MAT 0320 - Turma 42 - 1° Semestre de 2019

Introdução à Análise Complexa

1ª Lista de Problemas

Questão 1: Reduza à forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, os números complexos dados pelas expressões seguintes.

$$\text{(a) } 7 - 2i(2 - \tfrac{2i}{5}) \qquad \text{(b) } (1 - i)(\sqrt{3} + i) \qquad \text{(c) } (1 + i)^3$$

$$\text{(d) } 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5 + 7i^6 + 8i^7 + 9i^8$$

$$\text{(e) } \tfrac{1-i}{\sqrt{2}-i} \qquad \text{(f) } \left(\tfrac{1+i}{1-i}\right)^{30} \qquad \text{(g) } \left(\tfrac{1}{1+i}\right)^{100} \qquad \text{(h) } \tfrac{i\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+i}$$

Questão 2: Determine todos os valores de z que satisfaçam as seguintes equações.

$$\text{(a) } 64\, z^{12} + 1 = 0 \qquad \text{(b) } z^{11} + i = 0 \qquad \text{(c) } z^5 = 16\, \overline{z}$$

Questão 3: Fatore os polinômios seguintes como produtos de polinômios de primeiro grau.

$$\text{(a) } z^4 - 16 \qquad \text{(b) } z^4 + 16 \qquad \text{(c) } 8z^3 + 27 \qquad \text{(d) } z^2 - (1 + i)z + 5i \qquad \text{(e) } z^4 - (1 - i)z^2 - i$$

Questão 4: Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, encontre a parte real e a parte imaginária de

$$\text{(a) } z^2 \qquad \text{(b) } z^3 \qquad \text{(c) } z^4 \qquad \text{(d) } z^5$$

Questão 5: Sejam $n \geq 2$ inteiro e $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^n = 1$ e $\omega \neq 1$. Mostre que

(a) $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$

(b) $1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega-1}$

Questão 6: Seja $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $z \in \mathbb{R}$ se e somente se $|1 + iz| = |1 - iz|$.

Questão 7: Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| = 1$ e $w \neq -1$. Mostre que existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $w = \frac{1+it}{1-it}$.

Questão 8: (a) Ache todas as soluções complexas do sistema $\begin{cases} z + w = 4 \\ zw = 8 \end{cases}$.

(b) Ache todas as soluções do sistema $\begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ uv = 2 \end{cases}$.

(c) Mostre que, se (u, v) é solução do sistema do item b, então $u + v$ é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 6x - 4$.

(d) Mostre que todas as raízes do polinômio $p(x)$ do item c são reais.

(e) Mostre que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ e $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$.