Este exemplo é típico. O fracasso do outro exemplo, o primeiro, também o é. Reexaminando este, podemos verificar que a primeira tentativa não foi tão inútil, pois nos proporcionou alguma idéia. Em particular, deu-nos uma oportunidade de pensar em traçar um triângulo como um meio de atingir o objetivo. Com efeito, chegamos à bem-sucedida segunda tentativa pela modificação da primeira, que foi infrutífera. Variamos c, primeiro aumentando-o e, em seguida, diminuindo-o.

6. Como no exemplo precedente, temos muitas vezes de tentar diversas modificações do problema. Temos de variá-lo, de reformulá-lo, de transformá-lo repetidamente até conseguirmos, finalmente, encontrar alguma coisa de útil. Podemos aprender pelos nossos fracassos: é possível surgir uma boa idéia num ensaio fracassado e, assim, podemos chegar a uma tentativa bem-sucedida pela modificação de uma outra que foi infrutífera.

7. Há certos modos típicos de variação do problema que são particularmente úteis, tais como a volta às DEFINIÇÕES, à DECOMPOSIÇÃO E RECOMPOSIÇÃO, a introdução de ELEMENTOS AUXILIARES, a GENERALIZAÇÃO, a PARTICULARIZAÇÃO e a utilização da ANALOGIA.

8. O que há pouco dissemos (no item 3) acerca de indagações novas capazes de recuperar o interesse, é importante para a boa utilização da nossa lista.

O professor pode utilizar essa lista para ajudar os seus alunos. Se estes progridem, não necessitam de auxílio e o professor não lhes deve fazer qualquer pergunta, mas sim deixá-los trabalhar sozinhos, o que é, obviamente, muito melhor para a sua independência. O professor deve, evidentemente, tentar encontrar alguma questão adequada ou sugestões que possam auxiliar os alunos, quando estes não conseguirem ir adiante, porque aí há o risco de que o estudante se canse e abandone o problema ou perca o interesse e cometa erros tolos como resultado da indiferença.

Podemos utilizar a lista na resolução dos nossos próprios problemas. Para o fazermos adequadamente, procedemos como no caso anterior. Quando o nosso progresso é satisfatório, quando novas observações surgem espontaneamente, seria simplesmente uma estupidez prejudicar esse avanço espontâneo com indagações extemporâneas. Mas quando o progresso fica bloqueado, quando nada nos ocorre, corremos o risco de cansar do problema. Então é tempo de pensar numa idéia geral que nos possa ser de utilidade, em indagações ou sugestões da lista que possam ser apropriadas ao caso. Qualquer questão que tenha possibilidade de mostrar um novo aspecto do problema será bem-vinda; ela poderá reconquistar o interesse e, assim, manter-nos a trabalhar e a pensar.

PARTE 4

Problemas, Indicações, Soluções

Esta parte final oferece ao leitor oportunidades de praticar.

Os problemas não exigem outros conhecimentos preliminares além dos adquiridos num bom curso de 2° grau. No entanto, não são fáceis demais nem constituem simples problemas rotineiros. Alguns deles exigem originalidade e engenho[1].

As indicações conduzem à solução, na maioria das vezes, pela citação de uma frase adequada da lista. Para um leitor muito atento, pronto a aproveitar sugestões, elas poderão revelar a idéia-chave da solução.

As soluções mostram não somente a resposta como também o procedimento que a elas conduz, muito embora, naturalmente, o leitor tenha de contribuir com alguns pormenores. Certas soluções procuram descortinar uma perspectiva ampla por meio de umas poucas palavras finais.

O leitor que haja sinceramente tentado resolver o problema tem a melhor probabilidade de tirar vantagens da indicação e da solução. Se ele chegar ao resultado por seus próprios meios, terá aprendido alguma coisa pela comparação do seu método com o apresentado no livro. Se, após um esforço sério, ficar inclinado a desistir, a indicação poderá fornecer-lhe a idéia que lhe falta. Se nem mesmo a indicação servir-lhe de ajuda, ele poderá olhar a solução, procurar isolar a idéia-chave, pôr de lado o livro e, então, tentar resolver o problema sozinho.

---

1. Exceto quanto ao Problema 1 (bem conhecido, mas muito curioso), todos os outros são extraídos de Exames Competitivos de Matemática, da Universidade Stanford, com algumas pequenas alterações. Alguns dos problemas foram publicados no *The American Mathematical Montly* e/ou no *The California Mathematics Council Bulletin*. Neste último periódico, foram também publicadas, pelo autor, algumas das soluções, que aqui aparecem com as necessárias adaptações.

PROBLEMAS

1. Um urso parte do ponto P e percorre um quilômetro no sentido sul. Em seguida, muda de rumo e anda um quilômetro no sentido leste. Finalmente, muda outra vez de rumo, percorre um quilômetro no sentido norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor do urso?

2. Roberto deseja adquirir um lote de terreno, rigorosamente plano e nivelado, limitado por quatro linhas. Dois dos limites deverão ficar exatamente na direção norte-sul e os dois outros na direção leste-oeste. Cada uma das linhas-limite deverá medir exatamente 100 metros. Será possível encontrar um lote com estas características no estado do Paraná?

3. Roberto tem 10 bolsos e 44 moedas. Ele quer colocar as moedas nos bolsos, mas de tal maneira distribuídas que em cada bolso fique um número diferente de moedas. Será possível consegui-lo?

4. Para numerar as páginas de um grosso volume, o tipógrafo utilizou 2.989 algarismos. Quantas páginas tem o volume?

5. Entre os papéis do vovô foi encontrado um recibo:

72 perus $ - 67,9 -

O primeiro e o último algarismo do número, que evidentemente representava o preço total das aves, aparecem aqui substituídos por espaços em branco porque se apagaram e estão ilegíveis.

Quais serão os algarismos apagados e qual era o preço de um peru?

6. São dados um hexágono regular e um ponto situado no seu plano. Traçar uma reta que passe pelo ponto dado e divida o hexágono dado em duas partes de áreas iguais.

7. É dado um quadrado. Determinar o lugar geométrico dos pontos dos quais o quadrado é visto sob um ângulo (a) de 90°; (b) de 45°. (Seja P um ponto situado fora do quadrado, mas no mesmo plano deste. O menor ângulo com vértice em P que contenha o quadrado é o "ângulo sob o qual o quadrado é visto" de P.) Traçar cuidadosamente ambos os lugares geométricos e descrevê-los completamente.

8. Chama-se "eixo" de um sólido uma reta que liga dois pontos da sua superfície e tal que o sólido, girando em torno dessa linha, em um ângulo superior a 0° e inferior a 360°, coincida com ele mesmo.

Determinar os eixos de um cubo. Descrever claramente a localização desses eixos e calcular o ângulo de rotação de cada um deles. Admitindo que a aresta do cubo tem comprimento unitário, calcular a média aritmética dos comprimentos dos eixos.

9. Num tetraedro (não necessariamente regular), duas arestas opostas têm o mesmo comprimento a e são perpendiculares entre si. Além disso, cada uma delas é perpendicular a uma linha de comprimento b que liga os seus pontos médios. Exprimir o volume do tetraedro em função da a e b e demonstrar a resposta.

10. Numa pirâmide, o vértice oposto à base é chamado *"ápice"*.

(a) Chamemos uma pirâmide de "isósceles" se o seu ápice estiver à mesma distância de todos os *vértices* da base. Adotando esta definição, demonstrar que a base de uma pirâmide isósceles está *inscrita* num círculo cujo centro é o pé da altura da pirâmide.

(b) Chamemos agora de "isósceles" uma pirâmide cujo vértice estiver à mesma distância (perpendicular) de todos os lados da base. Adotando esta definição (diferente da anterior), demonstrar que a base de uma pirâmide isósceles está *circunscrita* a um círculo, cujo centro é o pé da altura da pirâmide.

11. Calcular os valores de x, y, u e v que satisfazem o sistema de quatro equações:

$$\begin{aligned} x + 7y + 3v + 5u &= 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u &= 16 \\ 5x + 3y + 7v + u &= -16 \end{aligned}$$

(Parece demorado e enfadonho: procure um atalho.)

12. Roberto, Pedro e Paulo viajam juntos. Pedro e Paulo são bons andarilhos: cada um deles percorre a pé p quilômetros por hora. Roberto está com um pé machucado e dirige um pequeno carro com capacidade para duas pessoas, mas não três: o carro percorre c quilômetros por hora. Os três amigos adotaram o seguinte esquema: todos parte no mesmo momento, Paulo no carro com Roberto e Pedro a pé. Depois de certo tempo, Paulo salta do carro e passa a andar, enquanto Roberto volta para apanhar Pedro. Estes dois então viajam no carro até alcançar Paulo. Neste

ponto eles trocam: Paulo passa para o carro e Pedro vai a pé, exatamente como começaram a viagem. Todo o processo é repetido quantas vezes se fizerem necessárias.

(a) Quanto percorre, em quilômetros por hora, o grupo?

(b) Que fração do tempo de viagem o carro viaja com uma só pessoa?

(c) Verifique os casos extremos de $p = o$ e $p = c$.

13. Três números estão em progressão aritmética e três outros em progressão geométrica. Somando-se sucessivamente os termos correspondentes dessas duas progressões, obtém-se

$$85, 76 \text{ e } 84$$

respectivamente, e somando-se todos os três termos da progressão aritmética, obtém-se 126. Calcular os termos de ambas as progressões.

14. Determinar para m um valor tal que a equação em x

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

tenha quatro raízes reais em progressão aritmética.

15. O comprimento do perímetro de um triângulo retângulo é 60 centímetros e a altura relativa à hipotenusa é 12 centímetros. Calcular os lados desse triângulo.

16. Do pico de uma montanha divisam-se dois pontos, A e B. As linhas de visada para estes pontos fazem o ângulo γ. As inclinações dessas linhas de visada, em relação a um plano horizontal, são α e β, respectivamente. Sabe-se que os pontos A e B estão no mesmo nível e que a distância entre eles é c.

Expressar a altura x do pico, acima do nível comum a A e B, em função de dois ângulos, α e β, e da distância c.

17. Observando-se que o valor de

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

é $1/2, 5/6, 23/24$ para $n = 1, 2, 3$, respectivamente, inferir a lei geral (pela observação de outros valores, se necessário) é demonstrar a inferência.

18. Considerar a tabela

$$\begin{array}{rcr} 1 & = & 1 \\ 3 + 5 & = & 8 \\ 7 + 9 + 11 & = & 27 \\ 13 + 15 + 17 + 19 & = & 64 \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 & = & 125 \end{array}$$

Inferir a lei geral sugerida por estes exemplos, expressá-la numa notação matemática adequada e demonstrá-la.

19. O lado de um hexágono regular tem o comprimento n (n é um número inteiro). Por paralelas eqüidistantes a seus lados, o hexágono é dividido em T triângulos equiláteros, todos estes com lados de comprimento unitário. Sejam V o número de vértices que aparecem na divisão e L o número de linhas de comprimento unitário. (Uma linha-limite pertence a um ou dois triângulos, um vértice a dois ou mais triângulos.) Quando $n = 1$, que é o caso mais simples, $T = 6$, $V = 7$, $L = 12$. Considerar o caso geral e expressar T, V, L em função de n. (Supor é bom, mas demonstrar é melhor.)

20. De quantas maneiras será possível trocar um dólar? (A "maneira de trocar" ficará determinada quando se souber quantas das moedas divisionárias do dólar – que são 1 centavo, 5 centavos, 10 centavos, 25 centavos e 50 centavos – são utilizadas.)

INDICAÇÕES

1. *Qual é a incógnita?* A cor do urso – mas como determinar a cor de um urso a partir de dados matemáticos? *Quais são os dados?* Uma situação geométrica – mas ela parece contraditória: como poderia o urso, depois de percorrer três quilômetros, na forma descrita, voltar ao *ponto de partida*?

2. *Conhece um problema correlato?*

3. Se Roberto tivesse muitas moedas, naturalmente não teria nenhuma dificuldade em colocar nos bolsos moedas em números diferentes. *É possível reformular o problema?* Qual o menor número de moedas que

pode ser colocado nos 10 bolsos, de modo que não fiquem dois bolsos com o mesmo número de moedas?

4. *Eis um problema correlato:* se o livro contiver nove páginas numeradas, quantos algarismos utilizará o tipógrafo? (nove, é claro). Eis um outro problema correlato; se o livro contiver exatamente 99 páginas numeradas, quantos algarismo utilizará o tipógrafo?

5. *É possível reformular o problema?* Quais serão os dois algarismos apagados se o preço total, expresso em centavos, é divisível por 72?

6. *É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema análogo?* (GENERALIZAÇÃO, 2.)

7. *Conhece um problema correlato?* O lugar geométrico dos pontos dos quais um dado segmento de reta é visto sob um dado ângulo é composto de dois arcos circulares cujas extremidades coincidem com as extremidades do segmento e que são simétricas em relação ao segmento.

8. Presumo que o leitor conheça bem o formato do cubo e tenha encontrado alguns eixos por simples inspeção – mas serão esses todos os eixos? *Pode demonstrar* que a sua relação de eixos é exaustiva? A sua relação é baseada num claro princípio de classificação?

9. *Considere a incógnita!* A incógnita é o volume do tetraedro – sim, sei que o volume de qualquer pirâmide pode ser calculado quando são dadas a base e a altura (é o produto de ambas, dividido por 3), mas no caso presente não é dada a base, nem a altura. *É possível imaginar um problema mais acessível?* (Não vê um tetraedro mais acessível, que seja uma parte alíquota do tetraedro dado?)

10. *Conhece um teorema correlato?* Conhece um *teorema análogo* ... mais simples ... correlato? Sim: o pé da altura é o ponto médio da base de um triângulo isósceles. Eis um *teorema correlato e já antes demonstrado. É possível utilizar ... o seu método?* O teorema relativo ao triângulo isósceles é demonstrado a partir de triângulos congruentes nos quais a altura é um lado comum.

11. Presume-se que o leitor tenha conhecimento sobre sistemas de equações lineares. Para resolver um tal sistema, temos de combinar as suas equações de alguma maneira: procure as relações que existam entre as equações e que possam indicar uma combinação particularmente vantajosa.

12. *Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?* Entre o ponto de partida e o ponto em que os três amigos voltam a se encontrar há três diferentes fases:

(1) Roberto vai com Paulo;

(2) Roberto volta sozinho;

(3) Roberto vai com Pedro.

Chamemos t_1, t_2 e t_3 a duração destas três fases, respectivamente. Como seria possível decompor a condicionante em partes apropriadas?

13. *Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?* Sejam

$$a - d, \qquad a, \qquad a + d$$

os termos da progressão aritmética e

$$bg^{-1}, \qquad b, \qquad bg$$

os termos da progressão geométrica.

14. *Qual é a condicionante?* As quatro raízes devem formar uma progressão aritmética. No entanto, a equação apresenta uma peculiaridade: somente contém potências pares da incógnita x. Portanto, se a for uma raiz, $-a$ também o será.

15. *Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?* Podemos distinguir três partes na condicionante, referentes a

(1) perímetro;

(2) triângulo retângulo;

(3) altura relativa à hipotenusa.

16. *Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?* Sejam a e b os comprimentos (incógnitas) das linhas de visada, α e β as suas respectivas inclinações em relação ao plano horizontal. Podemos distinguir três partes na condicionante, referentes a

(1)inclinação de a;

(2)inclinação de b;

(3)triângulo de lados a, b e c.

17. *Reconhece* os denominadores 2, 6, 24? *Conhece um problema correlato? Um problema análogo?* (INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA.)

18. A descoberta por indução exige a observação. Observe os segundos membros, os termos iniciais e finais dos primeiros membros. Qual é a lei geral?

19. *Trace uma figura.* A observação da figura pode ajudá-lo a descobrir, indutivamente, a lei geral ou por conduzi-lo às relações que existem entre T, V, L e n.

20. *Qual é a incógnita?* Que se deve procurar? Até mesmo o objetivo do problema pode precisar de algum esclarecimento. *É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema análogo?* Eis um problema análogo *muito simples:* de quantas maneiras pode-se pagar a quantia de um centavo? (Há apenas uma maneira.) Eis um problema mais geral: de quantas maneiras pode-se pagar a quantia de n centavos com os cinco tipos de moedas, de 1 centavo, de 5 centavos, de 10 centavos, de 25 centavos e de 50 centavos? Estamos especialmente interessados no caso particular de $n = 100$.

Nos casos particulares mais simples, para pequenos valores de n podemos imaginar a resposta sem necessidade de qualquer método complexo, só por tentativas, por inspeção. Aqui está uma pequena tabela, que o leitor deverá verificar:

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24	25
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9	13.

A primeira linha mostra as quantias a pagar, genericamente chamadas de n.

A segunda linha mostra as correspondentes "maneiras de pagar", genericamente chamadas de E_n. (A razão da escolha desta notação é segredo meu, que ainda não desejo revelar.)

Estamos especialmente interessados em $_{E100}$, mas há poucas esperanças de que possamos calcular E_{100} sem um método claro. Com efeito, o presente problema exige do leitor um pouco mais que os anteriores; é preciso *criar* uma pequena *teoria.*

A nossa questão é genérica (calcular E_n para um n geral, mas é "isolada". *É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema análogo?* Eis um problema análogo *muito simples:* determinar A_n, o número de maneiras de pagar a quantia de n centavos, utilizando apenas moedas de 1 centavo. ($A_n = 1$.)

SOLUÇÕES

1. Está pensando que o urso é branco e que o ponto P é o pólo norte? *É possível demonstrar que isto é certo?* Como ficara mais ou menos entendido, idealizamos a questão. Consideramos o globo terrestre como uma esfera perfeita e o urso como um ponto material móvel. Este ponto, deslocando-se para o sul ou para o norte, descreve um arco de *meridiano* e descreve um arco de *paralelo* quando se desloca para leste. Temos dois casos a distinguir.

(1) Se o urso retorna ao ponto P segundo um meridiano *diferente* daquele que seguiu quando deixou P, P é necessariamente o pólo norte. De fato, o único outro ponto do globo em que dois meridianos se encontram é o pólo sul, mas o urso somente poderia deixar este ponto deslocando-se para o Norte.

(2) O urso poderia voltar ao ponto P pelo mesmo meridiano segundo o qual deixasse P se, ao percorrer um quilômetro no rumo leste ele descrevesse um paralelo n vezes, podendo n ser 1, 2, 3 ... Neste caso, P não seria o pólo norte, mas um ponto situado sobre um paralelo próximo do pólo sul (e cujo perímetro, em quilômetros, seria ligeiramente inferior a $2\pi + 1/n$).

2. Representamos o globo terrestre da mesma maneira que no Problema 1. O terreno que Roberto procura é limitado por dois meridianos e dois paralelos. Imaginem-se dois meridianos fixos, e um paralelo que se *afasta* do Equador: o arco do paralelo móvel, interceptado pelos dois meridianos fixos, vai-se encurtando progressivamente. O centro do terreno que Roberto procura só poderá estar situado sobre o Equador, portanto, ele não poderá o encontrar no Paraná.

3. O menor número possível de moedas num bolso será, evidentemente, 0. O maior número seguinte será pelo menos 1, o maior número seguinte, pelo menos 2, ... e o número de moedas no último (décimo) bolso será pelo menos 9. Portanto, o número mínimo de moedas será

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45.$$

Roberto não vai conseguir: ele só tem 44 moedas.

4. Um volume de 999 páginas numeradas precisa de

$$9 + (2 \times 90) + (3 \times 900) = 2\,889$$

algarismos. Se o grosso volume em questão contiver x páginas

$$2\,889 + 4\,(x - 999) = 2\,989$$

$$x = 1\,024.$$

Este problema nos ensina que uma estimativa preliminar da incógnita pode ser útil (ou mesmo necessária, como no caso presente).

5. Se _679_ é divisível por 72, ele o é tanto por 8 como por 9. Se é divisível por 8, o número 79_ deve ser divisível por 8 (pois 1 000 é divisível por 8) e, assim, 79_ tem de ser 792: o último algarismo apagado é 2. Se _6792 é divisível por 9, a soma de seus algarismos deve ser divisível por 9 (regra dos "noves fora") e, portanto, o primeiro algarismo apagado deve ser 3. O preço de um peru era (no tempo do vovô) \$ 367,92 ÷ 72 = \$ 5,11.

6. *"Um ponto e uma figura com centro de simetria* (num mesmo plano) São dados pelas suas posições. Determinar uma reta que passe pelo ponto dado e seja bissetriz da área da figura dada. "A reta pedida passa, naturalmente, pelo centro de simetria". Ver PARADOXO DA INVENÇÃO.

7. Qualquer que seja a posição, os dois lados do ângulo têm de passar por dois vértices do quadrado. Como passam pelo mesmo par de vértices, o vértice do ângulo desloca-se segundo um mesmo arco de círculo (de acordo com o teorema que fundamenta a indicação). Portanto, cada um dos dois lugares geométricos pedidos é composto por diversos arcos de círculo: por 4 semicírculos no caso (a) e por 8 quadrantes no caso (b). Ver Figura 31.

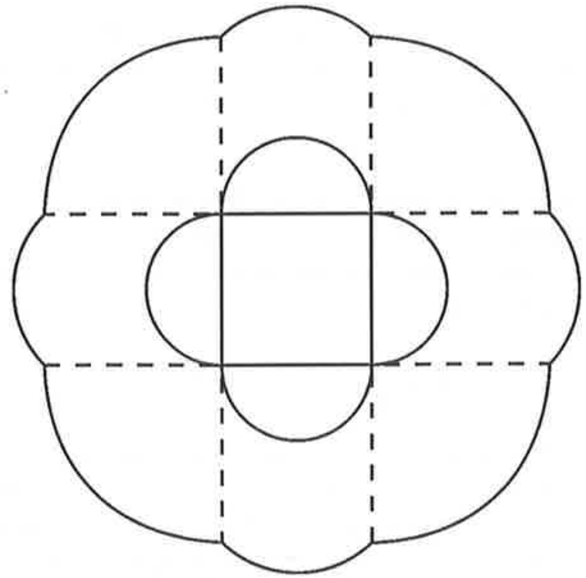

Figura 31.

8. O eixo trespassa a superfície do cubo num certo ponto que ou é um vértice do cubo, ou fica sobre uma aresta, ou no interior de uma face. Se o eixo passa por uma aresta (mas não pelos seus extremos), este ponto é o ponto médio, pois do contrário a aresta não coincidiria com ela própria após a rotação. De modo semelhante, um eixo que perfura o interior de uma face deve passar pelo seu centro. Qualquer eixo deve passar, evidentemente, pelo centro do cubo. Há, portanto, eixos de três tipos:

(1) 4 eixos, cada um passando por dois vértices opostos; ângulos de 120° e 240°;

(2) 6 eixos, cada um passando pelos pontos médios de duas arestas opostas; ângulos de 180°;

(3) 3 eixos, cada um passando pelo centro de duas faces opostas; ângulos de 90°, 180° e 270°.

Para o comprimento de cada eixo do primeiro tipo, ver seção **12**: os outros são ainda mais fáceis de calcular. A média procurada é

$$\frac{4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 3}{13} = 1{,}416.$$

(Este problema é útil no estudo da Cristalografia. O leitor que tenha bons conhecimentos do Cálculo Integral poderá observar que a média calculada constitui uma aproximação razoável para a "largura média" do cubo, que na realidade é 3/2 = 1,5.)

9. O plano que passa por uma aresta de comprimento a e pela perpendicular de comprimento b divide o tetraedro em dois outros tetraedros *mais acessíveis*, cada um dos quais tem por base $ab/2$ e por altura $a/2$. Portanto, o volume procurado

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{ab}{2} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2 b}{6}$$

10. A base da pirâmide é um polígono de n lados. No caso (a), as n arestas laterais da pirâmide são iguais: no caso (b), as alturas (traçadas a partir do ápice) das n faces laterais são iguais. Se traçarmos a altura da pirâmide e ligarmos o seu pé aos n vértices da base no caso (a), mas aos pés das alturas das n faces laterais no caso (b), obteremos, em ambos os casos, *n triângulos retângulos, dos quais a altura* (da pirâmide) *é um lado comum:* posso afirmar que estes n triângulos retângulos são congruentes. De fato, a hipotenusa [uma aresta lateral no caso (a), a altura lateral no caso (b)] tem o mesmo comprimento em ambos, de acordo com as definições propostas no enunciado do problema; apenas acrescentamos que um outro lado (a altura da pirâmide) e um ângulo (reto) são comuns a todos. Nos n triângulos congruentes, os terceiros lados devem também ser iguais; eles são traçado a partir do mesmo ponto (o pé da altura) no mesmo plano (o da base). Além disso, formam n raios de um círculo circunscrito a, ou inscrito na base da pirâmide, respectivamente nos casos (a) e (b). [No caso (b), resta, porém, a demonstrar que os n raios mencionados são perpendiculares aos respectivos lados da base; isto se deduz de um conhecido teorema da Geometria Espacial, relativo a projeções.]

11. Observe-se que a relação existente entre a primeira equação e a última é semelhante à que existe entre a segunda e a terceira: os coeficientes dos termos do primeiro membro são os mesmos, mas na ordem inversa, enquanto que os do segundo membro são opostos. Somando a primeira equação à última e a segunda à terceira:

$$6\,(x + u) + 10\,(y + v) = 0,$$

$$10\,(x + u) + 10\,(y + v) = 0.$$

Este resultado pode ser considerado como um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas, $x + u$ e $y + v$, que facilmente fornece

$$x + u = 0, \qquad y + v = 0.$$

Substituindo u por $-x$ e v por $-y$ nas duas primeiras equações do sistema original encontramos

$$-4x + 4y = 16$$

$$6x - 2y = -16.$$

Este sistema simples fornece

$$x = -2, \quad y = 2, \quad u = 2, \quad v = -2.$$

12. Entre o ponto de partida e o ponto de encontro, os três amigos percorreram a mesma distância. (Lembre-se: distância = velocidade x tempo.) Distinguimos duas partes na condicionante:

Roberto percorreu a mesma distância que Paulo:

$$ct_1 - ct_2 + ct_3 = ct_1 + pt_2 + pt_3.$$

Paulo percorreu a mesma distância que Pedro:

$$ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3.$$

A segunda equação fornece

$$(c - p)\, t_1 = (c - p)\, t_3.$$

Admitimos, é claro, que o carro é mais rápido que um pedestre, portanto $c > p$. Donde

$$t_1 = t_3;$$

isto é, Pedro anda tanto quanto Paulo. Da primeira equação, concluímos que

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{c + p}{c - p}$$

que é, evidentemente, também o valor de t_1/t_2. Daí, obtemos as respostas

(a) $$\frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c + 3p)}{3c + p}$$

(b) $$\frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c - p}{3c + p}$$

(c) De fato, $0 < p < c$. Há dois casos extremos:

Se $p = 0$, (a) fornece $c/3$ e (b) fornece 1/3.

Se $p = c$, (a) fornece c e (b) fornece 0.

Estes resultados são fáceis de verificar sem o auxílio de cálculos.

13. A condicionante é facilmente decomposta em quatro partes, e expressas pelas quatro equações:

$$\begin{aligned} a - d + bg^{-1} &= 85 \\ a + b &= 76 \\ a + d + bg &= 84 \\ 3a &= 126. \end{aligned}$$

Da última equação extrai-se $a = 42$, e da segunda $b = 34$. Somando-se as duas equações restantes (para eliminar d), obtém-se

$$2a + b\,(g^{-1} + g) = 169.$$

Como a e b já são conhecidos, temos agora uma equação quadrática em g, que fornece

$$g = 2, \qquad d = -26 \qquad \text{ou} \qquad g = 1/2, \qquad d = 25.$$

As progressões são

68, 42, 16   17, 42, 67

ou

17, 34, 68   68, 34, 17

14. Se a e $-a$ forem raízes de menor valor absoluto, elas serão consecutivas na progressão, a qual terá a forma

$$-3a, \qquad -a, \qquad a, \qquad 3a.$$

Portanto, o primeiro membro da equação deverá assumir a forma

$$(x^2 - a^2) \qquad (x^2 - 9a^2).$$

Efetuando a multiplicação e comparando os coeficientes de potências iguais, obtemos o sistema

$$10a^2 = 3m + 2$$

$$9a^4 = m^2.$$

Por eliminação

$$19\,m^2 - 108m - 36 = 0.$$

De onde $m = 6$ ou $-6/19$.

15. Sejam a, b e c os lados, sendo o último a hipotenusa. As três partes da condicionante são expressas por

$$a + b + c = 60$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$ab = 12c.$$

Observando-se que

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

obtém-se

$$(60 - c)^2 = c^2 + 24c.$$

Portanto, $c = 25$ e $a = 15$, $b = 20$ ou $a = 20$, $b = 15$ (não faz diferença quanto ao triângulo).

16. As três partes da condicionante são expressas por

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{a},$$
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{x}{b},$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

A eliminação de a e b fornece

$$x^2 = \frac{c^2 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta\cos\gamma}$$

17. Supomos que

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \; .... \; + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Seguindo o modelo da INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, indagamos: a fórmula suposta permanecerá verdadeira quando passamos do valor n para o valor seguinte $n + 1$? Juntamente com a fórmula acima, deveremos ter

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \; ... \; + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Verifique, subtraindo esta última da anterior

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = -\frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

que se reduz a

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

e esta última equação é evidentemente verdadeira para $n = 1, 2, 3$ ... de onde, seguindo o modelo acima referido, podemos demonstrar a nossa suposição.

18. Na *enésima* linha, o segundo membro parece ser n^3 e o primeiro membro parece ser a soma de n termos. O termo final dessa soma é o enésimo número ímpar, ou $2m - 1$, em que

$$m = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ver INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, 4. Portanto, o termo final da soma do primeiro membro deverá ser

$$2m - 1 = n^2 + n - 1.$$

Podemos deduzir de duas maneiras o termo inicial da soma considerada: voltando dois passos, a partir do termo final, encontramos

$$(n^2 + n - 1) - 2\,(n - 1) = n^2 - n + 1$$

enquanto que, avançando um passo, a partir do termo final, chegamos a

$$[(n - 1)^2 + (n - 1) - 1] + 2$$

o que, por simplificação rotineira, reduz-se à mesma coisa: excelente! Podemos, pois, afirmar que

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 + n - 1) = n^3$$

na qual o primeiro membro indica a soma de n termos sucessivos de uma progressão aritmética cuja razão é 2. Se o leitor conhecer a regra para determinar a soma de uma tal progressão (a média aritmética dos termos inicial e final multiplicada pelo número de termos), poderá verificar que

$$\frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2}\,n = n^3$$

e assim demonstrar a afirmativa.

(A regra citada pode ser facilmente demonstrada com o auxílio de uma figura que pouco difere da 18.)

19. O comprimento do perímetro do hexágono regular de lado n é $6n$. Portanto, este perímetro é composto de linhas-limite de comprimento unitário e contém $6n$ vértices. Por conseguinte, na transição de $n - 1$ para n, V aumenta de $6n$ unidades e, assim,

$$V = 1 + 6\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 3n^2 + 3n + 1;$$

Ver INDUÇÃO E INDUÇÃO MATEMÁTICA, 4. Por três diagonais que passam pelo seu centro, o hexágono fica dividido em seis (grandes) triângulos eqüiláteros. Examinando-se um deles, verifica-se que

$$T = 6\,(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = 6n^2$$

(de acordo com a regra para a soma dos termos de uma progressão aritmética, mencionada na solução do problema 18). Os T triângulos têm, em conjunto, $3t$ lados. Neste total $3T$, cada linha divisória interna é contada duas vezes, enquanto as $6n$ linhas de perímetro são contadas de uma só vez. Daí

$$2L = 3T + 6n, \qquad L = 9n^2 + 3\text{n}.$$

(Para os leitores mais adiantados: do teorema de Euler referente aos poliedros, segue-se que $T + V = L + 1$. Verifique esta relação!)

20. Eis um conjunto bem ordenado de problemas análogos: calcula A_n, B_n, C_n, D_n e E_n. Cada uma destas grandezas representa o número de maneiras pelas quais se pode pagar a quantia de n centavos; a diferença está nas moedas para isso utilizadas:

A_n apenas moedas de 1 centavo
B_n moedas de 1 e de 5 centavos
C_n moedas de 1, de 5 e 10 centavos
D_n moedas de 1, de 5, de 10 e de 25 centavos
E_n moedas de 1, de 5, de 10, de 25 e de 50 centavos.

Os símbolos E_n (agora está claro o motivo) e A_n já foram usados antes.
Todos os modos e maneiras de pagar a quantia de n centavos com os cinco tipos de moedas estão enumerados em E_n. Podemos, no entanto, distinguir duas possibilidades:

Primeira. Nenhuma moeda de 50 centavos é utilizada. O número de maneiras de assim fazer o pagamento é D_n, por definição;

Segunda. É utilizada uma moeda de 50 centavos (possivelmente mais de uma). Depois de ser entregue a primeira moeda de 50 centavos, faltará a pagar a quantia de $n - 50$ centavos, o que pode ser feito de exatamente E_{n-50} maneiras.

Inferimos que

$$E_n = D_n + E_{n-50}.$$

Analogamente,

$$D_n = C_n + D_{n-25},$$

$$C_n = B_n + C_{n-10},$$

$$B_n = A_n + B_{n-5}.$$

Um pouco de atenção revelará que estas fórmulas permanecerão válidas se fizermos

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

(o que, evidentemente, faz sentido) e considerarmos qualquer uma das quantidades A_n, B_n ... E_n como iguais a zero quando o seu índice for negativo. (Por exemplo, $E_{25} = D_{25}$, como se vê imediatamente, o que está de acordo com a nossa primeira fórmula, pois $E_{25-50} = E_{-25} = 0$.)
As nossas fórmulas permitem-nos calcular as quantidades *regressivamente*, isto é, voltando a valores mais baixos de n ou a letras anteriores do alfabeto. Por exemplo, podemos calcular C_{30} por simples soma se C_{20} e B_{30} já forem conhecidos. Na tabela abaixo, a linha inicial corresponde a A_n, e a coluna inicial corresponde a 0, somente contém números iguais a 1. (Por quê?) A partir desses números iniciais, calculamos regressivamente os outros, por simples somas: qualquer número da tabela é igual, quer ao número que lhe fica acima, quer à soma de dois números: o que lhe fica acima e um outro situado à sua esquerda. Por exemplo:

$$C_{30} = B_{30} + C_{20} = 7 + 9 = 16.$$

Efetuam-se as contas até $E_{50} = 50$: *pode-se pagar a quantia de 50 centavos de exatamente 50 maneiras diferentes.* Levando adiante as contas, o leitor poderá verificar por si próprio que $E_{100} = 292$: *é possível trocar um dólar de 292 maneiras diferentes.*

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
En	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50