MAT 0320 - Turma 42 - 1° Semestre de 2019

Introdução à Análise Complexa

3ª Lista de Problemas

Questão 1: Encontre o raio de convergência das séries de potências

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\, z^n}{2^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n!}$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}\, z^n}{n!} \qquad \text{(e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!\, z^n}{n^n} \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n^2}$$

Questão 2: (a) Mostre que o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\, z^n}{n!}$ é infinito.

(b) Mostre que a função f definida por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\, z^n}{n!}$, satisfaz $f''(z) - 3f'(z) + 2f(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Questão 3: (a) Mostre que o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{4^n (n!)^2}$ é infinito.

(b) Mostre que a função J_0 definida por $J_0(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{4^n (n!)^2}$, satisfaz $zJ_0''(z) + J_0'(z) + zJ_0(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Questão 4) Usando as equações de Cauchy-Riemann, mostre que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, é holomorfa nos seguintes casos.

$$\text{(a) } u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy),\ v(x,y) = e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy).$$

$$\text{(b) } u(x,y) = \operatorname{sen}(\ln\sqrt{x^2+y^2})\cosh(\arctan\tfrac{y}{x}),\ v(x,y) = \cos(\ln\sqrt{x^2+y^2})\operatorname{senh}(\arctan\tfrac{y}{x}),\ x > 0.$$

Questão 5) Escreva as funções holomorfas da Questão 3 como a composição de duas funções holomorfas conhecidas.

Questão 6) Mostre que $f(x+iy) = e^y(\cos x\ +\ i\operatorname{sen} x)$ não é holomorfa em ponto algum de $\mathbb{C}$.

Questão 7) Suponha que $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ é uma função holomorfa e que u e v têm derivadas parciais contínuas em um aberto $U \subseteq \mathbb{C}$. Mostre que $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in U$, também é holomorfa.

Questão 8) Suponha que f é uma função holomorfa não constante definida em $\mathbb{C}$.

(a) Mostre que $g(z) = \overline{f(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, não é holomorfa.

(b) Mostre que $g(z) = |f(z)|^2$, $z \in \mathbb{C}$, não é holomorfa.

Questão 9) Suponha que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é uma função holomorfa e que u e v são de classe C^2 em um aberto $U \subseteq \mathbb{C}$. Mostre que u e v são *harmônicas*, isto é, que $u_{xx} + u_{yy} = 0$ e $v_{xx} + v_{yy} = 0$.