MAT0450 - SEMINÁRIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
IME-USP, 1° SEMESTRE DE 2018
1° TRABALHO EM GRUPO PRESENCIAL

Seja f uma função definida nos inteiros positivos e tomando valores nos inteiros positivos que satisfaz

$$f(n+1) > f(f(n)), \quad \text{para todo inteiro} \quad n > 0.$$

Note que isto é equivalente à condição $f(n+1) \geq f(f(n)) + 1$ para todo inteiro $n > 0$.

O objetivo deste trabalho é mostrar que $f(n) = n$ para todo inteiro $n > 0$.

(a) Mostre que $f(m) \geq 2$ para todo inteiro $m \geq 2$.

(b) Mostre que, $f(m) \geq n$ para todos os inteiros m e n satisfazendo $m \geq n \geq 1$

(c) Mostre que f é crescente.

(d) Mostre que $f(m) > f(n)$ implica $m > n$.

(e) Mostre que $n + 1 > f(n)$ para todo inteiro $n > 0$.

(f) Mostre que $f(n) = n$ para todo inteiro $n > 0$

`Sugestões`: No item (a), use que $f(m) = f((m-1)+1)$. No item (b), use indução finita sobre n e use que $f(f(m-1)) = f(\,[f(m-1)-1]+1\,)$. No item (c), note de decorre do item (b) que $f(k) \geq k$ para todo $k \geq 1$. Em todos os itens, tente usar as hipóteses e os fatos já demonstrados.