CAPÍTULO 1

Estratégias de resolução de problemas

A viagem de mil quilômetros começa com um passo.
Lao Tzu

À semelhança (ou não) do provérbio acima, a solução de um problema começa (e continua, e termina) com passos simples e lógicos. Mas, desde que avancemos numa direção clara e firme, com passadas longas e visão apurada, precisaremos de bem menos que as centenas de milhares de passos necessárias para a viagem de mil quilômetros. E a matemática, abstrata como é, não sofre de constrangimentos físicos: podemos sempre recomeçar do zero, experimentar novas vias de ataque, ou retroceder a qualquer instante. Nem sempre dispomos de tais luxos na resolução de problemas de outro tipo (como o de encontrar o caminho para casa quando nos perdemos).

É claro que isso não a torna necessariamente fácil; se o fosse, este livro seria bem mais curto. Mas torna-a possível.

Há diversas perspectivas e estratégias gerais para a resolução correta de problemas; a referência clássica para muitas delas é Polya (1957). Discutimos algumas dessas estratégias em baixo, ilustrando brevemente como se pode usar cada uma delas no seguinte problema:

Problema 1.1. Os comprimentos dos lados de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão d. A área do triângulo é t. Calcule os lados e os ângulos do triângulo.

Perceber o problema. Que tipo de problema é este? Há três tipos principais de problemas:

- questões do tipo mostre que... ou calcule..., em que se deve provar que uma certa afirmação é verdadeira, ou manipular uma expressão para obter um certo resultado;
- questões do tipo encontre... ou encontre todos..., em que se pede para determinar algum objeto (ou todos os objetos) satisfazendo certas condições;
- questão do tipo existe ou não..., em que se tem que provar uma afirmação ou fornecer um contra-exemplo (e portanto cai num dos dois tipos anteriores).

O conhecimento do tipo de problema é importante pois determina a abordagem básica. Nos problemas do tipo mostre que... ou calcule..., os dados nos são fornecidos e o objetivo é deduzir deles alguma afirmação ou calcular o valor de uma expressão; um problema deste tipo é em geral mais fácil do que um dos outros dois, pois há um objetivo claramente à vista para o qual podemos dirigir os esforços. Questões do tipo encontre... funcionam por tentativa e erro; em geral há um primeiro palpite que quase funciona, e depois ajustamo-lo um pouco para que fique mais correto; ou então modificamos os requisitos a que

o objeto a encontrar deve obedecer, de modo que eles sejam mais fáceis de satisfazer. Os problemas do tipo existe ou não... são em regra os mais difíceis, pois primeiro temos que decidir se um certo objeto existe ou não, e depois ou fornecer uma prova ou um contra-exemplo.

É claro que nem todos os problemas encaixam de modo claro numa destas categorias; mas ainda assim o formato geral de uma pergunta indica a estratégia básica a seguir. Se o problema a resolver for, por exemplo, o de encontrar nesta cidade um hotel onde pernoitar, podemos primeiro modificar os requisitos, procurando antes um hotel a menos de 5 quilômetros com um quarto vago por não mais que 50 euros por noite, e em seguida usar eliminação simples. Esta estratégia é melhor do que provar que um tal hotel existe ou não existe, e é provavelmente também melhor do que escolher ao acaso um hotel mais à mão e tentar demonstrar que é possível dormir nele.

O Problema 1.1 é do tipo calcule.... Há que exprimir certas incógnitas à custa das variáveis dadas. Isto sugere que se tente uma abordagem algébrica em vez de geométrica, com muitas equações relacionando d, t e as incógnitas – incógnitas essas que são os lados e ângulos do triângulo, e em relação às quais queremos resolver as equações.

Entender os dados. Quais são os dados do problema? Usualmente, a questão é acerca de uns tantos objetos com certas propriedades específicas. Para entendermos os dados do problema, precisamos de saber como interagem esses objetos com tais propriedades. Isto é importante para focarmos a atenção nas técnicas e notações apropriadas ao problema. Em nossa questão-modelo, por exemplo, os dados são um triângulo, sua área, e o fato de seus lados formarem uma progressão aritmética de razão d. Dado que temos um triângulo, e consideramos sua área e seus lados, vamos precisar, para lidar com o problema, de teoremas que relacionem lados, ângulos e áreas; por exemplo, as leis dos senos e dos cossenos e a fórmula da área.

Entender o objetivo. O que é que queremos? Podemos precisar encontrar um objeto, demonstrar uma afirmação, determinar a existência de um objeto com certas propriedades, ou sabe-se lá que mais. Tal como a estratégia de entender os dados, a de entender o objetivo ajuda a focar a atenção em quais as melhores armas a usar. Conhecer o objetivo também nos ajuda a estabelecer metas parciais que, como sabemos, nos aproximam da solução do problema. Em nossa questão-modelo o objetivo é encontrar os lados e ângulos de um triângulo. Isto significa, como já dissemos, que precisamos de teoremas e fórmulas sobre lados e ângulos; mas também nos dá a meta parcial de encontrar equações envolvendo os lados e os ângulos do triângulo.

Escolher uma boa notação. Agora que dispomos dos dados e de um objetivo, devemos representá-los de forma eficiente, para que tanto uns como outro apareçam da forma mais simples possível. Isto envolve em geral as considerações das duas estratégias anteriores. Na questão-modelo, estamos já pensando em equações que envolvam d, t e os lados e ângulos do triângulo. Precisamos exprimir lados e ângulos à custa de variáveis: por exemplo, chamamos a, b e c aos lados e α, β e γ aos ângulos. Mas, usando os dados, podemos simplificar a notação: os lados estão em progressão aritmética, e em vez de a, b e c podemos usar a, $a+d$ e $a+2d$. Mas a notação ainda pode melhorar se a fizermos mais simétrica, chamando $b-d$, b e $b+d$ aos comprimentos dos lados. O único (ligeiro) óbice desta notação é que ela força b a ser maior do que d. Mas, se refletirmos, vemos que isto não é na verdade uma restrição; e que de fato o conhecimento de que $b > d$ é um dado extra para o nosso problema. Poderíamos reduzir ainda mais a notação pondo os ângulos iguais a α, β e $180° - \alpha - \beta$, mas isto é feio e assimétrico – talvez seja melhor manter a notação anterior, mas tendo em conta que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Escrever o que sabemos na notação que escolhemos; fazer um diagrama. Há três vantagens em passar tudo para o papel:

(a) depois relembramos mais facilmente o problema;

(b) o papel é bom para fixar o olhar quando emperramos na resolução;

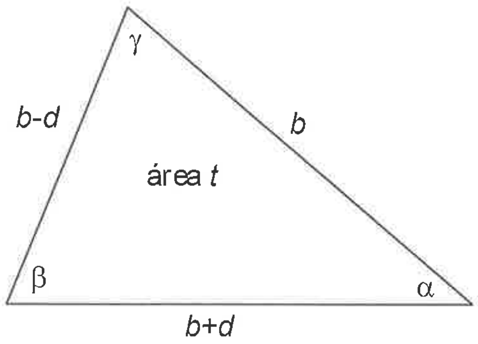
(c) o ato físico de escrever aquilo que sabemos pode detonar novas ideias e conexões.

Mas há que ter cuidado para não escrevermos coisas supérfluas nem enchermos o papel com detalhes miúdos; em vez disso, podemos destacar os fatos que nos parecem mais úteis, e pôr aquelas ideias mais dúbias, redundantes ou malucas num outro canto da folha de rascunho. Eis algumas equações e desigualdades que podemos extrair de nossa questão-modelo:

- restrições físicas: $\alpha, \beta, \gamma, t > 0$ e $b \geq d$; também podemos supor, sem perda de generalidade, que $d \geq 0$;
- soma dos ângulos internos dum triângulo: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
- lei dos senos: $(b-d)/\operatorname{sen}\alpha = b/\operatorname{sen}\beta = (b+d)/\operatorname{sen}\gamma$;
- lei dos cossenos: $b^2 = (b-d)^2 + (b+d)^2 - 2(b-d)(b+d)\cos\beta$, etc.;
- fórmula da área: $t = (1/2)(b-d)\,b\operatorname{sen}\gamma = (1/2)(b-d)(b+d)\operatorname{sen}\beta = (1/2)\,b\,(b+d)\operatorname{sen}\alpha$;
- fórmula de Heron: $t^2 = s(s-b+d)(s-b)(s-b-d)$, onde o semiperímetro s é dado por $((b-d)+b+(b+d))/2$;
- desigualdade triangular: $b+d \leq b+(b-d)$.

Muitos destes fatos podem revelar-se redundantes ou desviar-nos do caminho certo. Mas podemos usar de algum discernimento para separar os fatos valiosos daqueles que não ajudam. É de esperar que as igualdades sejam mais úteis do que as desigualdades, pois tanto nossos dados como nosso objetivo têm a forma de igualdades. E a fórmula de Heron é especialmente promissora, pois o semiperímetro s fica simplesmente igual a $3b/2$. Podemos portanto destacar a fórmula de Heron como sendo provavelmente útil.

É claro que também podemos desenhar uma figura, coisa que costuma ajudar em problemas geométricos, mas que neste caso não parece adiantar-nos muito:



Modificar ligeiramente o problema. Há muitas maneiras de introduzir variações no problema para tentar torná-lo mais acessível:

(a) Considerar casos especiais do problema, como por exemplo casos extremos ou degenerados.

(b) Resolver uma versão simplificada do problema.

(c) Formular uma conjectura que implicaria na solução do problema, e tentar resolvê-la primeiro.

(d) Deduzir algumas consequências do problema, e tentar começar por demonstrá-las.

(e) Reformular o problema (por exemplo, tomar o contrapositivo, demonstrar por absurdo, ou tentar alguma substituição).

(f) Estudar soluções de problemas análogos.

(g) Generalizar o problema.

Isto é útil quando não conseguimos sequer iniciar um ataque ao problema, pois a solução de um problema aparentado mas mais simples pode mostrar-nos a via para a solução do problema maior. De modo semelhante, a consideração de casos extremos ou a resolução do problema sob hipóteses adicionais podem fazer luz sobre o caso geral. Mas atenção: os casos especiais são, por natureza, especiais, e uma técnica elegante que por acaso lhes seja aplicável pode não ter a mínima utilidade no caso geral. Há tendência para que isso aconteça quando o caso especial é especial demais. É melhor começarmos com hipóteses modestas, pois assim restingimo-nos tanto quanto possível ao espírito do problema.

No Problema 1.1, podemos tentar o caso especial $d = 0$. Nesse caso precisamos de encontrar o comprimento do lado de um triângulo equilátero de área t. O valor, fácil de calcular, é $b = 2\,t^{1/2}/3^{1/4}$. Isto indica que a solução geral também deve envolver raízes quadradas ou raízes quartas, mas tirando isso não nos sugere como abordar o problema. A consideração de problemas análogos também pouco ajuda, tirando que reforça a convicção de que um ataque algébrico em força é o que é preciso.

Modificar grandemente o problema. Neste tipo de estratégia mais agressiva, submetemos o problema a mudanças importantes como a de subtrair alguns dados, trocar os dados com o objetivo, ou negar o objetivo (por exemplo, tentando provar que uma afirmação é falsa em vez de verdadeira). Em suma, tentamos forçar o problema até que ele quebre, e depois procuramos o lugar onde quebrou; isto identifica quais são as componentes-chave dos dados, e aponta onde se encontram as maiores dificuldades. Estes exercícios também podem ajudar-nos a intuir quais são as estratégias mais promissoras e quais são as mais falíveis.

Em relação ao nosso problema em particular, poderíamos substituir o triângulo por um quadrilátero, um círculo, etc. Não que isto ajude muito: o problema só fica mais complicado. Mas, por outro lado, vemos que não precisamos de um triângulo em nossa questão, mas apenas das medidas do triângulo: não nos faz falta saber sua posição. Isto é mais uma confirmação de que nos devemos concentrar nos lados e ângulos (i.e., a, b, c, α, β, γ) e evitar o uso de coordenadas no plano ou abordagens semelhantes.

Poderíamos omitir alguns objetivos: em vez de calcularmos todos os lados e ângulos ficávamo-nos pelos lados, por exemplo. Mas depois observamos que, pelas leis dos senos e dos cossenos, os ângulos do triângulo ficam determinados em qualquer caso. Portanto só é necessário calcular os lados. Mas sabemos que os lados têm comprimentos $b-d$, b e $b+d$, e por isso só precisamos encontrar b para acabar com o problema.

Poderíamos também omitir alguns dados, como a diferença d entre os lados, mas então ficaríamos com várias soluções possíveis e sem dados suficientes para resolver o problema. Analogamente, omitir a área t também nos deixaria dados insuficientes para especificar uma solução. (Às vezes podemos omitir dados parcialmente, como dizer apenas que a área é maior ou menor do que um certo patamar t_0; mas isto já é complicado. Fiquemo-nos primeiro pelas opções simples.) Mas inverter o problema (trocar os dados pelos objetivos) já conduz a algumas ideias interessantes. Suponhamos que temos um triângulo em que os lados diferem de d, e que queremos encolhê-lo (ou seja lá o que for) até que tenha área t. Podemos imaginar o triângulo a encolher e a ser deformado, mas mantendo a diferença d entre os lados. De modo semelhante, podemos considerar um triângulo com uma área fixa, e moldá-lo até que tenha os lados na progressão aritmética correta. Com tempo, estas ideias poderiam funcionar, mas para resolver o problema usarei outra abordagem. Não esqueçamos, porém, que um problema pode ser resolvido de diversas maneiras, e nenhuma delas pode realmente ser considerada a melhor em absoluto.

Estabelecer resultados sobre o problema. Os dados são para se usarem, e portanto devemos pegar neles e manipulá-los. Será que eles assim produzem mais dados relevantes? Além do mais, estabelecer pequenos resultados pode ser benéfico mais tarde, quando tentarmos demonstrar o resultado principal ou encontrar a resposta. Por muito pequeno que seja o resultado, não o esqueçamos – poderemos vir a aplicá-lo mais tarde. E esse trabalho miúdo dá-nos o que fazer quando estamos emperrados no problema.

Num problema do tipo calcule, como o do triângulo, esta tática não é assim tão útil. Mas podemos tentar. Por exemplo, nossa meta é exprimir b à custa dos parâmetros dados d e t. Por outras palavras, b é na verdade uma função: $b = b(d,t)$. (Se esta notação parece deslocada num problema geométrico, é apenas porque a geometria tende a ignorar a dependência funcional entre os objetos. Por exemplo, a fórmula de Heron nos dá, de forma explícita, a área A em função dos lados a, b, c – ou, em outras palavras, exprime a função $A(a,b,c)$.) Podemos estabelecer alguns mini-resultados sobre esta função $b(d,t)$, por exemplo $b(d,t) = b(-d,t)$ (porque, para cada progressão aritmética, há uma progressão equivalente com razão simétrica da da primeira) ou $b(kd, k^2t) = k\, b(d,t)$ (isto obtém-se dilatando pelo fator k o triângulo com $b = b(d,t)$). Podemos até derivar b em relaÃ§Ã£o a d ou a t. Para este problema em particular, esta tática permite normalizar alguns parâmetros, por exemplo fazendo $t = 1$ ou $d = 1$, e ainda fornece um modo de verificar a solução final. Acontece, porém, que neste problema estes truques só levam a pequenos progressos, e por isso não faremos uso deles aqui.

Simplificar, explorar os dados, atingir metas parciais. Agora que fixamos a notação e dispomos de umas quantas equações, devemos considerar seriamente como atingir as metas parciais que estabelecemos. Em problemas simples, já há em geral procedimentos padrão. (Por exemplo, as simplificações algébricas costumam ser discutidas exaustivamente em textos escolares.) Em geral, esta é a parte mais longa e mais difícil do problema, mas podemos evitar nos perdermos se tivermos em mente os teoremas pertinentes, os dados e o modo de os usar, e – o mais importante – o objetivo. É também boa ideia não aplicar um certo método ou técnica às cegas, mas pensar e tentar prever onde tal método nos levaria; desse modo podemos evitar grandes desperdícios de tempo, eliminando direções de investigação improfícuas antes de esbanjarmos nelas enormes esforços, e dando prioridade às direções mais promissoras.

No Problema 1.1, focalizamo-nos já na fórmula de Heron. Podemos usá-la para atingir nossa meta parcial de uma fórmula para b. Afinal, já sabemos que as leis dos senos e dos cossenos determinam α, β, γ uma vez conhecido b. Como indício adicional de que isto vai ser um passo em frente, notemos que a fórmula de Heron envolve d e t – que são, na prática, todos os nossos dados (já incorporamos na notação o fato de os lados estarem em progressão aritmética). Seja como for, a fórmula de Heron em função de d, t e b fica

$$t^2 = \frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2} - b + d\right)\left(\frac{3b}{2} - b\right)\left(\frac{3b}{2} - b - d\right),$$

o que podemos simplificar para

$$t^2 = \frac{3b^2(b-2d)(b+2d)}{16} = \frac{3b^2(b^2-4d^2)}{16}.$$

Temos agora que tirar o valor de b. O membro direito é um polinômio em b (considerando d e t como constantes), e é de fato de segundo grau em b^2. As equações de segundo grau resolvem-se facilmente: se nos livrarmos do denominador e mudarmos tudo para o mesmo membro, obtemos

$$3b^4 - 12d^2b^2 - 16t^2 = 0$$

e daqui, usando a fórmula resolvente,

$$b^2 = \frac{12d^2 \pm \sqrt{144d^4 + 192t^2}}{6} = 2d^2 \pm \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}t^2}.$$

Visto que b tem que ser positivo, obtemos

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}t^2}}.$$

Como verificação, podemos ver que, quando $d = 0$, isto está de acordo com nosso cálculo anterior de $b = 2\,t^{1/2}/3^{1/4}$. Uma vez calculados os lados $b - d$, b, $b + d$, os valores dos ângulos α, β, γ seguem pelas leis dos senos e dos cossenos, e está feito!