Vimos:

Teorema 1 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ contínua e localmente lipschitziana. Então existe $a > 0$ e uma única solução do pvi $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ definida em $[x_0 - a, x_0 + a]$

Seguindo os mesmos passos, com algumas adaptações, é possível provar (veja a Seção 9.5 do livro-texto) o seguinte teorema

Teorema 2 Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, $(x_0, y_0^1, \dots, y_0^n) \in \Omega$, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua e localmente lipschitziana. Então existe $a > 0$ e uma única solução $Y = (y_1, \dots, y_n)$ do pvi

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) = (y_0^1, \dots, y_0^n) \end{cases}$$ definida em $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Como consequência do Teo 2, temos:

Teorema 3 Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, $(x_0, y_0^0, \dots, y_0^{n-1}) \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ contínua e localmente lipschitziana. Então existe $a > 0$ e uma única solução $y \in C^n([x_0 - a, x_0 + a])$ da edo de ordem n $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ satisfazendo $y(x_0) = y_0^0$, $y'(x_0) = y_0^1$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$.

Dem do Teo 3 assumindo o Teo 2:

Uma função $y : I \to \mathbb{R}$ satisfaz $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ se e somente se y é a primeira coordenada de uma $Y : I \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz

(1) $Y' = F(x, Y)$, sendo $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Esta afirmação decorre da observação que (1) é equivalente, com $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ao sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Para provar o Teorema 3, basta provar ~~que~~ este F satisfaz as hipóteses do Teorema 2.

Define $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $\|(\xi_1,\dots,\xi_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$.

Dados $Y, Z \in \mathbb{R}^n$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, para todo x tal que (x,Y) e $(x,Z) \in \Omega$, temos:

$$F(x,Y) - F(x,Z) = \begin{pmatrix} y_2 - z_2 \\ \vdots \\ y_n - z_n \\ f(x,Y) - f(x,Z) \end{pmatrix}$$

Por hipótese, $\forall (x_0,Y_0) \in \Omega$ $\exists$ $Q \subset \Omega$ retângulo fechado (i.e., Q é o produto cartesiano de $n+1$ intervalos fechados) tal que $(x_0,Y_0) \in Q$ e $\exists\, \beta > 0$ tal que

$$|f(x,Y) - f(x,Z)| \leq \beta \cdot \|Y - Z\|_1$$

$$\forall\, (x,Y), (x,Z) \in Q$$

Daí, se (x,Y) e $(x,Z) \in Q$,

$$\|F(x,Y) - F(x,Z)\|_1 = \sum_{j=2}^{n} |y_j - z_j| + |f(x,Y) - f(x,Z)|$$

$$\leq \sum_{j=2}^{n} |y_j - z_j| + \beta \|Y - Z\|_1 \leq (\beta + 1) \|Y - Z\|_1 .$$

CQD

<u>Observação sobre a definição de localmente lipschitz</u>:

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, é localmente lipschitz se para todo $(x_0,Y_0) \in \Omega$, $\exists$ $Q \subset \Omega$ retângulo fechado e $\exists\, \beta > 0$ tais que,

$(x_0, Y_0) \in Q$ e

$\forall (x, Y)$ e (x, Z) em Q, vale:

$$|f(x,Y) - f(x,Z)| \le \beta \cdot \|Y - Z\|_1 .$$

Dizemos que $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, é localmente lipschitz se para todo $(x_0, Y_0) \in \Omega$, $\exists\ Q \subset \Omega$ retângulo fechado e $\beta > 0$ tais que $(x_0, Y_0) \in Q$ e $\forall (x, Y)$ e $(x, Z) \in Q$, vale:

$$|F(x,Y) - F(x,Z)| \le \beta \|Y - Z\|_1 .$$

—x—

Esta definição pode ser modificada trocando-se $\|\cdot\|_1$ pela norma usual em $\mathbb{R}^n$,

$$\|(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} .$$

As duas definições são equivalentes pois

$$\|\vec{\xi}\|_2 \le \|\vec{\xi}\|_1 \le \sqrt{n}\, \|\vec{\xi}\|_2 \quad \forall\ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

—x—

A equação linear de ordem n

Considere $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, g \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto. Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n em I é da forma

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x)$$

Vamos considerar apenas o caso em que $a_n(x) \neq 0 \;\; \forall x \in I$. Dividindo a equação por $a_n(x)$ e mudando o nome das funções, isto é equivalente a supor que $a_n \equiv 1$.

A equação pode então ser reescrita como

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) ,$$

com

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = g(x) - \left[a_0(x) y_1 + a_1(x) y_2 + \dots + a_{n-1}(x) y_n \right]$$

por hipótese

$f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente lipschitz.

Segue então do Teorema 3 que,

$\forall (x_0, y_0^0, \dots, y_0^{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$, existe $a > 0$

tal que o pvi

$$(*) \begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x) \\ y(x_0) = y_0^0 , \; y'(x_0) = y_0^1 , \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

tem solução única definida em $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Pode-se afirmar mais:

Teorema 4: O pvi ⊛ possui uma (única) solução definida em I. Todas as outras possíveis soluções são restrições desta

O Teorema 4 é consequência do Teorema 5 abaixo, pois y é solução da edo escalar

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x)$$

se e somente se y é a primeira coordenada de uma solução $Y: I \to \mathbb{R}^n$ de

$$Y' = F(x, Y), \quad F: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

com F dada por

$$F(x,Y) = A(x)\,Y + G(x)$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-2}(x) & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

<u>Teorema 5</u>: Seja I intervalo aberto e sejam $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ e $G : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas. Seja $F(x,Y) = A(x)Y + B(x)$, $(x,Y) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Então o pvi
$$\begin{cases} Y' = F(x,Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}, \quad (x_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$$
possui uma única solução definida em I.

E qualquer outra solução é restrição desta.