MAT 226 - 2° Semestre de 2019

Equações Diferenciais I

2ª Lista de Problemas

**1 -** Seja $\Omega$ um aberto em $\mathbb{R}^2$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que existem $B > 0$ e $\beta > 0$ tais que, para todos $(x, y)$ e $(x, z)$ pertencentes a $\Omega$, temos $|f(x, y)| \leq B$ e $|f(x, y) - f(x, z)| \leq \beta\, |y - z|$. Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, tome $a > 0$ tal que $\{(x, y);\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq B|x - x_0|\} \subset \Omega$. Seja $M = \{\phi \in C[x_0 - a, x_0 + a];\ |\phi(x) - y_0| \leq B|x - x_0|\}$. Dada $\phi \in M$, defina $F(\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt$. Vimos em sala que $F(\phi) \in M$, o que define aplicação $F : M \to M$.

Mostre que, se $a < \frac{1}{2\beta}$, então

$$d(F(\phi), F(\psi)) < \frac{1}{2} d(\phi, \psi),$$

sendo $d(g, h) = \sup\{|g(x) - h(x)|;\ |x - x_0| \leq a\}$.

**2 -** Dadas $b \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ e $A \in C([a, b], M_n(\mathbb{R}))$, defina $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $f(x, y) = A(x)y + b(x)$, $x \in [a, b]$, $y \in \mathbb{R}^n$. Dado $(x_0, y_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, para cada $\phi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ defina

$$\mathcal{F}(\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt,\ \ x \in [a, b]\}$$

(a) Mostre que existe inteiro positivo $k$ tal que $\mathcal{F}^k$ é uma contração no espaço $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ munido da métrica

$$d(\phi, \psi) = \sup\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_1;\ x \in [a, b]\},\quad \|\xi\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|,\ \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Dados $a_0, \cdots, a_{n-1}, f \in C([a, b])$, $x_0 \in [a, b]$, $(k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, mostre que o pvi

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = k_0,\ y'(x_0) = k_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1} \end{cases}$$

tem uma única solução definida em $[a, b]$.

**3 -** Considere $X = C([0, 1])$ munido da distância $d(f, g) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$. Defina $\mathcal{F} : X \to X$ por $\mathcal{F}(y)(x) = \displaystyle\int_0^x [1 + ty(t)]\, dt$. Defina $y_0 \equiv 1$, $y_n = \mathcal{F}(y_{n-1})$, $n \geq 1$.

(a) Calcule $y_5$.

(b) Mostre que $\mathcal{F}$ é uma contração.

(c) Mostre que $y_n$ converge uniformemente em $[0,1]$ para a única solução em $[0,1]$ do pvi $\left\{ \begin{array}{rcl} y' - xy & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$.

**4 -** Considere o problema de valor inicial $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Defina $y_0(x) = 0$ e $y_{k+1}(x) = \int_0^x [1 + y_k(t)^2]\, dt$.
(a) Resolva o problema de valor inicial por separação de variáveis.
(b) Calcule explicitamente $y_0$, $y_1$, $y_2$ e $y_3$ e compare-os com os quatro primeiros termos da expansão em série de potências da solução encontrada no item (a).

**5 -** Seja $p$ um polinômio mônico de grau $n$, $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Seja $L = p(D)$ o operador diferencial ordinário de ordem $n$ com coeficientes constantes, $Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$. Seja $V$ o espaço vetorial de todos os polinômios de grau $\leq k$.

(a) Mostre que, se $a_0 \neq 0$, $L : V \longrightarrow V$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.
`Sugestão`: Mostre que a matriz de $L$ na base canônica $\{1, t, \cdots, t^k\}$ é triangular superior com todas as entradas da diagonal principal não-nulas.

(b) Mostre que, se 0 é uma raiz de ordem $l$ de $p$ (isto é, se $a_0 = a_1 = \cdots = a_{l-1} = 0$ e $a_l \neq 0$) e se $W = \{t^l q(t);\ q \in V\}$, então $L : W \longrightarrow V$ é um isomorfismo.

**6 -** Seja $p$ um polinômio mônico de grau $n$, $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Seja $L = p(D)$ o operador diferencial ordinário de ordem $n$ com coeficientes constantes, $Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $V_\alpha = \{q(t)e^{\alpha t};\ q$ é polinômio de grau $\leq k\}$.

(a) Mostre que, se $p(\alpha) \neq 0$, $L : V_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.
`Sugestão de roteiro`. Seja $V$ como na questão precedente. (i) Mostre que $M_\alpha : V_\alpha \longrightarrow V$, $M_\alpha(q)(t) = e^{-\alpha t}q(t)$ é um isomorfismo de espaços vetorias. (ii) Mostre que $p(D) = (M_\alpha)^{-1} p_\alpha(D) M_\alpha$, $p_\alpha(t) = p(t + \alpha)$. (iii) Aplique o Problema 4 a $p_\alpha(D)$.

(b) Mostre que, se $\alpha$ é uma raiz de ordem $l$ de $p$ (isto é, se $(t - \alpha)^p$ divide $p(t)$ se $p < l$ e não divide $p(t)$ se $p = l$) e se $W_\alpha = \{t^l f(t);\ f \in V_\alpha\}$, então $L : W_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ é um isomorfismo.

**7 -** Seja $p$ um polinômio mônico de grau $n$, $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Seja $L = p(D)$ o operador diferencial ordinário de ordem $n$ com coeficientes constantes, $Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$. Dado $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, seja $V_{\alpha,\beta} = \{q_1(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + q_2(t)e^{\alpha t}\mathrm{sen}\,(\beta t);\ q_1, q_2$ polinômios de grau $\leq k\}$.

(a) Mostre que, se $p(\alpha + i\beta) \neq 0$, $L : V_{\alpha,\beta} \longrightarrow V_{\alpha,\beta}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

(b) Mostre que, se $\alpha+i\beta$ é uma raiz de ordem $l$ de $p$ e se $W_{\alpha,\beta}=\{t^l f(t);\ f\in V_{\alpha,\beta}\}$, então $L : W_{\alpha,\beta}\longrightarrow V_{\alpha,\beta}$ é um isomorfismo.

`Dica`. Substitua $\alpha$ por $\alpha+\beta i$ na Questão 6.

**8 -** Encontre uma solução particular para cada uma das seguintes equações.

(a) $y'''-3y'-2y=e^{-x}$ (b) $y'''-3y'-2y=e^{-x}\cos x$ (c) $y'''-3y'-2y=e^{-x}(1+\cos x)$

(d) $y''''+2y''+y=x^3$ (e) $y''''+2y''+y=\cos x$ (f) $y''''+2y''+y=x^3+\cos x$

**9 -** Mostre que qualquer solução de $x^2y''+ky=0$, $x>0$, tem no máximo uma raiz se $k\leq 1/4$. Mostre que tem infinitas raízes se $k>1/4$.

**10 -** Seja $V$ o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, $n\in\mathbb{N}$.

(a) Mostre que $V$ é um espaço vetorial de dimensão 2, se munido das operações canônicas.

(b) Encontre os elementos de $V$ da forma $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para algum $r\in\mathbb{R}$.

(c) Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in V$ satisfaz $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se, e somente se, $2x_1\neq(1-\sqrt{5})x_0$.

`Observação`. A sequência de Fibonacci $(1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots)$ pertence a $V$.

**11-** Sejam $a$ e $b$ constantes positivas. Mostre que, se $y''+ay'+by=0$, então $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y(x)=0$.

**12-** Mostre que, se $y$ é solução de $x^2y''-xy'+y=1$ definida para $x>0$, então $\displaystyle\lim_{x\to 0}y(x)=1$.

**13-** Dada $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ contínua, resolva $\begin{cases} x^2y''+3xy'+y=f(x) \\ y(1)=y'(1)=0 \end{cases}$.

**14-** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $y(x) = \displaystyle\int_0^x \sinh(x-t) f(t)\, dt$ é a solução do pvi $\begin{cases} y'' - y &= f(x) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$ de duas maneiras:

(a) Invocando o teorema de existência e unicidade.

(b) Obtendo a fórmula pelo método da variação das constantes.

**15-** Considere o operador linear

$$\begin{aligned} L : \{y \in C^2([0,2\pi]);\ y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi)\} &\longrightarrow C([0,2\pi]) \\ y &\longmapsto y'' + y \end{aligned}$$

(a) Mostre que o núcleo de $L$ tem dimensão dois.
(b) Mostre que $f \in C([0,2\pi])$ pertence à imagem de $L$ se e somente se

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx \;=\; \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} x\, dx \;=\; 0.$$

**16-** Considere o operador linear

$$\begin{aligned} L : \{y \in C^2([0,1]);\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)\} &\longrightarrow C([0,1]) \\ y &\longmapsto y'' - y \end{aligned}$$

(a) Mostre que $L$ é bijetor.
(b) Mostre que existe $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, $G(s,0) = G(s,1)$ e $G(0,s) = G(1,s)$ para todo $s \in [0,1]$, tal que $L^{-1} f(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t)\, dt$ para toda $f \in C([0,1])$.

`Observação`. Diz que $G$ é a *função de Green* para o operador $D^2 - 1$ com condições de fronteira periódicas no intervalo $[0,1]$.