,R}$ o contorno fechado positivamente orientado que consiste dos intervalos $[-R,-r]$ e $[r,R]$ unidos aos semicírculos de raio r e R e centro em 0 contidos no semiplano superior.

(a) Mostre que $\displaystyle\int_{C_{r,R}} f(z)\,dz = 0$, para todos r, R tais que $0 < r < R$.

(b) Mostre que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{H_R} f(z)\,dz = 0$.

(c) Mostre que $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{H_r} f(z)\,dz = \pi i$. `Sugestão`: use a Proposição enunciada e demonstrada ao final desta lista.

(d) Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. `Sugestão`: use o 6c.

Proposição. Seja f uma função analítica definida em um aberto contendo 0. Para $r > 0$, seja C_r o semicírculo orientado no sentido antihorário, $C_r = \{re^{it};\, 0 \leq t \leq \pi\}$. Então $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z}\,dz = \pi i f(0)$.

`Demonstração`: Usando que $\displaystyle\int_{C_r}\frac{1}{z}\,dz = \pi i$, vemos que, para todo r suficientemente pequeno,

$$\pi i f(0) - \int_{C_r}\frac{f(z)}{z}\,dz = f(0)\int_{C_r}\frac{1}{z}\,dz - \int_{C_r}\frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{C_r}\frac{f(0)-f(z)}{z}\,dz$$

e, portanto,

$$\left|\pi i f(0) - \int_{C_r}\frac{f(z)}{z}\,dz\right| \leq \int_{C_r}\frac{|f(z)-f(0)|}{r}\,|dz|.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que, para todo $|z| \leq \delta$, $|f(z) - f(0)| < \frac{\epsilon}{\pi}$ (existe tal δ porque f, sendo analítica, é contínua em 0. Daí, para todo $r < \delta$, temos

$$\left|\pi i f(0) - \int_{C_r}\frac{f(z)}{z}\,dz\right| \leq \frac{1}{r}\int_{C_r}|f(z)-f(0)|\,|dz| < \frac{1}{r}\frac{\epsilon}{\pi}\int_{C_r}|dz| = \frac{\epsilon}{\pi r}\pi r = \epsilon.$$

Isto prova o que queríamos.

`Respostas`: 4a) $\frac{\pi}{2}$. 4b) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. 5c) $\frac{\pi}{e}$. 7c) $\frac{\pi}{e}$. 8d) $\frac{\pi}{2}$.