MAT 226 - 2° Semestre de 2019

Equações Diferenciais I

1ª Lista de Problemas

1 - Verifique que as funções $y_1(x) = \cos(\ln x)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$, definidas para $x > 0$, são soluções da equação $x^2y'' + xy' + y = 0$.

2 - Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, mostre que $y(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)\,dt$ é solução do problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

3 - Ache todas as soluções, dando seus domínios máximos, das equações:

(a) $y''' = x^2$, (b) $3y' + y = 2e^{-x}$, (c) $(x + 3y) - xy' = 0$, (d) $xy' = y$.

4 - (a) Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' + \frac{2y}{x} = 4x \\ y(1) = y_0 \end{cases}$.

(b) Esboce o gráfico de algumas soluções encontradas no item (a).

(c) Para que valores de y_0 o problema de valor inicial $\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ tem solução?

5 - (a) Mostre que o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}(3x^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tem infinitas soluções.

(b) Mostre que o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 5(y-1)^{\frac{4}{5}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tem infinitas soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(c) Mostre que duas soluções quaisquer do problema de valor inicial do item (b) coincidem em algum intervalo aberto contendo 0.

6 - Demonstre diretamente (sem invocar teoremas de existência e unicidade mais gerais) que, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = x|y| \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tem solução única. Esboce o gráfico de algumas soluções.

7 - (a) Mostre que toda solução de $x^2y' + 2xy = 1$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \to +\infty$. (b) Encontre uma solução da equação acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.

8 - (a) Mostre que toda solução de $x^2y' + 2xy = 0$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \to +\infty$. (b) Encontre uma solução da equação acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.

9 - Uma *equação de Bernoulli* é uma equação da forma $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e f e g são funções contínuas definidas num intervalo aberto.

(a) Mostre que a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$ transforma uma equação de Bernoulli numa equação linear.

(b) Resolva:

(1) $y' + y = xy^3$
(2) $y' + \dfrac{y}{x} = y^{1/2}$
(3) $y' = ay^{2/3} - by$

10 - (a) Encontre as soluções constantes de $y' = (y^2 - 1)(y^2 - 4)$.
(b) Mostre que, se I é intervalo aberto, $0 \in I$, e se $y : I \to \mathbb{R}$ é solução de $\begin{cases} y' = (y^2-1)(y^2-4) \\ y(0) = 0 \end{cases}$, então $|y(x)| < 1$ para todo $x \in I$. Dica: Use unicidade.
(c) Seja $I = (a, b)$, $b \in \mathbb{R}$, um intervalo aberto e seja $y : I \to \mathbb{R}$ uma solução do problema de valor inicial acima. Mostre que o limite lateral $\lim\limits_{x\to b^-} y(x)$ existe e que $-1 < \lim\limits_{x\to b^-} y(x) < +1$.
(d) Mostre que o domínio maximal do problema de valor inicial acima é $\mathbb{R}$ e que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = \pm 1$.
(e) Formule conjecturas sobre limites no infinito do problema de valor inicial com condição $y(0) = 3/2$.

11 - Sejam p, q e r funções contínuas sobre $a \leq x \leq b$ tais que $p(a) = p(b) = 0$, $p(x) > 0$ se $a < x < b$, $q(x) > 0$ se $a \leq x \leq b$ e

$$\int_a^{a+\epsilon} \frac{dx}{p(x)} = \int_{b-\epsilon}^{b} \frac{dx}{p(x)} = \infty \quad (0 < \epsilon < b - a)$$

Demonstre que todas as soluções da equação

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$$

(que existem sobre o intervalo $a < x < b$) convergem para $\frac{r(b)}{q(b)}$ quando $x \to b$.

12 - Dada a equação diferencial $y' + a(x)y = f(x)$, onde a e f são funções contínuas definidas num intervalo não-limitado à direita I, $a(x) \geq c > 0$ $\forall x$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mostre que toda solução tende a zero quando $x \to \infty$.

`Sugestão de roteiro`:

(a) Use o teorema do valor intermediário para mostrar que, se f e g são contínuas em $[a, b]$, e se g é positiva, então existe $\xi \in (a, b)$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt$.

(b) Resolva o problema de valor inicial $y' + a(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$.
(c) Multiplique e divida o integrando de $\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t)\,dt$ por $a(t)$ e aplique (a) com $\frac{f}{a}$ no lugar de f.

13 - Seja a uma constante positiva e seja f uma função contínua definida em $(0, +\infty)$ tal que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = b$. Mostre que a equação

$$xy' + ay = f(x)$$

tem uma única solução limitada quando $x \to 0^+$ e ache o limite desta solução quando $x \to 0^+$.
`Sugestão`: Mostre que, se y é uma solução limitada da equação diferencial, então $y(1) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1} f(t)\,dt$.

14 - (a) Mostre que a equação $y' + y = f(x)$ tem uma única solução limitada para $-\infty < x < \infty$, dado que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada.
(b) Supondo que a função f do item (a) é periódica, mostre que a solução obtida acima é periódica. [Sugestão: faça uma mudança de variável na integral].

15 - (a) Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto tal que $(x, y) \in U \Longrightarrow (\lambda x, \lambda y) \in U$ para todo $\lambda \neq 0$ e seja $f \in C(U)$. Suponha que f satisfaz $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, para todo $\lambda \neq 0$ e para todo $(x, y) \in U$. Mostre que a mudança de variável dependente $v = y/x$ transforma a equação $y' = f(x, y)$ em uma equação de variáveis separáveis.
(b) Determine implicitamente a solução do problema de valor inicial

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}, \quad y(1) = e,$$

e calcule $y'(1)$, $y''(1)$ e $y'''(1)$.
(c) Fazendo mudanças de variável dependente e de variável independente da forma $z = y + \alpha$ e $x = t + \beta$ e, em seguida, usando a técnica do item (a), resolva o problema de valor inicial

$$y' = \frac{2y + x - 1}{y + 2x + 1}, \quad y(0) = 1.$$

16 - (a) Mostre que a diferença $z = y_2 - y_1$ de duas soluções da equação diferencial

(1) $$y' + x^3 y - x^2 y^2 = 1$$

satisfaz

(2) $$z' + [x^3 - 2x^2 y_1(x)]z = x^2 z^2.$$

(b) Notando que $y_1(x) = x$ é uma das soluções de (1), use a técnica do Exercício 9 para resolver (2) e obtenha a solução geral de (1).

`Observação`: A técnica do Exercício 16 permite resolver, mais geralmente, equações da forma $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$, denominadas *equações de Ricatti*.

17 - A equação $e^x \sec y - \tan y + y' = 0$ tem um fator integrante da forma $\mu(x,y) = e^{ax}\cos y$. Determine a e resolva a equação.

18 - A equação $x(y^2-1)(\ln x)y' + y(y^2+1) = 0$ tem um fator integrante da forma $\mu(x,y) = x^m y^n$. Determine m e n e resolva a equação.

`Solução do 11`: Seja A uma primitiva de $\dfrac{q}{p}$ em (a,b), escolhida arbitrariamente.

Então, para todo $x_1 \in (a,b)$ e para todo $x \in (a,b)$, temos

$$A(x) \;=\; A(x_1) \;+\; \int_{x_1}^{x} \frac{q(t)}{p(t)}\,dt$$

e, se y satisfaz $p(x)y' + q(x)y = r(x)$,

$$y(x) \;=\; y(x_1)e^{A(x_1)}e^{-A(x)} \;+\; e^{-A(x)}\int_{x_1}^{x} e^{A(t)}\frac{r(t)}{p(t)}\,dt.$$

Como q é positiva e contínua em $[a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que $q(t) \geq \delta$ para todo $t \in (a,b)$. Daí,

$$\lim_{x\to b}\int_{x_1}^{x}\frac{q(t)}{p(t)}\,dt \;\geq\; \delta\,\lim_{x\to b}\int_{x_1}^{x}\frac{1}{p(t)}\,dt \;=\; \infty$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to b} e^{-A(x)} = 0.$$

Segue do item (a) do roteiro da Questão 12 que, para todo x tal que $x_1 < x < b$, existe ξ, $x_1 < \xi < x$ tal que

$$\int_{x_1}^{x} e^{A(t)}\frac{r(t)}{p(t)}\,dt = \int_{x_1}^{x} e^{A(t)}\frac{r(t)}{q(t)}\frac{q(t)}{p(t)}\,dt =$$

$$\frac{r(\xi)}{q(\xi)}\int_{x_1}^{x} e^{A(t)}\frac{q(t)}{p(t)}\,dt = \frac{r(\xi)}{q(\xi)}\int_{x_1}^{x} e^{A(t)}A'(t)\,dt = \frac{r(\xi)}{q(\xi)}[e^{A(x)} - e^{A(x_1)}]$$

Dado $\mathtt{e} > 0$, é possível (pois $\frac{r}{q}$ é contínua em b) escolher x_1, que ficará fixado de agora em diante, tal que

$$x_1 < \xi < b \implies \left|\frac{r(\xi)}{q(\xi)} - \frac{r(b)}{q(b)}\right| < \mathtt{e}$$

Para todo x tal que $x_1 < x < b$, temos também $x_1 < \xi < b$. Daí, segue de

$$y(x) - \frac{r(b)}{q(b)} \;=\; y(x_1)e^{A(x_1)}e^{-A(x)} - \frac{r(b)}{q(b)}e^{A(x_1)}e^{-A(x)} + \left[\frac{r(\xi)}{q(\xi)} - \frac{r(b)}{q(b)}\right]\,[1 - e^{A(x_1)}e^{-A(x)}]$$

que

$$\left|y(x) - \frac{r(b)}{q(b)}\right| \;\leq\; \left|y(x_1) - \frac{r(b)}{q(b)}\right|\,e^{A(x_1)-A(x)} + \left|\frac{r(\xi)}{q(\xi)} - \frac{r(b)}{q(b)}\right|\,[1 - e^{A(x_1)-A(x)}]$$

$$\leq \left|y(x_1) - \frac{r(b)}{q(b)}\right|\,e^{A(x_1)-A(x)} + \mathtt{e}\,[1 - e^{A(x_1)-A(x)}]$$

A extremidade direita destas duas desigualdades tende a zero quando x tende a b e a extremidade esquerda é ≥ 0. Logo a extremidade esquerda tende a zero, como queríamos.