

MAT 0450 - TURMA 47 - 1º SEMESTRE DE 2017

SEMINÁRIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1ª Lista de Problemas

1) Considere a seguinte maneira de construir um quadrilátero $A'B'C'D'$ a partir de um quadrilátero convexo $ABCD$. O quadrilátero $ABCD$ é percorrido no sentido anti-horário e, a partir de cada vértice atingido no percurso, prolonga-se o lado recém-percorrido, construindo-se um segmento de mesmo comprimento que esse lado. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por A' , B' , C' e D' , de modo que os novos segmentos sejam, então, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$. Assim se obtém o quadrilátero $A'B'C'D'$.

(a) Seja $A'B'C'D'$ um quadrilátero que pode ser construído dessa maneira. Mostre que é único o quadrilátero a partir do qual ele pode ser construído. **Sugestão:** use vetores.

(b) Seja $A'B'C'D'$ um **paralelogramo** que pode ser construído dessa maneira. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ que lhe deu origem também é um paralelogramo.

Sugestão: mostre que os pontos A , B , C e D são interseções de segmentos que ligam os vértices do paralelogramo $A'B'C'D'$ a pontos médios de seus lados.

2) A partir de um vértice de um icosaedro regular de aresta a e sobre cada uma das arestas que concorrem nesse vértice, assinalam-se os pontos que estão a uma distância $\frac{a}{3}$ desse vértice. Esses cinco pontos e o vértice formam uma pirâmide de base pentagonal. Repete-se o procedimento em todos os vértices. Chame de P o poliedro que se obtém retirando-se do icosaedro essas 12 pirâmides.

(a) Calcule os números de faces, de arestas e de vértices de P .

(b) Calcule o número de diagonais de P (por definição, uma diagonal de um poliedro é um segmento que une dois vértices que não pertencem a uma mesma face).

3) Mostre que, se n é um natural e se k é um ímpar maior do que 1, então $n^4 + 4^k$ não é primo. **Sugestão:** fatore um polinômio.

4) Dados n e m naturais, mostre que 13 divide $2n + 7m$ se e somente se 13 divide $n + 10m$.