MAT 226 - 2° Semestre de 2019

Equações Diferenciais I

3ª Lista de Problemas

Nesta lista a norma de operador em $M_n(\mathbb{R})$ será denotada por $\|\cdot\|$,

$$\|A\| = \sup\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2};\, x \in \mathbb{R}^n,\, x \neq 0\}, \quad A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Denotamos por $\|\cdot\|_2$ a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ serão identificados com matrizes $n \times 1$ de modo que Ax na definição acima denota o produto de matrizes.

1) Dados α e β reais, mostre que $\left\| \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

2) (a) Mostre que, para toda $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\max\{|a_{ij}|;\, 1 \leq i,j \leq n\} \,\leq\, \|A\| \,\leq\, n\, \max\{|a_{ij}|;\, 1 \leq i,j \leq n\}.$$

(b) Seja $A_1 \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz cujas entradas são todas iguais a 1. Mostre que, para A_1, vale a igualdade na segunda desigualdade do item (a).

3) (a) Dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, mostre que a aplicação $M_n(\mathbb{R}) \ni A \longmapsto AX_0 \in \mathbb{R}^n$ é contínua.
(b) Dada $A \in C^1([a,b], M_n(\mathbb{R}))$ e dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, mostre que $(A(t)X_0)' = A'(t)X_0$.

Mostramos em sala (na aula de 31 de outubro, clique aqui) que, se $A \in C^1([a,b], M_n(\mathbb{R}))$, então $t \longmapsto e^{A(t)}$ também pertence a $C^1([a,b], M_n(\mathbb{R}))$. Além disso, o segundo membro da igualdade

$$e^{A(t)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(t)^n}{n!}, \quad t \in [a,b],$$

pode ser derivado termo-a-termo.

4) (a) Seja $A \in C^1([a,b], M_n(\mathbb{R}))$ tal que $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Mostre que

$$\left(e^{A(t)}\right)' \;=\; A'(t)e^{A(t)}.$$

(b) Dada $A \in C([a,b], M_n(\mathbb{R}))$ e dado $t_0 \in [a,b]$, seja $B \in C^1([a,b], M_n(\mathbb{R}))$ tal que $B'(t) = A(t)$ para todo t e $B(t_0) = 0$. Dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$, mostre que $X(t) = e^{B(t)} X_0$ é a única solução do pvi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & A(t)X \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right. .$$

5) Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $AX_0 = \lambda X_0$.

Mostre de duas maneiras que $X(t) = e^{\lambda \sin t} X_0$ é a solução do pvi $\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & (\cos t)\, AX \\ X(0) & = & X_0 \end{array} \right.$:

(a) verificando diretamente, usando portanto a unicidade;

(b) aplicando os Problemas 4 e 3 desta lista.

6) Esboce o plano de fase do sistema $X' = AX$, $A = UJU^{-1}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e

(a) $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $J = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (g) $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7) Suponha que $A \in M_n(\mathbb{R})$ possui um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ com parte real positiva e seja $v \in \mathbb{C}^n$ um autovetor associado a λ

(a) Mostre que $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $X(t) = e^{\lambda t} v$, $t \in \mathbb{R}$, satisfaz $X' = AX$ e

$$\lim_{t \to -\infty} \|X(t)\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} \|X(t)\| = \infty.$$

(b) Seja $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ uma solução de $X' = AX$ e sejam $X_1(t) = \frac{1}{2}(X(t) + \overline{X(t)})$ e $X_2(t) = \frac{1}{2i}(X(t) - \overline{X(t)})$, $t \in \mathbb{R}$. Mostre que X_1 e X_2 são soluções de $X' = AX$ que tomam valores em $\mathbb{R}^n$ e satisfazem $\|X(t)\|^2 = \|X_1(t)\|^2 + \|X_2(t)\|^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Observações: A hipótese de que A possui autovalor com parte real positiva não é necessária neste item. X_1 e X_2 são, respectivamente, as partes real e imaginária de X.

(c) Seja X a solução de $X' = AX$ dada no item (a) e sejam X_1 e X_2 como definidas no item (b). Mostre que para $i = 1$ e para $i = 2$, temos: (i) $\lim_{t \to -\infty} \|X_i(t)\| = 0$ e (ii) $\lim_{k \to \infty} \|X_i(t_k)\| = \infty$, para alguma sequência $t_k \longrightarrow \infty$. Observação: Isto implica que $X = 0$ é um ponto de equilíbrio instável para o sistema $X' = AX$.

8) Seja $A = UJU^{-1}$, sendo U uma matriz complexa inversível. Mostre que

(a) Se $J = \begin{pmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, então $X \equiv 0$ é um equilíbrio assintoticamente estável de $X' = AX$.

(b) Se $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, então $X \equiv 0$ é um equilíbrio assintoticamente estável de $X' = AX$.

(c) Se $J = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, então $X \equiv 0$ é um equilíbrio estável de $X' = AX$, não assintoticamente estável.

(d) Se $J = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$, então $X \equiv 0$ é um equilíbrio instável de $X' = AX$.

(e) Se $J = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, então $X \equiv 0$ é um equilíbrio estável de $X' = AX$, não assintoticamente estável.

Observação: Note que as matrizes dos itens (d) e (e) possuem o mesmo polinômio característico. Ou seja, o polinômio característico não é suficiente para determinar se o equilíbrio é estável ou instável.

9) (a) Transforme a *equação de Van der Pol*, $z'' + \mu(z^2 - 1)z' + z = 0$ (μ é uma constante real), em um sistema 2-por-2 de primeira ordem e verifique que a origem é o único ponto de equilíbrio.
(b) Obtenha a aproximação linear na origem do sistema do item (a) e mostre que, se $\mu < 0$, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para a linearização.

10) Considere o sistema $\begin{cases} x' &= 2xy \\ y' &= x^2 - y^2 \end{cases}$.
(a) Mostre que $V(x, y) = x^3 - 3xy^2$ é uma *integral primeira* deste sistema, isto é, mostre que $V(x(t), y(t))$ é constante em t se $(x(t), y(t))$ for uma solução do sistema.
(b) Esboce o plano de fase do sistema.
(c) Entenda por que, neste caso, a aproximação linear do sistema em seu único ponto de equilíbrio não fornece informação alguma sobre o plano de fase do sistema.

Problema Extra (fora da ementa)

Considere a aplicação $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = e^A$.

(a) Mostre que, para todos $A, H \in M_n(\mathbb{R})$, a série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^{k-1}H + A^{k-2}HA + \cdots + AHA^{k-2} + HA^{k-1}}{k!}$$

é absolutamente convergente em $M_n(\mathbb{R})$, munido da norma $\| \cdot \|$.

(b) Mostre que f é diferenciável e que, para todos $A, H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$f'(A)(H) = H + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^{k-1}H + A^{k-2}HA + \cdots + AHA^{k-2} + HA^{k-1}}{k!}$$

(c) Mostre que, para todo $A \in M_n(\mathbb{R})$ e para todo $H \in M_n(\mathbb{R}^n)$, $\|f'(A)(H)\| \leq e^{\|A\|}\|H\|$.

`Sugestão`: Seja k inteiro, $k \geq 2$.

Mostre que, para todos a e h reais tais que $0 < h < a$, temos

$$(a+h)^k - a^k - ka^{k-1}h \;\leq\; k(k-1)(2a)^{k-2}\,\frac{h^2}{2}$$

Mostre que, para todos $A, H \in M_n(\mathbb{R})$, temos

$$\|(A+H)^k - A^k - (A^{k-1}H + A^{k-2}HA + \cdots + AHA^{k-2} + HA^{k-1})\| \leq\; k(k-1)(2\|A\|)^{k-2}\,\frac{\|H\|^2}{2}$$

Última afirmação do Problema 7 Escrevendo $\lambda = \alpha + i\beta$,

$$v = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix}, \quad X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \\ \vdots \\ x_n^1(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \\ \vdots \\ x_n^2(t) \end{bmatrix},$$

vem, para $j = 1, \cdots, n$,

$$x_j^1(t) = e^{\alpha t}[a_j \cos(\beta t) - b_j \text{sen}\,(\beta t)] \quad \text{e} \quad x_j^2(t) = e^{\alpha t}[a_j \text{sen}\,(\beta t) + b_j \cos(\beta t)].$$

Como $v \neq 0$, temos $a_l \neq 0$ ou $b_l \neq 0$ para algum l. Considere as sequências $t_k = \frac{k\pi}{\beta}$ e $s_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\beta}$. Se $a_l \neq 0$, $\|X_1(t_k)\| \longrightarrow \infty$ e $\|X_2(s_k)\| \longrightarrow \infty$. Se $b_l \neq 0$, $\|X_1(s_k)\| \longrightarrow \infty$ e $\|X_2(t_k)\| \longrightarrow \infty$.