MAT 0320 - Turma 42 - 1° Semestre de 2019

Introdução à Análise Complexa

2ª Lista de Problemas

Questão 1: Use a forma polar para mostrar que: (a) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$, (b) $(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$.

Questão 2: (a) Calcule $(2+i)^3$. (b) Determine todas as raízes cúbicas de $2+11i$.

Questão 3: Determine todos os valores de: (a) $(-1+i\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$, (b) $(-1)^{-\frac{3}{4}}$.

Questão 4: (a) Dado $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, considere

$$w = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Mostre que $w^2 = z$. (b) Use duas vezes a fórmula do item a para determinar os quatro possíveis valores de $\sqrt[4]{i}$.

Questão 5: Determine o valor absoluto de: (a) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)(1-3i)}{\sqrt{5}}$, (b) $\left(\dfrac{2+i}{2-i\sqrt{3}}\right)^2$.

Questão 6: Sendo $|z_2| \neq |z_3|$, mostre que

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \;\leq\; \frac{|z_1|}{\big|\,|z_2| - |z_3|\,\big|}$$

Questão 6: (a) Mostre que, se $z \neq 1$, temos $1 + z + z^2 + \cdots + z^n \;=\; \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.
(b) Substitua $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, na fórmula do item a e prove que

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \;=\; \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}},$$

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \cdots + \operatorname{sen}n\theta \;=\; \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Respostas. 2a) $2+11i$. 2b) $2+i$, $(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}) - i(\frac{1}{2}+\sqrt{3})$, $(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}) - i(\frac{1}{2}-\sqrt{3})$.
3a) $\pm 2\sqrt{2}$. 3b) $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$.
4b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-2\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-2\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$.
5a) $\sqrt{10}$. 5b) $\frac{5}{7}$.