MAT0450 - Seminário de Resolução de Problemas
IME-USP, 1° Semestre de 2018
4° Trabalho em Grupo Presencial

Considere a aplicação $\gamma : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1} \right), \quad t \neq -1.$$

(a) Mostre que, se $(x, y) = \gamma(t)$ para algum $t \neq -1$, então $x^3 + y^3 = 3xy$.

(b) Mostre que, se $(x, y) = \gamma(t)$ para algum $t \neq -1$ e se $x \neq 0$, então $t = \dfrac{y}{x}$.

(c) Mostre que γ é injetora.

(d) Mostre que, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz $x^3 + y^3 = 3xy$, então $(x, y) = \gamma(t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1$.

(e) Mostre que $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ satisfaz $x^3 + y^3 = 3xy$ se, e somente se, $(x, y) = \gamma(t)$ para algum $t \in \mathbb{Q}$, $t \neq -1$.

`Observação`: Em resumo, encontramos todos os pontos racionais do *folium de Descartes* $x^3 + y^3 = 3xy$. Mostramos em particular que esta curva possui infinitos pontos racionais.

MAT0450 - Seminário de Resolução de Problemas
IME-USP, 1° Semestre de 2018
4° Trabalho em Grupo Presencial

Considere a aplicação $\gamma : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1} \right), \quad t \neq -1.$$

(a) Mostre que, se $(x, y) = \gamma(t)$ para algum $t \neq -1$, então $x^3 + y^3 = 3xy$.

(b) Mostre que, se $(x, y) = \gamma(t)$ para algum $t \neq -1$ e se $x \neq 0$, então $t = \dfrac{y}{x}$.

(c) Mostre que γ é injetora.

(d) Mostre que, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz $x^3 + y^3 = 3xy$, então $(x, y) = \gamma(t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1$.

(e) Mostre que $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ satisfaz $x^3 + y^3 = 3xy$ se, e somente se, $(x, y) = \gamma(t)$ para algum $t \in \mathbb{Q}$, $t \neq -1$.

`Observação`: Em resumo, encontramos todos os pontos racionais do *folium de Descartes* $x^3 + y^3 = 3xy$. Mostramos em particular que esta curva possui infinitos pontos racionais.