1. Introdução

1.1 O que é Combinatória ?

O que é Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória? A maior parte dos alunos do 2º grau responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações. Isso no entanto é uma resposta parcial pois, embora combinações, arranjos e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto, a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de Análise Combinatória. Pelo menos uma delas, o princípio das gavetas de Dirichlet, é mais simples ou pelo menos tão simples quanto o estudo das combinações, arranjos e permutações.

De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em

Análise Combinatória são:

1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições
2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Por que privilegiar o estudo das combinações, arranjos e permutações em um primeiro curso de Análise Combinatória?

Em primeiro lugar, entre os vários tipos de "números para contagem" da Análise Combinatória, eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória. Outra razão para seu estudo é a aplicabilidade desses números a problemas de probabilidades finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória.

Por outro lado, se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

1.2 Um pouco de História

O desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. O caso $n = 2$ já pode ser encontrado nos *Elementos* de Euclides, em

torno de 300 a.C. O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China, (em torno de 1300) e antes disso pelos hindus e árabes. O matemático hindu Báskhara (1114-1185?), conhecido geralmente pela "fórmula de Báskhara" para a solução de equações do 2º grau, sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos. O mesmo aconteceu com o matemático e filósofo religioso francês Levi ben Gerson (1288-1344), que nasceu e trabalhou no sul da França, e que, entre outras coisas, tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides. O nome coeficiente binomial foi introduzido mais tarde por Michael Stifel (1486?-1567), que mostrou, em torno de 1550, como calcular $(1+x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1+x)^{n-1}$. Sabemos também que o matemático árabe Al-Karaji (fins do século X) conhecia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal,

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p.$$

O primeiro aparecimento do triângulo de Pascal no Ocidente foi no frontispício de um livro de Petrus Apianus (1495-1552). Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1559) relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências de $(x+y)$. Pascal (1623-1662) publicou um tratado em 1654 mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$. Jaime Bernoulli (1654-1705), em seu *Ars Conjectandi*, de 1713, usou a interpretação de Pascal para demonstrar que

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

A segunda parte deste livro de Jaime Bernoulli é dedicada à teoria das combinações e permutações.

Isaac Newton (1646-1727) mostrou como calcular diretamente $(1+x)^n$ sem antes calcular $(1+x)^{n-1}$. Ele mostrou que cada coeficiente pode ser determinado, usando o anterior, pela fórmula

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$$

Em verdade, Newton foi além disso, e mostrou como desenvolver $(x+y)^r$, onde r é um número racional, obtendo neste caso um desenvolvimento em série infinita.

Uma outra direção de generalização do teorema do binômio é considerar potências da forma

$$(x+y+\cdots+z)^n,$$

o chamado *teorema mutinomial*, que foi descoberto por Leibniz (1646-1716) e demonstrado também por Johann Bernoulli (1667-1748).

Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) mostraram como achar diretamente os números de Fibonacci*, sem ser necessário calcular todos eles, até o que desejamos. Para isso, De Moivre utilizou pela primeira vez uma técnica extremamente poderosa, a das funções geradoras. Esta técnica, muito útil para estudar sucessões recorrentes, foi bastante desenvolvida por Euler (1707-1783), em seu livro clássico *Introductio in Analysin Infinitorum*, onde ele a utiliza para atacar o problema das partições de um inteiro. O interesse de Euler por este problema surgiu devido a uma pergunta que lhe foi feita pelo matemático francês Phillipe Naudé, que trabalhava em Berlim, em uma carta, na qual, entre outras coisas, perguntava de quantas maneiras um número pode ser escrito como soma de inteiros positivos distintos. Esta pergunta, prontamente respondida por Euler, foi a origem da "teoria das partições" ou "partitio numerorum", como escreveu Euler. Mas suas contribuições à Análise Combinatória não se limitaram a isso. Várias obras suas, muitas delas sobre probabilidades, contêm resultados importantes da Análise Combinatória. Em particular, devemos a ele o enunciado e a solução do *Problema das Sete Pontes de Königsberg*, um teorema da *Teoria dos Grafos*, parte muito importante, atualmente, da Análise Combinatória.

---

*Fibonacci, também conhecido por Leonardo de Pisa (1175?-1250?)

A Análise Combinatória tem tido um crescimento explosivo nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração tem crescido enormemente, devido a necessidades em teoria dos grafos, em análise de algoritmos, etc. Muitos problemas importantes podem ser modelados matematicamente como problemas de teoria dos grafos (problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores, e também problemas de matemática "pura", como o famoso *problema das 4 cores*).

Já em 1937 o matemático húngaro-americano George Pólya (1887-1985) introduziu nova e importante técnica de enumeração, que se tem prestado às mais variadas aplicações, permitindo tratar, de maneira unificada, desde a enumeração do número de isômeros de uma substância, até a enumeração de grafos, principalmente árvores, resolvendo problemas que até então eram atacados somente por métodos "ad hoc". Como disse Pólya, sua teoria é uma maneira de enumerar configurações não- equivalentes relativamente a um grupo de permutações dado. Um exemplo simples de aplicação da teoria do Pólya é o de determinar o número de tetraedros regulares "diferentes" com faces pintadas com duas cores, preto e branco, por exemplo. Podemos ter um tetraedro todo preto, outro todo branco, um com uma face branca e as outras pretas, etc. Dois tetraedros são considerados "diferentes" se um deles não pode ser obtido do outro por meio de rotações.

Outra teoria importante de Combinatória foi criada pelo lógico inglês F. P. Ramsey (1903-1930); ela garante a existência de certas configurações. Um dos exemplos mais simples do chamado teorema de Ramsey afirma que se tivermos no plano um conjunto de n pontos, com $n \geq 6$, no qual não há três pontos colineares, então, se unirmos todos os pontos dois a dois, usando duas cores distintas, por exemplo preto e branco, para traçar os segmentos de reta que unirão os pontos, então forçosamente teremos formado um triângulo cujos lados são todos da mesma cor (preto ou branco).

Diz-se geralmente que a Teoria das Probabilidades originou-se com Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), devido à curiosidade de um cavalheiro, o Chevalier de Méré, jogador apaixonado, que em cartas discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em certo jogos de cartas. Despertado seu interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-se com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas.

Mas em verdade a teoria elementar das probabilidades já tinha sido objeto de atenção bem antes. Levando em conta o fascínio que os jogos de azar sempre exerceram sobre os homens, estimulando-os a achar maneiras seguras de ganhar, não é de espantar que muito cedo problemas relativos a jogos de cartas ou de dados tenham atraído a atenção de pessoas com mentes mais especulativas. Já na *Divina Comédia*, de Dante Alighieri (1265-1321), há uma referência a probabilidades em jogos de dados. Em verdade, o desenvolvimento da Análise Combinatória deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades.

A primeira obra conhecida em que se estudam as probabilidades é o livro *De Ludo Aleae*, (*Sobre os jogos de Azar*), de Jerônimo Cardano (1501- 1576), publicado em 1663. É possível que o interesse de Cardano pelo assunto se deva a sua paixão pelos jogos de azar. Nas palavras de Isac Todhunter, em sua *História da Teoria Matemática da Probabilidade*, "O livro pode ser bem descrito como um manual para jogadores. Contém muito sobre jogos, com descrições de jogos e com as preocupações que se deve ter para se proteger de adversários dispostos a trapacear; a discussão relativa às probabilidades são parte pequena de seu tratado". Uma tradução para o inglês moderno do livro de Cardano encontra-se no livro *Cardano, the Gambling Scholar*, de Oysten Ore.

Na parte dedicada à probabilidade Cardano mostra, entre outras coisas, de quantas maneiras podemos obter um número, lançando dois dados. Assim, por exemplo, 10 pode ser obtido de 3 maneiras: 5 em cada dado, 6 no primeiro e 4 no segundo, e 4 no primeiro e 6 no segundo.

Além de Cardano, Johannes Kepler (1571-1630) fez algumas observações sobre probabilidades, em um livro publicado em 1606 (*De Stella nova in pede Serpentarii*), em que estuda as diferentes opiniões sobre o apararecimento de uma estrela brilhante em 1604.

Também Galileu (1564-1642) preocupou-se com as probabilidades, estudando os jogos de dados, para responder à pergunta de um amigo: Com três dados, o número 9 e o número 10 podem ser obtidos de seis maneiras distintas, cada um deles. No entanto, a experiência mostra que 10 é obtido mais frequentemente do que 9. Como explicar isso? Galileu estudou cuidadosamente as probabilidades envolvidas e mostrou, corretamente que, de 216 casos possíveis, 27 são favoráveis ao aparecimento do número 10 e 25 são favoráveis ao aparecimento do número 9.

Malgrado investigações destes precursores, a Teoria das Probabilidades só começa a se desenvolver realmente a partir dos trabalhos de Pascal. Já vimos como Pascal estudou o triângulo aritmético que leva seu nome. Ele o aplicou ao estudo dos jogos de cartas.

Christian Huygens (1629-1695) publicou em 1657 o primeiro tratado de Teoria das Probabilidades, o *De Ratiociniis in Ludo Aleae*.

A Teoria das Probabilidades não despertou logo grande interesse entre os matemáticos que se seguiram a Pascal e Fermat, os quais estavam atraídos pelas investigações relativas ao cálculo, criado por Newton e Leibnitz. No entanto, percebeu-se imediatamente a utilidade da Teoria das Probabilidades para estudar situações como taxas de mortalidade, prêmios de seguros, etc. São inúmeras, ainda no século XVIII, as publicações estatísticas sobre impostos, doenças, condenações, etc., organizadas pelos governos, que viram logo o poder deste instrumento de observação social. Em 1662, John Graunt (1620-1674) utiliza os registros de falecimentos para determinar a taxa de mortalidade em Londres. Passou-se em seguida a utilizar a idéia de Graunt no cálculo de rendas vitalícias, que dependem da esperança de vida. A primeira tentativa séria de cálculo de rendas vitalícias é devida a Johan de Witt (1625-1672) juntamente com Johan Hudde (1628-1704), prefeito de Amsterdam, que consultavam frequentemente Huygens sobre o problema.

Outros se interessaram por este problema. O astrônomo Edmund Halley (1656-1742) publicou uma tabela de taxas de mortalidade em 1693, posteriormente utilizada por De Moivre. Euler (1710-1761) e Simpson (1687-1768) também estudaram este problema, que envolve matemática, economia e política. Os primeiros resultados estatísticos realmente utilizados (por quase um século, pelas companhias de seguros inglesas), são as tabelas calculadas por Richard Price (1723-1791) em 1780, utilizando os registros de falecimento da diocese de Northampton.

No famoso livro de Jaime Bernoulli, *Ars Cnjectandi*, que já citamos, encontramos um teorema de importância decisiva em Teoria das Probabilidades. Conhecido como Teorema de Bernoulli, é também chamado de *Lei dos Grandes Números*, nome que lhe foi dado pelo matemático francês Siméon Poisson (1781-1840). Este teorema foi a primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir de probabilidades. Ele afirma, por exemplo, que se dois eventos são igualmente prováveis, após um grande número de experimentos eles terão sido obtidos aproximadamente o mesmo número de vezes. O teorema permite também deduzir qual a probabilidade de cada um dos eventos acontecer, sabendo como se comportaram em um grande número de experimentos. A Lei dos Grandes Números deu origem a discussões conceituais ou filosóficas sobre o conceito de probabilidade.

Jaime Bernoulli foi o primeiro de uma longa linhagem de matemáticos e sábios de uma família suíça. Seu diário mostra que ele começou a interessar-se pelos problemas de combinatória e de probabilidades em torno de 1685. Manteve longa correspondência sobre o assunto com Leibniz, que levantava objeções ao Teorema de Bernoulli.

Outro matemático que muito se dedicou à teoria das probabilidades e que, possivelmente, só perde para Laplace (1749-1827) em contribuições ao assunto, foi Abraham De Moivre. Protestante francês, foi obrigado a refugiar-se em 1685 na Inglaterra, onde viveu até sua morte. Matemático versátil, com trabalhos importantes em vários campos, era muito respeitado. Newton, por exemplo, já em seus últimos anos de vida, ao lhe perguntarem sobre um problema de matemática, respondeu "procure o Sr. De Moivre, ele conhece estas coisas melhor do que eu".

Além de várias investigações sobre probabilidades, De Moivre escreveu um tratado sobre o assunto que foi usado durante muito tempo, o *Doutrina do Acaso*, em que estão incluídos muitos de seus trabalhos. Em particular, ele desenvolve a teoria das sucessões recorrentes, e a usa para resolver vários problemas de probabilidades.

Devemos ainda citar o matemático inglês Thomas Bayes (1702- 1761), que iniciou as investigações sobre o problema de achar as probabilidades das causas de um evento observado.

A Teoria das Probabilidades contém muitos problemas interessantes, alguns dos quais conduzem a resultados inesperados ou à primeira vista paradoxais. Tem também dado origem a discussões filosóficas sobre o que é o acaso, o que são probabiidades, etc. Um problema interessante, muito conhecido, é o chamado problema da agulha de Buffon*: Considere uma área plana, dividida em faixas de larguras iguais, a, por retas paralelas. Lance sobre esta região, ao acaso, uma agulha de comprimento $2r$, com $2r < a$. Qual a probabilidade de que a agulha corte uma das paralelas? O resultado, surpreendente à primeira vista, é $4r/\pi a$.

Certamente o matemático que mais contribuiu para a teoria das probabilidades foi Laplace, famoso também por suas con-

*Georges Louis Leclere, Conde de Buffon (1707-1783), naturalista francês tribuições a outras áreas da matemática, como a mecânica analítica, onde atacou o problema da estabilidade do sistema solar. Seus inúmeros trabalhos sobre as probabilidades foram incorporados em seu monumental Tratado Analítico das Probabilidades, onde são discutidos inúmeros problemas de probabilidades, introduzidas técnicas poderosas, como a das funções geradoras, aproximações para probabilidades usando os métodos do cálculo integral, etc. Encontramos neste trabalho, em particular, a integral

$$\int e^{-t^2} dt,$$

relacionada com a Distribuição Normal.

1.3 Conjuntos

Certamente o leitor desta monografia está familiarizado com os rudimentos da teoria dos conjuntos. Assim, o propósito deste capítulo é simplesmente revisar rapidamente essas noções básicas e, ao mesmo tempo, fixar a notação que usaremos nos capítulos posteriores.

Letras maiúsculas, como por exemplo $A, B, \ldots, Y, Z$, indicarão conjuntos. A letra grega Ω (ômega) representará o *conjunto universal* em uma situação determinada. Letras minúsculas $a, b, \ldots, y, z, w$, indicarão *elementos* desses conjuntos.

A relação de pertencer será indicada pela letra grega $\in$ e escreveremos por exemplo, $a \in A$. O conjunto vazio será representado pela letra ϕ. Um conjunto com um número reduzido de elementos será indicado simplesmente listando seus elementos. Por exemplo, o conjunto que consiste nos números 1, 2 e 3 será representado por

$$A = \{1, 2, 3\};$$

$\{1\}$ representa o conjunto que tem como único elemento o número 1. Um conjunto pode também ser descrito por uma propriedade π, comum a todos os seus elementos, e escreveremos

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } \pi\}.$$

Por exemplo,

$$A = \{x \mid x = 2k, \ k = 1, 2, \ldots\}$$

descreve o conjunto dos inteiros pares positivos. Usaremos o símbolo $\#A$ para representar o número de elementos do conjunto A, isto é, a cardinalidade de A.

Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, diremos que A é um *subconjunto* de B e escreveremos simbolicamente $A \subset B$. Se $A \subset B$ mas existe um elemento $b \in B$ tal que $b \notin A$, (b não pertence a A), diremos que A é um *subconjunto próprio* de B. A Figura 1.1 ilustra esta situação. Observe que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A. Com efeito, se isso não fosse verdade, deveria haver um elemento $x \in \phi$ tal que $x \notin A$, o que é impossível.

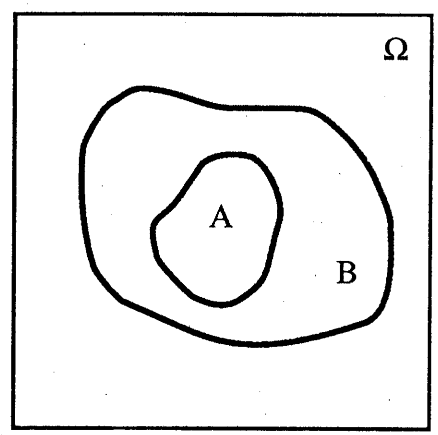

Fig. 1.1

Dados dois conjuntos A e B indicaremos por $A \cup B$ o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B, isto é, o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B. Este conjunto é chamado *união* de A com B. Simbolicamente,

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \quad \text{ou} \quad \omega \in B\}.$$

A parte sombreada da Figura 1.2 ilustra o conjunto $A \cup B$.

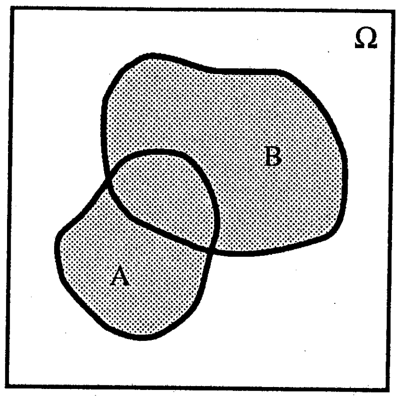

Fig. 1.2

A união de três conjuntos A, B, C será representada por $A \cup B \cup C$.

$$A \cup B \cup C = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \quad \text{ou} \quad \omega \in B \quad \text{ou} \quad \omega \in C\}.$$

Mais geralmente, a união de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é definida analogamente e representada por

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto *intersecção* de A e B como o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B, ou seja,

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \quad \text{e} \quad \omega \in B\}.$$

A parte sombreada da Figura 1.3 ilustra a intersecção de A e B.

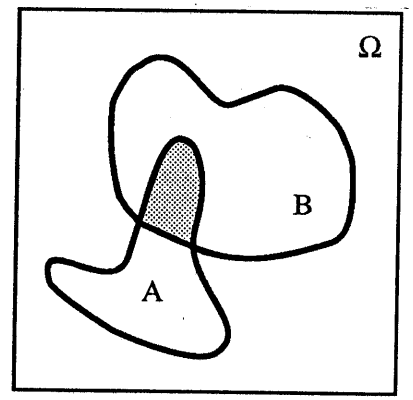

Fig. 1.3

No caso de termos por exemplo três conjuntos, A, B e C, a intersecção é representada por $A \cap B \cap C$:

$$A \cap B \cap C = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \quad \text{e} \quad \omega \in B \quad \text{e} \quad \omega \in C\}$$

A intersecção de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é representada por

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Dizemos que dois conjuntos A e B são *disjuntos* se $A \cap B = \phi$. Quando temos mais de dois conjuntos, dizemos que eles são disjuntos quando forem disjuntos tomados 2 a 2. A Figura 1.4 ilustra o caso de três conjuntos disjuntos.

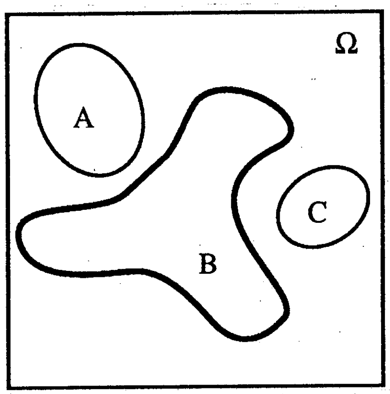

Fig. 1.4

Dados um conjunto A, chamaremos *conjunto complementar* de A o conjunto dos elementos de Ω que não pertencem a A. Simbolicamente

$$A^c = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \notin A\}.$$

A parte sombreada da Figura 1.5 indica o complementar de A.

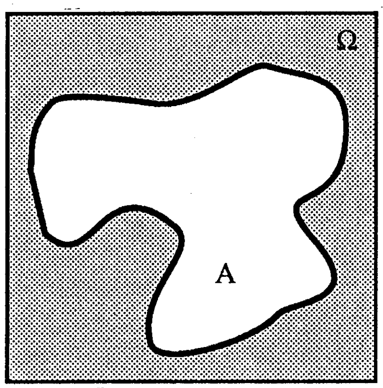

Fig. 1.5

Dados dois conjuntos A e B, o conjunto

$$A \cap B^c = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \quad \text{e} \quad \omega \notin B\}$$

é chamado conjunto *diferença* de A e B, é representado geralmente por $A - B$. A parte sombreada da Figura 1.6 mostra a diferença de A e B.

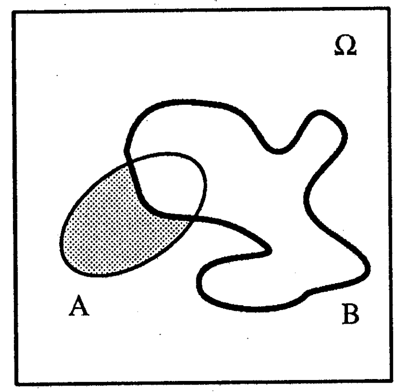

Fig. 1.6

Se $B \subset A$, a diferença $A - B$ é chamada *diferença própria.*

O Teroema 1, a seguir, lista as propriedades mais importantes que relacionam os conceitos definidos anteriormente.

Teorema 1.

1. *Para todo conjunto* $A \subset \Omega$, $A \cup \phi = A$, $A \cap \phi = \phi$.
2. $A \subset B$ *se e somente se* $A \cup B = B$.
3. $A \subset B$ *se e somente se* $A \cap B = A$.
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \phi$, $\phi^c = \Omega$, $\Omega^c = \phi$.
9. $(A^c)^c = A$; $A \subset B$ *se e somente se* $B^c \subset A^c$.
10. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
11. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

A demonstração deste teorema é deixada como exercício.

Introduzimos agora a noção de produto cartesiano de dois conjuntos. Dados dois conjuntos A e B, chamaremos de *produto* *cartesiano* de A por B o conjunto de pares ordenados (a, b), onde a é um elemento de A e b é um elemento de B. Simbolicamente

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, resulta que

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}.$$

O produto cartesiano de três conjuntos é definido de forma semelhante tomando ternos em lugar de pares. Em geral, se temos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é definido como o conjunto das n-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

A última noção deste capítulo é a de partição de um conjunto.

Definição: Seja A um conjunto finito não-vazio. Uma *partição* de A é uma família de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, todos não-vazios, e tais que:

1) $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k = A$
2) $A_i \cap A_j = \phi$ se $i \neq j$.

Ou seja, os conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_k$ são disjuntos dois-a-dois e sua união é o conjunto A. Dizemos também que A foi *particionado* pelos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

2. Combinações e Permutações

2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as ferramentas básicas que nos permitem determinar o número de elementos de conjuntos formados de acordo com certas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas tem seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem.

Por exemplo, a operação de adição é sempre introduzida em conexão com um problema de contagem:

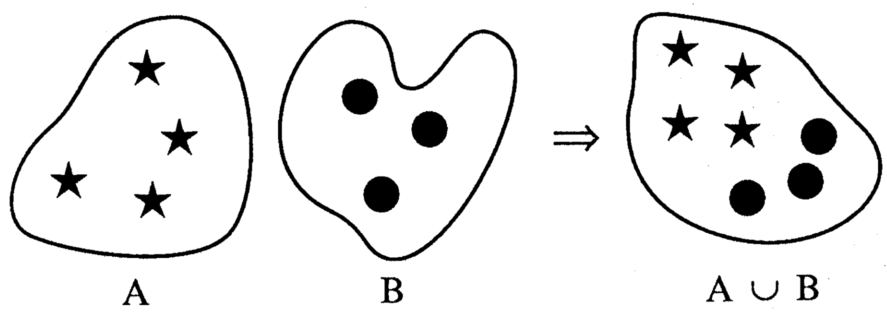

Fig. 2.1

A figura 2.1 ilustra um princípio básico de contagem, que podemos chamar de "Princípio de Adição":

> *Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.*

A seguir apresentamos o "Princípio da Multiplicação", que, ao lado do "Princípio da Adição", constitui a ferramenta básica para resolver os problemas de contagem abordados a nível de 2º grau. Para motivar tal princípio, consideramos o exemplo a seguir.

Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher? Chamando os homens de h_1, h_2, h_3 e as mulheres de m_1, m_2, m_3, m_4 é fácil ver que há 4 casais nos quais o homem é h_1, outros 4 nos quais o homem é h_2 e outros 4 nos quais o homem é h_3. O número de casais é portanto $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$.

O exemplo acima ilustra o *Princípio Fundamental da Enumeração* ou *Princípio da Multiplicação*, o qual diz:

> *Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy.*

Assim, no exemplo, para formar um casal devemos tomar as decisões

d_1 : escolha do homem;
d_2 : escolha da mulher.

Como d_1 pode ser tomada de 3 maneiras e, depois disso, d_2 pode ser tomada de 4 maneiras, o número de maneiras de se formar um casal (isto é, de tomar as decisões d_1 e d_2) é $3 \times 4 = 12$.

Note que o uso do Princípio de Multiplicação permite obter o número de elementos do conjunto

$$\{h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_2m_1, h_2m_2,$$
$$h_2m_3, h_2m_4, h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4\}$$

constituído por todos os casais possíveis, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Exemplo 2.1: Para fazer uma viagem Rio-S.Paulo-Rio, posso usar como transporte o trem, o ônibus ou o avião. De quantos modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

Solução: Há 3 modos de escolher o transporte de ida. Depois disso, há duas alternativas para a volta. A resposta é $3 \times 2 = 6$. □

Exemplo 2.2: Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?

Solução: A primeira listra pode ser colorida de 3 modos, a segunda de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na primeira listra), a terceira de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na segunda listra) e a quarta de 2 modos (não podemos usar a cor empregada na terceira listra). A resposta é $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$. □

Exemplo 2.3: Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Solução: O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o zero!), o segundo algarismo de 9 modos (não podemos usar o algarismo utilizado anteriormente) e o terceiro de 8 modos (não podemos usar os dois algarismos já empregados anteriormente). A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$. □

É interessante observar no exemplo 2.3 que se começássemos pelo último algarismo teríamos 10 modos de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o penúltimo algarismo (não podemos usar o algarismo empregado anteriormente) e ... e agora estamos diante de um problema: de quantos modos podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é: depende! Se o algarismo zero tiver sido usado em alguma das últimas casas, a resposta é 8 (não podemos usar os dois algarismos já utilizados anteriormente). Caso contrário, a resposta é 7 (não podemos usar nem o zero nem os dois algarismos usados anteriormente).

É claro que essa dificuldade não teria ocorrido se tivéssemos começado pela escolha do primeiro algarismo do número, escolha essa que é mais problemática do que a dos dois outros algarismos (o primeiro algarismo não pode ser zero!).

Daí a recomendação:

Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar.

Exemplo 2.4: Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

Solução: Temos:

Último algarismo	$\longrightarrow$	1 modo	(tem que ser 5)
Primeiro algarismo	$\longrightarrow$	3 modos	(não pode ser 5)
Segundo algarismo	$\longrightarrow$	4 modos	
Terceiro algarismo	$\longrightarrow$	4 modos	

A resposta é $1 \times 3 \times 4 \times 4 = 48$. □

Exemplo 2.5: As placas dos automóveis são formadas por duas letras (K, Y e W inclusive) seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?

Solução: Cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos distintos. A resposta é

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6\,760\,000. \quad \square$$

Exemplo 2.6: Quantos são os números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?

Solução: O último algarismo do número pode ser escolhido de 5 modos (0,2,4,6 ou 8). O primeiro algarismo pode ser escolhido de ... depende! Se o zero foi usado como último algarismo, o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o algarismo já empregado na última casa). Se o zero não foi usado como último algarismo, o primeiro algarismo só pode ser escolhido de 8 modos (não podemos usar nem o zero nem o algarismo já empregado na última casa).

Para vencer este impasse, temos duas alternativas:

a) "abrir" o problema em casos (que é a alternativa mais natural). Contamos separadamente os números que têm zero como último algarismo e aqueles cujo último algarismo é diferente de zero.

Terminando em zero temos 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio, num total de $1 \times 9 \times 8 = 72$ números.

Terminando em um algarismo diferente de zero temos 4 modos de escolher o último algarismo (2,4,6 ou 8), 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos usar nem o zero nem o algarismo já usado na última casa) e 8 modos de escolher o algarismo no meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas). Logo, temos $4 \times 8 \times 8 = 256$ números terminados em um algarismo diferente de zero. A resposta é, portanto $72 + 256 = 328$.

b) *Ignorar uma das restrições* (que é uma alternativa mais sofisticada). Ignorando o fato de zero não poder ser primeiro algarismo, teríamos 5 modos de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio, num total de $5 \times 8 \times 9 = 360$ números. Esses 360 númerso incluem números começados por zero, que devem ser descontados. Começando em zero temos 1 modo de escolher o primeiro algarismo (0), 4 modos de escolher o último (2,4,6 ou 8) e 8 modos de escolher o do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas), num total de $1 \times 4 \times 8 = 32$ números. A resposta é, portanto, $360 - 32 = 328$ números.

É claro também que poderíamos ter resolvido o problema determinando todos os números de 3 algarismos distintos ($9 \times 9 \times 8 = 648$) e abatendo os números ímpares de 3 algarismos distintos (5 na última casa, 8 na primeira e 8 na segunda, num total de $5 \times 8 \times 8 = 320$ números). A resposta seria $648 - 320 = 328$ números.

Exercícios

1. Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

2. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?

3. Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?

4. De quantos modos diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem 12 membros?

5. De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

6. Quantos números de quatro dígitos são maiores que 2400 e:

a) têm todos os dígitos diferentes.
b) não têm dígitos iguais a 3,5 ou 6.
c) têm as propriedades a) e b) simultâneamente.

7. O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos. Quantas são as funções $f: A \to B$? Quantas são as funções injetoras $f: A \to B$?

8. Quantos divisores naturais possui o número 360? Quantos são pares?

9. Quantos são os números naturais de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

10. Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?

11. De quantos modos podemos arrumar 8 torres iguais em um tabuleiro de xadrez (8×8) de modo que não haja duas torres na mesma linha nem na mesma coluna?

12. Em uma banca há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?

13. De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

14. Quantos números diferentes podem ser formados multiplicando alguns (ou todos) dos números 1,5,6,7,7,9,9,9?

15. Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?

16. Há duas estradas principais da cidade A até a cidade B, ligadas por 10 estradas secundárias, como na figura 2.2. Quantas rotas livres de auto-interseções há de A até B?

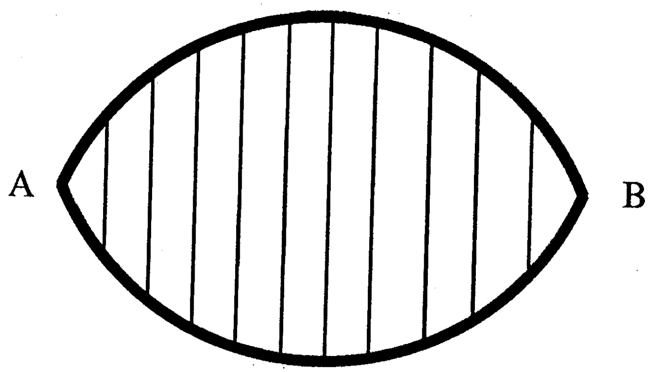

Fig. 2.2

17. Quantos números inteiros entre 100 e 999 são ímpares e possuem três dígitos distintos?

18. Escrevem-se os inteiros de 1 até 222 222. Quantas vezes o algarismo zero é escrito?

19. Quantos são os números de 5 algarismos, na base 10:

a) nos quais o algarismo 2 figura?
b) nos quais o algarismo 2 não figura?

20. Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. De quantos modos os votos podem ser distribuidos?

21. O código morse usa “palavras” contendo de 1 a 4 “letras”, as “‘letras” sendo ponto e traço. Quantas “palavras” existem no código morse?

22. Fichas podem ser azuis, vermelhas ou amarelas; circulares, retangulares ou triangulares; finas ou grossas. Quantos tipos de fichas existem?

23. Escrevem-se números de cinco dígitos (inclusive os começados por zero) em cartões. Como 0,1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo e como 6 de cabeça para baixo se transforma em 9, um só cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de cinco dígitos?

24. No Senado Federal, o Distrito Federal e os 26 estados da federação têm 3 representantes cada. Deve-se formar uma comissão de modo que todos os estados e o Distrito Federal estejam representados por 1 ou 2 senadores. De quantos modos essa comissão pode ser formada?

25. a) Qual é a soma dos divisores inteiros e positivos de 720?

b) De quantos modos 720 pode ser decomposto em um produto de dois inteiros positivos?

c) De quantos modos 720 pode ser decomposto em um produto de três inteiros positivos?

d) De quantos modos 144 pode ser decomposto em um produto de dois inteiros positivos?

26. a) Quantas são as palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra A figura mas não é a letra inicial da palavra?

b) Refaça o item a) suprimindo a palavra *distintas* do enunciado.

27. A figura 2.3 mostra um mapa com 4 países

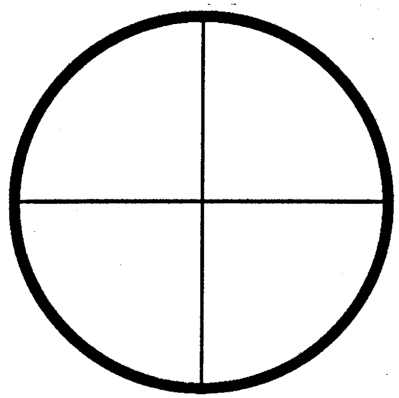

Fig 2.3

a) De quantos modos esse mapa pode ser colorido (cada país com uma cor, países com uma linha fronteira comum não podem ter a mesma cor) se dispomos de λ cores diferentes?

b) Qual o menor valor de λ que permite colorir o mapa?

28. Refaça o problema anterior para o mapa na figura 2.4

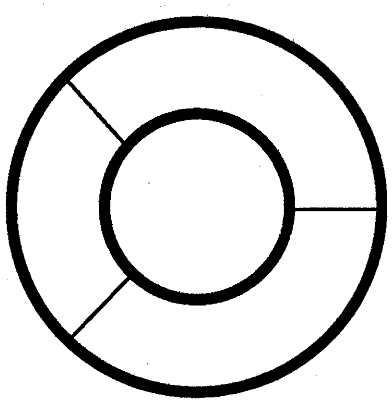

Fig 2.4

29. a) De quantos modos é possível colocar um rei negro e um rei branco em casas não adjacentes de um tabuleiro de xadrez (8×8)?

b) Qual seria a resposta se fossem dois reis brancos iguais?

2.2 Permutações Simples

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de quantos modos é possível ordená-los?

Por exemplo, para os objetos 1,2,3 há 6 ordenações: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. No caso geral temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o que ocupará o segundo lugar, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto,

O número de modos de ordenar n objetos distintos é

$$n(n-1)\cdots 1 = n!$$

Cada ordenação dos n objetos é chamada uma *permutação simples* de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Assim, $P_n = n!$ (Já que $0! = 1$, define-se $P_0 = 1$).

Exemplo 2.7: Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?

Solução: Cada anagrama de PRÁTICO nada mais é que uma ordenação das letras *P, R, A, T, I, C, O*. Assim o número de anagramas de PRÁTICO é $P_7 = 7! = 5040$. □

Exemplo 2.8: Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam e terminam por consoante?

Solução: A consoante inicial pode ser escolhida de 4 maneiras, a consoante final de 3 maneiras e as 5 letaras restantes podem ser arrumadas entre essas duas consoantes de $P_5 = 5!$ modos. A resposta é $4 \times 3 \times 5! = 1440$. □

Exemplo 2.9: De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

Solução: O primeiro rapaz pode escolher seu lugar de 10 modos, o segundo de 8 modos, o terceiro de 6 modos, o quarto de 4 modos e o quinto de 2 modos. Colocados os rapazes, temos que colocar as 5 moças nos 5 lugares que sobraram, o que pode ser feito de 5! modos. A resposta é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 460\,800$. □

Exemplo 2.10: De quantos modos podemos formar uma roda com 5 crianças?

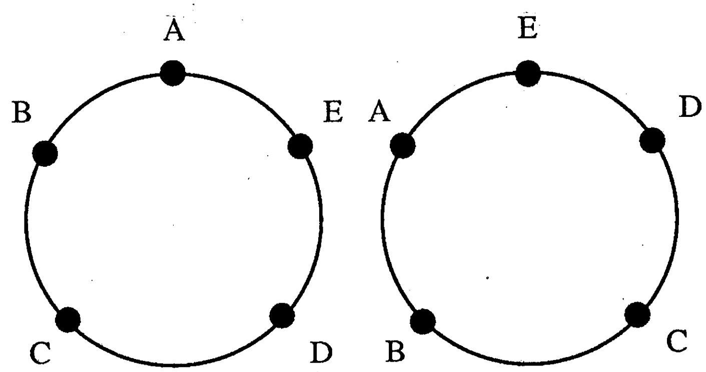

Fig. 2.5

Solução: À primeira vista parece que para formar uma roda com as cinco crianças basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de $5! = 120$ modos. Entretanto, as rodas $ABCDE$ e $EABCD$ são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si e a roda $ABCDE$ pode ser "virada" na roda $EABCD$. Como cada roda pode ser "virada" de cinco modos, a nossa contagem de 120 rodas contou cada roda 5 vezes e a resposta é $120/5 = 24$. □

Exemplo 2.11: De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?

Solução: A divisão pode ser feita colocando as 8 pessoas em fila e dividindo-as de modo que um dos grupos seja formado pelas 4 primeiras pessoas e o outro pelas 4 últimas. Como há 8! modos de colocar as pessoas em fila, a resposta parece ser 8!

Entretanto consideremos a divisão $abcd/efgh$. Ela é idêntica à divisão $efgh/abcd$ (os grupos formados são os mesmos: um grupo é $\{a, b, c, d\}$ e o outro é $\{e, f, g, h\}$). Não obstante, na nossa contagem de 8!, essas divisões foram contadas como se fossem distintas. Além disso, divisões como $abcd/efgh$ e $cadb/efgh$, que diferem pela ordem dos elementos em cada grupo, apesar de idênticas foram contadas como se fossem distintas. Cada divisão foi contada $2 \times 4! \times 4!$ vezes (2 por causa da ordem dos grupos; 4! por causa da ordem dos elementos no 1º grupo e 4! por causa da ordem dos elementos no 2º grupo).

Se contamos 8! divisões e cada divisão foi contada $2 \cdot 4! \cdot 4!$ vezes, o número de divisões é $\frac{8!}{2 \times 4! \times 4!} = 35$. □

Exercícios

1. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

a) que começam por consoante e terminam por vogal?
b) que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?
c) que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?
d) que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
e) que têm a letra C no 1º lugar e a letra A no 2º lugar?
f) que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar?
g) que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar ou a letra P no 3º lugar?

2. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

a) que lugar ocupa o número 62417?
b) qual o número que ocupa o 66º lugar?
c) qual o 200º algarismo escrito?
d) qual a soma dos números assim formados?

3. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

4. Se A é um conjunto com n elementos, quantas são as funções $f: A \to A$ bijetoras?

5. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

6. Quantas são as permutações dos números $(1, 2, \ldots, 10)$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

7. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

a) em dois grupos de 6?
b) em três grupos de 4?
c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?
d) em seis grupos de 2?
e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

8. De quantos modos r rapazes e m moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?

9. Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

10. Um cubo de madeira tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre essas faces?

11. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces indistinguíveis de um cubo de madeira?

12. Resolva o problema anterior para:

a) números de 1 a 4, tetraedro regular;
b) números de 1 a 8, octaedro regular;
c) números de 1 a 12, dodecaedro regular;
d) números de 1 a 20, icosaedro regular;
e) números de 1 a 8, prisma hexagonal regular;
f) números de 1 a 5, pirâmide quadrangular regular.

13. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos de primeira rodada?

14. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k- ésima posição é inferior a $k+4$, para todo k?

15. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k- ésima posição é maior que $k - 3$, para todo k?

2.3 Combinações Simples

De quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados? Ou, o que é o mesmo, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$?

Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma *combinação simples* de classe p dos n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 são

$$\{a_1, a_2, a_3\} \quad \{a_1, a_2, a_4\} \quad \{a_1, a_2, a_5\} \quad \{a_1, a_3, a_4\} \quad \{a_1, a_3, a_5\}$$
$$\{a_1, a_4, a_5\} \quad \{a_2, a_3, a_4\} \quad \{a_2, a_3, a_5\} \quad \{a_2, a_4, a_5\} \quad \{a_3, a_4, a_5\}.$$

O número de combinações simples de classe p de n objetos é representado por C_n^p. Assim, $C_5^3 = 10$.

Analisemos esta resposta: a escolha do 1º elemento da combinação pode ser feita de 5 modos; a do 2º, de 4 modos e a do 3º, de 3 modos. A resposta parece ser $5 \times 4 \times 3 = 60$. Entretanto, se pensarmos numa combinação, por exemplo $\{a_1, a_2, a_3\}$, verificamos que as combinações $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$, etc... são idênticas e foram contadas como se fossem diferentes. Com efeito, se dissemos que há 5 modos de escolher o 1º elemento da combinação é porque estamos considerando as escolhas a_1 e a_2 como diferentes e portanto estamos contando $\{a_1, a_2, a_3\}$ como diferente de $\{a_2, a_1, a_3\}$. Em suma, na resposta 60 estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos. Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes. Logo, a resposta é $60/6 = 10$.

No caso geral temos

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}, \quad 0 < p \leq n,$$

e $C_n^0 = 1$.

Uma expressão alternativa pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p)!$. Obtemos

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

Exemplo 2.12: Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

Solução: Para formar uma salada basta escolher 4 das 10 frutas, o que pode ser feito de $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$ modos. □

Exemplo 2.13: Marcam-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R. Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 13 pontos?

Solução: Para formar um triângulo ou tomamos um vértice em R e dois em R' ou tomamos um vértice em R' e dois em R. O número de triângulos do 1º tipo é $5 \cdot C_8^2$ e o do 2º tipo é $8 \cdot C_5^2$. A resposta é

$$5 \cdot C_8^2 + 8 \cdot C_5^2 = 5 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2!} + 8 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 140 + 80 = 220.$$

Poderíamos também pensar assim:

Para formar um triângulo devemos escolher três pontos, não situados na mesma reta, entre os treze pontos dados. O número de modos de escolher 3 dos 13 pontos é C_{13}^3. Desse total devemos retirar as C_5^3 escolhas de 3 pontos em R e as C_8^3 escolhas possíveis de 3 pontos em R'. A resposta é

$$C_{13}^3 - C_5^3 - C_8^3 = 286 - 10 - 56 = 220. \quad \square$$

Exemplo 2.14: De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?

Solução: As alternativas são:

4 homens, 2 mulheres
3 homens, 3 mulheres
2 homens, 4 mulheres

A resposta é

$$C_7^4 \cdot C_4^2 + C_7^3 \cdot C_4^3 + C_7^2 \cdot C_4^4 = 35 \cdot 6 + 35 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = 371.$$

Poderíamos também contar toda as escolhas de 6 pessoas (C_{11}^6) e abater as escolhas sem mulheres (C_7^6) e com apenas uma mulher ($4 \cdot C_7^5$). A resposta é

$$C_{11}^6 - C_7^6 - 4C_7^5 = 462 - 7 - 84 = 371.$$

Um erro muito comum é o seguinte: Como o grupo de 6 pessoas deve conter pelo menos duas mulheres, primeiramente escolhem-se duas mulheres (C_4^2), e depois escolhem-se 4 pessoas quaisquer entre as 9 que sobraram (C_9^4). Assim, obtem-se a resposta (errada) $C_4^2 \cdot C_9^4 = 6 \times 126 = 756$. A explicação do erro é simples.

Considere, por exemplo, uma seleção com 3 mulheres e 3 homens, $M_1M_2M_3H_1H_2H_3$. Essa seleção foi contada 3 vezes. Uma quando M_1 e M_2 foram as mulheres escolhidas inicialmente, outra quando M_1 e M_3 foram as mulheres escolhidas inicialmente etc... Já uma seleção com as 4 mulheres, por exemplo, $M_1M_2M_3 M_4H_1H_2$ foi contada 6 vezes e obtem-se uma resposta errada muito maior que a resposta correta. □

Exemplo 2.15: De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada?

Solução: O primeiro grupo pode ser escolhido de C_8^4 modos. Escohido o 1º grupo, sobram 4 pessoas e só há 1 modo de formar o segundo grupo. A resposta parece ser $C_8^4 \times 1$. Entretanto, contamos cada divisão duas vezes. Por exemplo, $\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g, h\}$ é idêntica a $\{e, f, g, h\}$ $\{a, b, c, d\}$ e foi contada como se fosse diferente. A resposta é

$$\frac{C_8^4 \times 1}{2} = 35.$$

É interéssante comparar esta solução com a do exemplo 2.11. □

Exercícios

1. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida em um grupo de 8 homens e 5 mulheres.

a) Quantas comissões podem ser formadas?

b) Qual seria a resposta se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

2. Para a seleção brasileira foram convocados dois goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?

3. Quantas diagonais possui um polígono de n lados?

4. Quantas diagonais possui:

a) um octaedro regular?
b) um icosaedro regular?
c) um dodecaedro regular?
d) um cubo?
e) um prisma hexagonal regular?

5. Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R. Quantos quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos existem?

6. Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais uma única vez, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

7. Sejam $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f: I_m \to I_n$ estritamente crescentes?

8. Um homem tem 5 amigas e 7 amigos. Sua esposa tem 7 amigas e 5 amigos. De quantos modos eles podem convidar 6 amigas e 6 amigos, se cada um deve convidar 6 pessoas?

9. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?

10. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura pelo menos 3 vezes e o dígito 8 pelo menos 2 vezes?

11. Quantos são os p-subconjuntos (isto é, subconjuntos com p elementos) de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ nos quais:

a) a_1 figura;
b) a_1 não figura;
c) a_1 e a_2 figuram;
d) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura;
e) exatamente um dos elementos a_1, a_2 figura.

12. Considere $n(n > 2)$ pontos em um plano, entre os quais não há 3 pontos colineares.

a) Quantas são as retas que contêm dois desses pontos?
b) Qual é o número máximo de pontos de interseção dessas retas?

13. De quantos modos é possível dividir 20 pessoas:

a) em dois grupos de 10?
b) em quatro grupos de 5?
c) em um grupo de 12 e um de 8?
d) em três grupos de 6 e um de 2?

14. De um baralho de pôquer (7,8,9,10, valete, dama, rei e ás, cada um desses grupos aparecendo em 4 naipes: copas, outros, paus, espadas), sacam-se simultaneamente 5 cartas.

a) Quantas são as extrações possíveis?
Quantas são as extrações nas quais se forma:
b) um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três em três outros grupos diferentes)?
c) dois pares (duas cartas em um grupo, duas em outro grupo e uma em um terceiro grupo)?
d) uma trinca (três cartas em um grupo e as outras duas em dois outros grupos diferentes)?
e) um "four" (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?
f) um "full hand" (três cartas em um grupo e duas em outro grupo)?
g) uma seqüência (5 cartas de grupos consecutivos, não sendo todas do mesmo naipe)?

h) um "flush" (5 cartas do mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?
i) um "straight flush" (5 cartas de grupos consecutivos, todas do mesmo naipe)?
j) um "royal straight flush" (10, valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?

15. O conjunto A possui p elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções $f\colon A \to B$ sobrejetoras para:

a) $p = n$;
b) $p = n + 1$;
c) $p = n + 2$.

16. Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então eles são pontos de C_1. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C?

17. Quantos são os anagramas da palavra CARAGUATATUBA? Quantos começam por vogal?

18. São dados, no plano, n pontos tais que entre as retas por eles determinadas não há duas retas paralelas. Quantos são, no máximo, os pontos de interseção dessas retas que são distintos dos pontos dados?

19. Considere um polígono convexo de n lados e suponha que não há duas de suas diagonais que sejam paralelas nem três que concorram em um mesmo ponto que não seja vértice.

a) Quantos são os pontos de interseção dessas diagonais?
b) Quantos desses pontos de interseção são interiores ao polígono?
c) Quantos são exteriores?

20. Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

21. Nove cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abrí-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?
b) Na situação do ítem a), quantas chaves cada cientista deve ter?

22. Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferecendo, durante 7 dias consecutivos, 7 jantares para 3 alunos cada. De quantos modos ele pode fazer os convites se ele não deseja que um mesmo par de alunos compareça a mais de um jantar?

23. Formam-se as combinações simples de classe 5 dos elementos $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_{12}$, as quais são escritas com os elementos em ordem crescente de índices. Quantas são as combinações nas quais o elemento a_8 ocupa o 3º lugar?

24. De quantos modos é possível colocar em fila h homens e m mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de alturas?

25. No quadro abaixo, de quantos modos é possível formar a palavra "MATEMÁTICA", partindo de um M e indo sempre para a direita ou para baixo?

									M
								M	A
							M	A	T
						M	A	T	E
					M	A	T	E	M
				M	A	T	E	M	A
			M	A	T	E	M	A	T
		M	A	T	E	M	A	T	I
	M	A	T	E	M	A	T	I	C
M	A	T	E	M	A	T	I	C	A

26. Suponha que n carros estão em fila para entrar em um estacionamento que possui n vagas, lado a lado. Se o 1º carro pode escoher qualquer vaga e cada um dos outros carros ao estacionar deve justapor-se a um carro já estacionado, quantos são os modos possíveis dos carros ocuparem as n vagas?

27. De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times de basquetebol de 5 jogadores cada, denominados *esperança, confiança* e *vitória*?

28. O conjunto A possui n elementos.

a) Determine o número de relações que podem ser construídas em A;
b) Idem, relações reflexivas;
c) Idem, relações simétricas;
d) Idem, relações anti-simétricas;
e) Idem, relações reflexivas e simétricas;
f) Idem, relações reflexivas e anti-simétricas;
g) Idem, relações simétricas e anti-simétricas;
h) Idem, relações reflexivas, simétricas e anti- simétricas.

29. Quantos são os jogos de um campeonato disputado por 20 clubes, no qual todos se enfrentam uma única vez?

30. Empregando dez consoantes e cinco vogais, calcule o número de palavras de seis letras que se podem formar sem uasr consoantes nem vogais adjacentes:

a) Se são permitidas repetições;
b) Se não são permitidas repetições.

31. De quantos modos se pode iluminar uma sala que possui m lâmpadas?

32. Em uma escola, x professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

a) Calcule x;
b) Determine quantos professores há em cada banca.

33. A partir de um conjunto de a atletas formam-se t times de k atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número de vezes. Determine:

a) de quantos times cada atleta participa;
b) em quantos times cada par de atletas fica junto.

34. Mostre que existe um tabuleiro 6×4, cujas casas são todas pretas ou brancas, no qual nenhum retângulo tem as 4 casas dos vértices da mesma cor. Mostre que, em todo tabuleiro 7×4 cujas casas são todas pretas ou brancas, sempre existe um retângulo cujas 4 casas extremas têm a mesma cor. (Observação: no tabuleiro casas adjacentes não têm necessariamente cores diferentes).

35. Prove que um produto de p inteiros consecutivos é sempre divisível por $p!$.

36. Prove, usando um argumento combinatório, que os números abaixo são inteiros para qualquer n natural.

a) $\frac{(2n)!}{2^n}$;

b) $\frac{(3n)!}{2^n.3^n}$;

c) $\frac{(3n)!}{n!2^n3^n}$;

d) $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$;

e) $\frac{(n!)!}{(n!)^{(n-1)!}}$.

37. No início de uma festa há 6 rapazes desacompanhados e 10 moças desacompanhadas. Quantos são os estados possíveis no fim da festa?

38. Prove, usando um argumento combinatório, que

$$C_m^n C_n^r = C_m^r C_{m-r}^{n-r}.$$

39. Prove que C_{2n}^n é par, se $n \geq 1$.

40. C_{1000}^{500} é divisível por 7?

2.4 Permutações Circulares

De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se consideramos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?

A resposta desse problema será representada por $(PC)_n$, o número de permutações circulares de n objetos distintos. É fácil ver que $(PC)_n$ é em geral, diferente de P_n. Por exemplo, no caso $n = 3$ temos $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar 3 objetos distintos em 3 lugares.

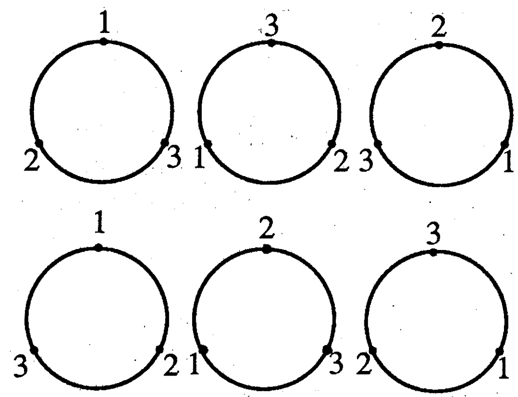

Fig. 2.6

No entanto as três primeiras disposições podem coincidir entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas, de modo que $(PC)_3 = 2$.

Repare que nas permutações simples importam os lugares que os objetos ocupam ao passo que nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si. Nas três primeiras figuras, olhando os círculos em sentido anti-horário, 1 precede 2, que precede 3, que precede 1; portanto, a posição relativa dos objetos é a mesma. Nas três últimas figuras, 1 precede 3, que precede 2, que precede 1; portanto, a posição relativa dos objetos é a mesma.

Podemos verificar que $(PC)_n = (n-1)!$ de dois modos:

a) Se não considerássemos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo,

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

b) Como o que importa é a posição relativa dos objetos, há 1 modo de colocar o 1º objeto no círculo (onde quer que o coloquemos, ele será o único objeto no círculo); há 1 modo de colocar o 2º objeto (ele será o objeto imediatamente após o primeiro); há 2 modos de colocar o 3º objeto (imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º); há 3 modos de colocar o 4º objeto (imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º ou imediatamente após o 3º)...; há $n-1$ modos de colocar o n-ésimo e último objeto. Logo,

$$(PC)_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$$

Exemplo 2.16: Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com n crianças?

Solução: Como a roda gira, o que importa não é o lugar de cada criança e sim a posição relativa das crianças entre si. A resposta é

$$(PC)_n = (n-1)! \quad \square$$

Exemplo 2.17: De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

Solução: Podemos formar $(PC)_5 = 4!$ rodas com as cinco outras crianças.

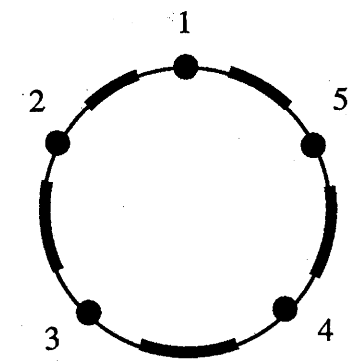

Fig. 2.7

Há agora 5 modos de colocar a criança A na roda.

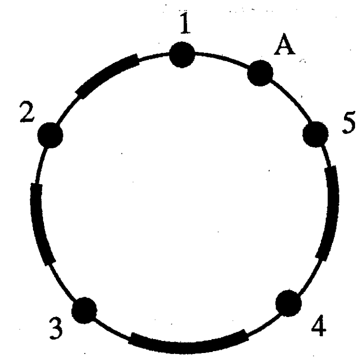

Fig. 2.8

Há agora 4 modos de colocar a criança B na roda sem colocá-la junto de A. A resposta é

$$4! \times 5 \times 4 = 480. \quad \square$$

Exercícios

1. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem formar uma roda de ciranda de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

2. De quantos modos n crianças podem formar uma roda de ciranda de modo que duas dessas crianças permaneçam juntas? E de modo que $p(p < n)$ dessas crianças permaneçam juntas?

3. De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?

4. De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

5. São dados n pontos em círculo. Quantos n-ágonos (não necessariamente convexos) existem com vértices nesses pontos?

6. Uma pulseira deve ser cravejada com um rubi, uma esmeralda, um topázio, uma água-marinha, uma turmalina e uma ametista. De quantos modos isso pode ser feito supondo:

a) que a pulseira tem fecho e um relógio engastado no fecho;
b) que a pulseira tem fecho;
c) que a pulseira não tem fecho e o braço só pode entrar na pulseira em um sentido;
d) que a pulseira não tem fecho e o braço pode entrar na pulseira nos dois sentidos.

7. De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?

8. Quantos dados diferentes existem se a soma das faces opostas deve ser 7?

2.5 Permutações de Elementos nem Todos Distintos

Quantos anagramas possui a palavra "TÁRTARA"? A resposta *não* é $P_7 = 7! = 5040$. Pelo fato de "TÁRTARA" ter letras repetidas, obtemos um número de anagramas menor do que o que obteríamos se as letras fossem distintos. TAR_1TAR_2A e TAR_2TAR_1A seriam anagramas diferentes, por exemplo.

O número de anagramas de "TARTARA" será representado por $P_7^{3,2,2}$ ou

$$\binom{7}{3,2,2},$$

número de permutações de 7 letras das quais 3 são iguais a A, 2 iguais a R e 2 iguais a T.

Para determinar o número de anagramas de TÁRTARA, podemos pensar de dois modos:

a) Para formar um anagrama de "TÁRTARA" temos que arrumar $3A$, $2R$ e $2T$ em 7 lugares, _ _ _ _ _ _ _. O número de modos de escolher os lugares onde serão colocados os A é C_7^3. Depois disso temos C_4^2 modos de escolher os lugares para colocar os R e, finalmente, um único modo de escolher os lugares para os T. Logo,

$$P_7^{3,2,2} = C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 1 = 35 \times 6 \times 1 = 210.$$

b) Se as letras fossem diferentes, obteríamos $P_7 = 7!$ anagramas. Como os A são iguais, contamos cada anagrama $3!$ vezes. Analogamente contamos cada anagrama $2!$ vezes por serem iguais os R e $2!$ vezes por serem iguais os T. Logo,

$$P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

É fácil ver que, no caso geral, temos, para $\alpha+\beta+\cdots+k+\lambda=n$,

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,k,\lambda} = C_n^\alpha \cdot C_{n-\alpha}^\beta \cdots C_{n-\alpha-\beta-\cdots-k}^\lambda =$$
$$= \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!}\frac{(n-\alpha)!}{\beta!(n-\alpha-\beta)!}\cdots\frac{(n-\alpha-\beta-\cdots-k)!}{\lambda!(n-\alpha-\beta-\cdots-k-\lambda)!} =$$
$$= \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!0!} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!},$$

resposta à qual chegaríamos diretamente pelo segundo raciocínio. Assim, o número de permutações de n objetos dos quais α são iguais a a, β iguais a $b,\ldots,\lambda$ iguais a $l(\alpha+\beta+\cdots+\lambda=n)$ é

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$$

Exemplo 2.18: Quantos são os anagramas da palavra "MATEMÁTICA"?

Solução: Como temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra C, 1 letra I e 1 letra E, a resposta é

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151\,200. \quad \square$$

Exemplo 2.19: Quantos são os anagramas de "URUGUAI" que começam por vogal?

Solução: Temos $P_6^{2,1,1,1,1}$ começados em U, $P_6^{3,1,1,1}$ começados em A e $P_6^{3,1,1,1}$ começados em I. A resposta é

$$P_6^{2,1,1,1,1} + 2P_6^{3,1,1,1} = 360 + 2\times 120 = 600. \quad \square$$

Exercícios

1. A figura 2.9 representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.

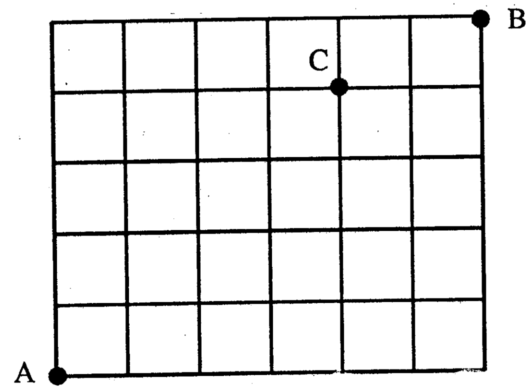

Fig. 2.9

a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?
b) Quantos desses trajetos passam por C?

2. Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6 000 000, podem ser formados usando apenas os algarismos 1,3,6,6,6,8,8?

3. Uma partícula, estando no ponto (x,y), pode mover-se para o ponto $(x+1,y)$ ou para o ponto $(x,y+1)$. Quantos são os caminhos que a partícula pode tomar para, partindo do ponto (0,0), chegar ao ponto (a,b), onde $a>0$ e $b>0$?

4. Uma patícula, estando no ponto (x,y,z), pode mover-se para o ponto $(x+1,y,z)$ ou para o ponto $(x,y+1,z)$ ou para o ponto $(x,y,z+1)$. Quantos são os caminhos que a partícula pode tomar par, partindo do ponto (0,0,0), chegar ao ponto (a,b,c), onde $a>0$, $b>0$ e $c>0$?

5. Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1,1,1,1,2 e 3?

2.6 Combinações Completas

De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores?

A resposta *não* é $C_7^4 = 35$. C_7^4 seria o modo de escolher 4 sabores *diferentes* entre os 7 sabores oferecidos, isto é, C_7^4 seria o número de modos de comprar 4 sorvetes diferentes em uma loja que os oferece em 7 sabores.

A resposta desse problema é representada por CR_7^4, número de *combinações completas* de classe 4 de 7 objetos. Portanto CR_7^4 é o número de modos de escolher 4 objetos entre 7 objetos distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez.

De modo geral, C_n^p é o número de modos de escolher p objetos *distintos* entre n objetos distintos dados, e CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos *distintos ou não* entre n objetos distintos dados.

Assim, por exemplo, as combinações completas de classe 3 dos objetos a, b, c, d tomados 3 a 3 são

aaa	*aab*	*bba*	*cca*	*dda*	*abc*
bbb	*aac*	*bbc*	*ccb*	*ddb*	*abd*
ccc	*aad*	*bbd*	*ccd*	*ddc*	*acd*
ddd					*bcd*

e $CR_4^3 = 20$.

Podemos também interpretar CR_n^p de outro modo. Voltemos à compra dos 4 sorvetes na loja que os oferece em 7 sabores. Para efetuar a compra devemos escolher valores para os variáveis $x_1, x_2, \dots, x_7$, onde x_1 é a quantidade que vamos comprar de sorvetes do 1º sabor, x_2 é a quantidade que vamos comprar de sorvetes do 2º sabor ... x_7 é a quantidade que vamos comprar de sorvetes do 7º sabor. É claro que $x_1, x_2, \dots, x_7$ devem ser inteiros, não negativos (isto é, maiores ou iguais a zero) e que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 4.$$

Comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores é tomar uma solução em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 4.$$

Podemos, portanto, interpretar CR_n^p de dois modos:

a) CR_n^p é o número de modos de selecionar p obetos, *distintos ou não*, entre n objetos distintos dados.
b) CR_n^p é o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ em inteiros não negativos.

Vamos agora resolver o problema da compra dos sorvetes, isto é, vamos calcular CR_7^4.

Ora, CR_7^4 é o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4.$$

O quadro da figura 2.10 mostra algumas soluções da equação bem como sua representação no esquema bola-traço (cada bola representa uma unidade no valor da incógnita; cada traço é usado para separar duas incógnitas).

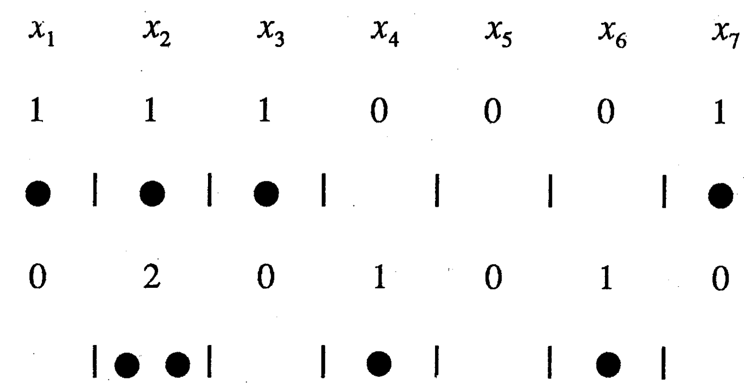

Fig. 2.10

Para formar uma representação devemos arrumar em fila 4 bolas (pois em cada solução o total de unidades nas incógnitas é 4 já que $x_1+x_2+\cdots+x_7=4$) e 6 traços (para separar 7 incógnitas, usamos 6 traços). Mas, o número de modos de fazer isso é

$$P_{4+6}^{4,6}=\frac{10!}{4!6!}=C_{10}^{4}$$

Logo, $CR_7^4=C_{10}^4=210$.

No caso geral, para calcular CR_n^p, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1+x_2+\cdots+x_n=p$ teríamos p bolas e $n-1$ traços. Logo,

$$CR_n^p=P_{p+n-1}^{p,n-1}=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}=C_{n+p-1}^{p}.$$

Portanto, $CR_n^p=C_{n+p-1}^p$.

Exemplo 2.20: Quantas são as soluções inteiras e não negativas de $x+y+z=5$?

Solução: $CR_3^5=C_7^5=21$. □

Exemplo 2.21: De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma loja onde há 5 tipos de refrigerantes?

Solução: $CR_5^3=C_7^3=35$. □

Exemplo 2.22: Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da inequação $x+y+z\leq 5$?

Solução: As soluções inteiras não-negativas de $x+y+z\leq 5$ dividem-se em vários grupos: soluções onde $x+y+z=5$, onde $x+y+z=4$,..., onde $x+y+z=0$. A resposta é

$$CR_3^5+CR_3^4+CR_3^3+CR_3^2+CR_3^1+CR_3^0=$$
$$=C_7^5+C_6^4+C_5^3+C_4^2+C_3^1+C_2^0=$$
$$=21+15+10+6+3+1=56.$$

Outra solução: Em cada solução inteira não-negativa de

$$x+y+z\leq 5$$

defina-se a *folga* da solução por $f=5-(x+y+z)$.

O quadro a seguir mostra algumas soluções e as respectivas folgas.

x	y	z	$x+y+z$	f
3	1	1	5	0
2	0	1	3	2
1	1	1	3	2
0	1	0	1	4

É claro que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras não-negativas de $x+y+z\leq 5$ e as soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+f=5$.

Logo, o número de soluções inteiras não-negativas da inequação $x+y+z\leq 5$ é igual ao número de soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+f=5$ que é $CR_4^5=C_8^5=56$. □

Exemplo 2.23: Quantas são as soluções inteiras da equação $x+y+z=20$ com $x\geq 2$, $y\geq 2$, $z\geq 2$?

O problema que sabemos resolver é contar as soluções inteiras com as variáveis sendo maiores ou iguais a zero. Para fazer um problema recair no outro, pomos

$$x=2+a,\quad y=2+b,\quad z=2+c.$$

A equação $x+y+z=20$ transforma-se em $a+b+c=14$ e as restrições $x,y,z\geq 2$ e inteiros transformam-se em $a,b,c\geq 0$ e inteiros. A resposta é

$$CR_3^{14}=C_{16}^{14}=120.\quad \square$$

Exemplo 2.24: Quantos são os anagramas da palavra "PIRACICABA" que não possuem duas letras A juntas?

Solução: O número de modos de arrumar as letras diferentes de A é $P_7^{2,2,1,1,1}$. Por exemplo, uma dessas arrumações é

$$\underset{1}{\_}\ P\ \underset{2}{\_}\ R\ \underset{3}{\_}\ I\ \underset{4}{\_}\ I\ \underset{5}{\_}\ C\ \underset{6}{\_}\ B\ \underset{7}{\_}\ C\ \underset{8}{\_}$$

Agora temos que colocar as letras A nos 8 espaços assinalados. Como em nenhum espaço podem entrar duas letras A, ocuparemos 3 espaços (uma letra A em cada) e deixaremos 5 espaços vazios. O número de modos de escolher os espaços que ocuparemos é C_8^3. A resposta é

$$P_7^{2,2,1,1,1} \times C_8^3 = 1260 \times 56 = 70\,560.$$

Poderíamos também pensar assim:

Colocamos as letras A (1 modo)

$$\underset{1}{\_} \; A \; \underset{2}{\_} \; A \; \underset{3}{\_} \; A \; \underset{4}{\_}$$

Agora devemos decidir quantas letras colocaremos em cada um dos 4 espaços. Devemos escolher x_1, x_2, x_3, x_4 (x_i =nº de letras que colocaremos no i-ésimo espaço) inteiros não-negativos tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, com $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$ (para impedir que haja duas letras A juntas). Façamos

$$x_2 = 1 + y_2,$$
$$x_3 = 1 + y_3$$

e caimos no problema de achar o número de soluções inteiras não-negativas de $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5$, cuja resposta é $CR_4^5 = C_8^5$. Escolhidas quantas letras irão para cada espaço, por exemplo,

$$\_\,\_\,A\,\_\,\_\,A\,\_\,A\,\_\,\_,$$

temos agora que colocar as letras P, R, B, I, I, C, C nessas casas, o que pode ser feito de $P_7^{2,2,1,1,1}$ modos. A resposta é

$$1 \times C_8^5 \times P_7^{2,2,1,1,1} = 1 \times 56 \times 1260 = 70\,560. \quad \square$$

Exercícios

1. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de

$$x + y + z + w = 3?$$

2. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de

$$x + y + z + w < 6?$$

3. Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z = 10$?

4. Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

5. Quantas são as peças de um dominó comum?

6. $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Quantas são as funções $f\colon I_m \to I_n$ não descrescentes?

7. De quantos modos podemos colocar em fila 7 letras A, 6 letras B e 5 letras C de modo que não haja duas letras B juntas?

8. Qual é o número máximo de termos de um polinômio homogêneo do grau p com n variáveis?

9. Qual é o número máximo de termos de um polinômio do grau p com n variáveis?

10. A fábrica X produz 8 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 30 bombons (de um mesmo tipo ou sortidos). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

11. De quantos modos podem ser pintados 6 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

12. Quantos números inteiros entre 1 e 100 000 têm soma dos algarismos igual a 6?

13. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$$

nas quais exatamente 3 incógnitas são nulas? Em quantas pelo menos três são nulas?

14. Os números inteiros compreendidos entre 100 000 e 999 999 são divididos em classes de modo que dois números diferentes estão na mesma classe se e só se eles têm os mesmos algarismos, diferindo apenas na ordem. Assim, por exemplo, 552 221 e 125 252 estão na mesma classe. Quantas classes são assim formadas?

15. Quantas são as soluções inteiras não-negativas de $x+y+z+w=20$ nas quais $x>y$?

16. Quantos inteiros entre 1 e 100 000, inclusive, têm a propriedade: "cada dígito é menor ou igual ao seu sucessor"?

17. Quantas permutações de 7 letras A e 7 letras B, nas quais não há 3 letras A adjacentes, existem?

18. Uma urna contém n bolas, das quais devem ser escolhidas p bolas. Determine:

a) O número A_n^p de seleções ordenadas, se repetições não são permitidas (essas seleções são denominadas arranjos simples de classe p das n bolas);
b) O número de seleções desordenadas (isto é, seleções que só diferem pela ordem são consideradas iguais), se repetições não são permitidas;
c) O número AR_n^p de seleções ordenadas, se repetições são permitidas (essas seleções são chamadas de arranjos completos de classe p das n bolas. Também são usados os nomes arranjos com reposição ou arranjos com repetição);
d) O número de seleções desordenadas, se repetições são permitidas.

19. Sejam A e B conjuntos de números naturais com $\#A=p$ e $\#B=n$.

a) Quantas são as funções $f\colon A\to B$?
b) Quantas são as funções injetoras $f\colon A\to B$?
c) Quantas são as funções $f\colon A\to B$ estritamente crescentes?

d) Quantas são as funções $f\colon A\to B$ não-decrescentes?
e) Sugira uma definição formal para C_n^p, CR_n^p, A_n^p e AR_n^p.

20. Seja A um conjunto com $\#A=n$.

a) Quantas são as funções $f\colon A\to A$ bijetoras?
b) Sugira uma definição formal para P_n.

21. De quantos modos podemos escolher 3 números, não necessariamente distintos, no conjunto $\{1,2,\dots,150\}$ de modo que a soma dos números escolhidos seja divisível por 3? E se os números devessem ser distintos?

22. De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos?

3. Outros Métodos de Contagem

3.1 O Princípio da Inclusão-Exclusão

Na introdução ao capítulo anterior fizemos referência a um princípio elementar de contagem que estabelece que o número de elementos da união de conjuntos disjuntos é a soma dos números de elementos de cada conjunto.

O Princípio da Inclusão-Exclusão é uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. Na sua versão mais simples, ele afirma que

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

A justificativa pode ser obtida de dois modos diferentes:

a) Suponhamos que haja y elementos comuns a A e B e que além disso haja x elementos que pertençam a A e não a B e z elementos que pertençam a B mas não a A (ver figura 3.1).

Temos

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= x + y + z; \\ \#A + \#B - \#(A \cap B) &= (x + y) + (y + z) - y \\ &= x + y + z = \#(A \cup B). \end{aligned}$$

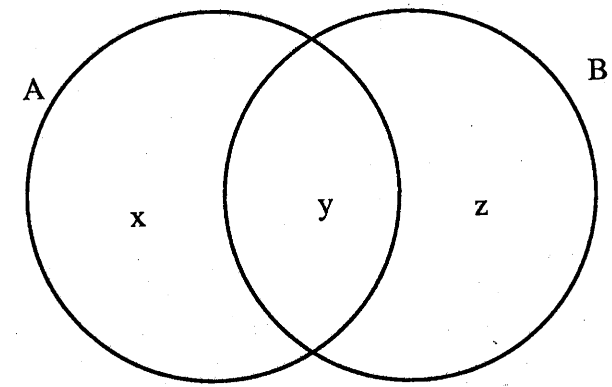

Fig. 3.1

b) $\#(A \cup B)$ é o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B. Para contar os elementos de $A \cup B$ contamos todos os elementos de $A(\#A)$ e todos os de $B(\#B)$. Ao fazermos isso, os elementos de $A \cap B$ foram contados duas vezes, uma em $\#A$ e outra em $\#B$, portanto devemos descontar a segunda contagem desses elementos e obtemos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Para três conjuntos A, B, C o Princípio da Inclusão- Exclusão afirma que

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C \\ - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) \\ + \#(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Uma justificativa pode ser:

$$\begin{aligned} \#[A \cup B \cup C] &= \#[(A \cup B) \cup C] \\ &= \#(A \cup B) + \#C - \#[(A \cup B) \cap C] \\ &= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C \\ &\quad - \#[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C \\
&- \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap C \cap B \cap C) \\
&= \#A + \#B + \#C + \\
&- \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) \\
&+ \#(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Outra justificativa:
$\#(A \cup B \cup C)$ é o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A, B e C. Para contar os elementos de $A \cup B \cup C$, contamos os elements de $A(\#A)$, de $B(\#B)$ e de $C(\#C)$. Mas então os elementos de $A \cap B$ foram contados duas vezes (uma em $\#A$ e outra em $\#B$), o mesmo ocorrendo com os elementos de $A \cap C$ e $B \cap C$. Portanto, devemos descontar uma vez $\#(A \cap B)$, $\#(A \cap C)$ e $\#(B \cap C)$. Mas então os elementos de $A \cap B \cap C$ foram contados três vezes (em $\#A$, em $\#B$ e em $\#C$) e descontados três vezes (em $\#(A \cap B)$, em $\#(A \cap C)$ e em $\#(B \cap C)$). Contados três vezes e descontados três vezes significa que eles não estão sendo contados. Devemos pois incluí-los na contagem e obtemos

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B \cup C) = \#A &+ \#B + \#C \\
&- \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) \\
&+ \#(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Para quatro conjuntos teríamos

$$\begin{aligned}
&\#(A \cup B \cup C \cup D) = \\
&[\#A + \#B + \#C + \#D] \\
&- [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) + \#(A \cap D) \\
&+ \#(B \cap C) + \#(B \cap D) + \#(C \cap D)] \\
&+ [\#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) \\
&+ \#(A \cap C \cap D) + \#(B \cap C \cap D)] \\
&- \#(A \cap B \cap C \cap D).
\end{aligned}$$

Em suma, o número de elementos da união é obtido somando os números de elementos de cada conjunto, subtraindo os números de elementos das interseções dois a dois, somando os das interseções três a três, subtraindo os das interseções quatro a quatro etc...

A prova do Princípio (usando o modo **b**) está no Apêndice 1. Uma prova por indução pode também ser obtida usando o modo **a**.

Exemplo 3.1: Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou 7?

Solução: Defina-se:

A = Conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3.
B = Conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 7.
Queremos calcular $\#(A \cup B)$. Temos

$$\begin{aligned}
\#A &= \left[\frac{1000}{3}\right] = 333. \quad ([\ ] = \text{ parte inteira}). \\
\#B &= \left[\frac{1000}{7}\right] = 142. \\
\#(A \cap B) &= \left[\frac{1000}{21}\right] = 47.
\end{aligned}$$

(pois $A \cap B$ é o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 e 7, isto é, que são divisíveis por 21).

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 333 + 142 - 47 = 428,$$

que é a resposta. □

Exemplo 3.2: Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO que têm C em 1º lugar, ou A em 2º lugar, ou P em 3º lugar ou I em 4º lugar?

Solução: Defina-se:

A_1 = conjunto dos anagramas de CAPÍTULO que têm C em 1º lugar;
A_2 = conjunto dos anagramas de CAPÍTULO que têm A em 2º lugar;
A_3 = conjunto dos anagramas de CAPÍTULO que têm P em 3º lugar;
A_4 = conjunto dos anagramas de CAPÍTULO que têm I em 4º lugar.

Queremos calcular $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. Temos,

$\#A_1 = \#A_2 = \#A_3 = \#A_4$ = nº de anagramas de CAPÍTULO que têm uma letra fixa $= 7! = 5040$.

$\#(A_1 \cap A_2) = \#(A_1 \cap A_3) = \#(A_1 \cap A_4) = \#(A_2 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_4) = \#(A_3 \cap A_4)$ = nº de anagramas de CAPÍTULO que têm duas letras fixas $= 6! = 720$.

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ = nº de anagramas de CAPÍTULO que têm 3 letras fixas $= 5! = 120$.

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ = nº de anagramas de CAPÍTULO que têm 4 letras fixas $= 4! = 24$.

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= 4 \times 5040 - 6 \times 720 + 4 \times 120 - 24 \\ &= 16\,296,\end{aligned}$$

que é a resposta. □

O Princípio da Inclusão-Exclusão pode ser generalizado. Provaremos no Apêndice 1 o

Teorema: *Sejam Ω um conjunto, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos*

de Ω e

$$S_0 = \#\Omega;$$
$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (\#A_i);$$
$$S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j);$$
$$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k);$$
$$\vdots$$

(observe que há C_n^1 parcelas em S_1, C_n^2 parcelas em S_2 etc...). *Então:*

a) O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente p ($p \le n$) dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k}^k S_{p+k};$$

b) O número de elementos de Ω que pertencem a pelo menos $p (p \le n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k C_{p+k-1}^k S_{p+k}$$

c) O número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ é

$$S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

A parte c) desse teorema é devida ao matemático português, professor da Escola Naval de Portugal, Daniel Augusto da Silva (1814-1878).

A parte a) do teorema, no caso $p = 0$, é conhecida pelo nome de fórmula do crivo e é devida ao algebrista inglês J. J. Sylvester (1814-1897).

A parte a), no caso geral, é devida ao matemático francês Camille Jordan (1858-1922).

Exemplo 3.3: Quantos são os inteiros, compreendidos entre 1 e 1000 inclusive, que são divisíveis por exatamente dois dos números 2, 3, 7 e 10? E por pelo menos dois?

Solução: Defina-se

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{x \in Z \mid 1 \leq x \leq 1000\};\\
A_1 &= \{x \in \Omega \mid 2 \text{ divide } x\};\\
A_2 &= \{x \in \Omega \mid 3 \text{ divide } x\};\\
A_3 &= \{x \in \Omega \mid 7 \text{ divide } x\};\\
A_4 &= \{x \in \Omega \mid 10 \text{ divide } x\};
\end{aligned}$$

Temos ([ ] = Parte Inteira)

$$\begin{aligned}
S_0 &= \#\Omega = 1000;\\
S_1 &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4\\
&= \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{10}\right]\\
&= 500 + 333 + 142 + 100 = 1075;\\
S_2 &= \#(A_1 \cap A_2) + \#A_1 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_4) +\\
&+ \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_4) + \#(A_3 \cap A_4) =\\
&= \left[\frac{1000}{6}\right] + \left[\frac{1000}{14}\right] + \left[\frac{1000}{10}\right] + \left[\frac{1000}{21}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right] + \left[\frac{1000}{70}\right]\\
&= 166 + 71 + 100 + 47 + 33 + 14\\
&= 431;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) +\\
&+ \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4)\\
&= \left[\frac{1000}{42}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right] + \left[\frac{1000}{70}\right] + \left[\frac{1000}{210}\right]\\
&= 23 + 33 + 14 + 4\\
&= 74;
\end{aligned}$$

$$S_4 = \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \left[\frac{1000}{210}\right] = 4.$$

Queremos calcular o número de elementos que pertencem a exatamente dois dos conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4. Esse número é

$$\begin{aligned}
a_2 &= \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k C_{2+k}^k S_{2+k}\\
&= (-1)^0 C_2^0 S_2 + (-1)^1 C_3^1 S_3 + (-1)^2 C_4^2 S_4\\
&= S_2 - 3S_3 + 6S_4\\
&= 431 - 3 \times 74 + 6 \times 4 = 233,
\end{aligned}$$

que é a resposta da primeira pergunta.

Queremos calcular o número de elementos que petencem a pelo menos dois dos conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4. Esse número é

$$\begin{aligned}
b_2 &= \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k C_{2+k-1}^k S_{2+k}\\
&= (-1)^0 C_1^0 S_2 + (-1)^1 C_2^1 S_3 + (-1)^2 C_3^2 S_4\\
&= S_2 - 2S_3 + 3S_4\\
&= 431 - 2 \times 74 + 3 \times 4\\
&= 295,
\end{aligned}$$

que é a resposta da segunda pergunta. Note que os valores de S_0 e S_1 não foram utilizados. □

Exemplo 3.4: Para cada inteiro positivo n define-se $\varphi(n)$ como sendo o número de inteiros positivos que são primos com n e não são superiores a n, isto é, que são primos com n e menores ou iguais a n. Assim, por exemplo, $\varphi(12) = 4$ pois os inteiros positivos que não superam 12 e são primos com 12 são 1, 5, 7 e 11, e $\varphi(7) = 6$ pois os inteiros positivos que não superam 7 e são primos com 7 são 1, 2, 3, 4, 5, 6.

A função φ é chamada de Função φ de Euler (1707-1783).

O valor de $\varphi(n)$ pode ser calculado a partir da decomposição de n em fatores primos. Se a decomposição de n em fatores primos é

$$n = p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdots p_r^{j_r} \qquad (p_1, p_2, \ldots, p_r \text{ primos distintos }),$$

então

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Assim, por exemplo, como as decomposições de 120 e 729 em fatores primos são $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ e $729 = 3^6$, temos

$$\varphi(120) = 120\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 32$$

e

$$\varphi(729) = 729\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 486;$$

ou seja, no conjunto $\{1, 2, \ldots, 120\}$ há 32 números primos com 120 e no conjunto $\{1, 2, \ldots, 729\}$ há 486 números primos com 729.

Para justificar a fórmula, defina-se:

$\Omega =$ Conjunto dos inteiros positivos menores ou iguais a n;
$A_i =$ Conjunto dos elementos de Ω que são múltiplos de p_i $(1 \leq i \leq r)$.

Queremos determinar o número de elementos de Ω que são primos com n, ou seja, o número de elementos de Ω que não pertencem a nenhum dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

$\varphi(n)$ é pois o número de elementos de Ω que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Temos

$$A_i = \left\{p_i, 2p_i, \ldots, \frac{n}{p_i}p_i\right\}$$

$$\#(A_i) = \frac{n}{p_i};$$

$$A_i \cap A_j = \left\{p_ip_j, 2p_ip_j, \ldots, \frac{n}{p_ip_j}p_ip_j\right\},$$

$$\#(A_i \cap A_j) = \frac{n}{p_ip_j} \quad (i \neq j);$$

e assim sucessivamente. Logo:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \#\Omega = n; \\
S_1 &= \sum \#(A_i) = \sum \frac{n}{p_i}; \\
S_2 &= \sum_{i<j} \#(A_i \cap A_j) = \sum_{i<j} \frac{n}{p_ip_j}; \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_{0+k}^{k} S_{0+k} \\
&= S_0 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^r S_r \\
&= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_r}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{n}{p_1p_2} + \frac{n}{p_1p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{r-1}p_r}\right) - \cdots
\end{aligned}$$

$$+(-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}$$
$$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right). \quad \square$$

Exercícios

1. Quantos inteiros entre 1 e 1000 inclusive:

a) são divisíveis por pelo menos três dos números 2, 3, 7 e 10?
b) não são divisíveis por nenhum dos números 2, 3, 7 e 10?
c) são divisíveis por exatamente um dos números 2, 3, 7 e 10?
d) são divisíveis por pelo menos um dos números 2, 3, 7 e 10?

2. Quantos inteiros entre 1000 e 10000 inclusive não são divisíveis nem por 2, nem por 3 e nem por 5?

3. Lançam-se 3 dados. Em quantos dos 6^3 resultados possíveis a soma dos pontos é 12?

4. Quantas são as soluções inteiros não-negativas de $x+y+z=12$ nas quais pelo menos uma incógnita é maior que 7?

5. Se $\#A = n$ e $\#B = p$ $(n \geq p)$, quantas são as $f\colon A \to B$ sobrejetoras?

6. Determine o número de permutações de (1,2,3,4,5,6) nas quais nem o 4 ocupa o 4º lugar nem o 6 ocupa o 6º lugar.

7. Quantos são os inteiros de n dígitos, que têm todos os dígitos pertencentes ao conjunto $\{1,2,3\}$? Em quantos deles os inteiros 1, 2 e 3 figuram todos?

8. Determine o número de permutações das letas $AABBCCDD$ nas quais não há letras iguais adjacentes.

9. Quantos inteiros entre 1 e 1 000 000 não são nem quadrados perfeitos nem cubos perfeitos?

10. Determine o número de permutações de $(1,2,\ldots,n)$ nas quais não figuram (em posições consecutivas e na ordem dada) nem o par 12, nem o par 23,...,nem o par $(n-1)n$.

11. Oito crianças estão sentadas em torno de um carrossel. De quantos modos elas podem trocar de lugar de modo que cada criança passe a ter uma criança diferente a sua direita?

12. Calcule $\varphi(360)$.

13. Quantas espécies de polígonos regulares de 100 lados existem?

14. Se p é um primo, quanto vale $\varphi(p)$?

15. Quantos são os elementos do conjunto $\{1,2,\ldots,500\}$ que são divisíveis por 3 ou 5 mas não são divisíveis por 7?

16. a) De quantos modos podemos distribuir μ partículas distintas por n níveis distintos? (em Física essa distribuição de partículas por níveis de energia é chamada de estatística de Boltzmann).

b) Em quantas dessas distribuições todos os níveis ficam ocupados?

17. a) De quantos modos podemos distribuir μ partículas iguais por n níveis distintos? (em Física essa distribuição é chamada de estatística de Bose-Einstein).

b) Em quantas dessas distribuições todos os níveis ficam ocupados?

18. De quantos modos podemos distribuir μ partículas iguais por n níveis distintos se nenhum nível pode conter mais de uma partícula? (em Física essa distribuição é chamada de estatística de Fermi-Dirac).

3.2 Permutações Caóticas

Uma permutação dos números $(1,2,\dots,n)$ é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo. Assim, as permutações 2143 e 3142 são caóticas mas 1342 não é (1 está no seu lugar primitivo). Para calcular o número D_n de permutações caóticas de $(1,2,\dots,n)$, defina-se A_i = conjunto das permutações de $(1,2,\dots,n)$ em que o número i ocupa o i-ésimo lugar, $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

Queremos calcular o número de elementos do conjunto Ω das permutações de $(1,2,\dots,n)$ que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Temos:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \#(\Omega) = n!;\\
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} \#(A_i) = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n\cdot(n-1)! = n!\\
S_2 &= \sum_{1\le i<j\le n} \#(A_i\cap A_j) = \sum_{1\le i<j\le n} (n-2)! = C_n^2\cdot(n-2)! = \frac{n!}{2!};\\
S_3 &= \sum_{1\le i<j<k\le n} \#(A_i\cap A_j\cap A_k)\\
&= \sum_{1\le i<j<k\le n} (n-3)! = C_n^3\cdot(n-3)! = \frac{n!}{3!};\\
&\vdots\\
S_n &= C_n^n\cdot(n-n)! = \frac{n!}{n!}
\end{aligned}
$$

O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente

zero dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \sum_{k=0}^{n-0} (-1)^k C_{0+k}^k S_{0+k}\\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k\\
&= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n\\
&= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!}\\
&= n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].
\end{aligned}
$$

Logo, o número de permutações caóticas de $(1,2,\dots,n)$ é

$$
D_n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].
$$

Assim, por exemplo,

$$
\begin{aligned}
D_4 &= 4!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right]\\
&= 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)\\
&= 9
\end{aligned}
$$

Realmente, as permutações caóticas de (1,2,3,4) são 2143, 3142, 3241, 4123, 3412, 4312, 2413, 2341, 3421, 4321. É interessante observar que D_n é aproximadamente igual a $n!/e$; mais precisamente, D_n é o inteiro mais próximo de $n!/e$.

n	D_n	$n!/e$
1	0	0,3...
2	1	0,7...
3	2	2,2...
4	9	8,8...
5	44	44,1...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observe que nossa afirmação é verdadeira para $n = 1$ e para $n = 2$. Vamos prová-la para $n > 2$. Com efeito sabemos que

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

e portanto que

$$e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

Ora, D_n é inteiro e

$$\begin{aligned}
\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| &= \left|n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) - \right. \\
&\quad \left. -n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots\right)\right| \\
&= n!\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots\right| \\
&\leq n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\
&= \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{1}{n} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| < \frac{1}{2},$$

se $n > 2$. Logo, para $n > 2$, D_n é um inteiro situado a uma distância menor que $1/2$ do número $n!/e$. Assim, D_n é o inteiro mais próximo de $n!/e$, se $n > 2$.

Exercícios

1. Suponha $\#A = n$. Quantas são as funções $f: A \to A$ para as quais a equação $f(x) = x$ não possui solução? Quantas são as funções $f: A \to A$ bijetoras para as quais a equação $f(x) = x$ não possui solução?

2. Quantas são as permutações de (1,2,3,4,5,6,7) que têm exatamente 3 elementos no seu lugar primitivo?

3. Determine o número de permutações caóticas de (1,2,3,4,5,6,7, 8,9,10) nas quais os números 1,2,3,4,5 ocupam, em alguma ordem, os cinco primeiros lugares.

4. De quantos modos é possível colocar 8 torres brancas em um tabuleiro de xadrez 8×8 de modo que nenhuma torre fique na diagonal branca e não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna?

5. Prove que, se $n \geq 3$, $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

6. Prove que (definindo $D_0 = 1$)

$$n! = \binom{n}{0}D_n + \binom{n}{1}D_{n-1} + \binom{n}{2}D_{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}D_0.$$

7. Prove que $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ para $n \geq 2$.

8. Dois médicos devem examinar, durante uma mesma hora, 6 pacientes, gastando 10 minutos com cada paciente. Cada um dos 6 pacientes deve ser examinado pelos dois médicos. De quantos modos pode ser feito um horário compatível?

9. Quantas são as permutações de $(1, 2, \ldots, 2n)$ nas quais nenhum número ímpar ocupa o seu lugar primitivo?

3.3 Os Lemas de Kaplansky

De quantos modos é possível formar um p-subconjunto (isto é, um subconjunto com p elementos) de $\{1, 2, \ldots, n\}$ no qual não haja número consecutivos? Por exemplo, para $n = 6$ e $p = 3$, podemos obter a partir de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ os seguintes 3-subconjuntos nos quais não há elementos consecutivos:

$$\{1,3,5\}, \quad \{1,3,6\}, \quad \{1,4,6\}, \quad \{2,4,6\}.$$

Poderíamos ter concluído que há quatro 3-subconjuntos de {1,2,3, 4,5,6} sem elementos consecutivos sem necessidade de enumerá-los exaustivamente. Ao formar um subconjunto, marcamos com o sinal $+$ os elementos do conjunto que farão parte do subconjunto e com o sinal $-$ os elementos que não farão parte do subconjunto. Assim,

{1,3,5} seria representado por $+-+-+-$;
{2,3,6} (que não é um subconjunto válido pois 2 e 3 são consecutivos) seria marcado $-++--+$.

Ora, para formar um 3-subconjunto sem elementos consecutivos devemos colocar 3 sinais $+$ e 3 sinais $-$ em fila, sem que haja dois sinais $+$ consecutivos. Para fazer isso, colocamos os sinais $-$ (1 modo), e colocamos os sinais $+$ nos 4 espaços assinalados, na figura 3.2, com no máximo um sinal por espaço (C_4^3 modos). A resposta é então, $1 \times C_4^3 = 4$.

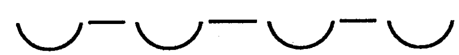

Fig. 3.2

No caso geral temos p sinais $+$, $n-p$ sinais $-$ para arrumar sem que haja dois sinais $+$ consecutivos. Temos 1 modo de colocar os sinais $-$ e C_{n-p+1}^p modos de colocar os sinais $+$.

Acabamos de obter o

Primeiro Lema de Kaplansky: *O número de p- subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é*

$$f(n,p) = C_{n-p+1}^p.$$

Exemplo 3.5: As três provas de um vestibular devem ser realizadas na primeira semana do ano. De quantos modos é possivel escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos?

Solução: Devemos formar um subconjunto de 3 elementos no conjunto dos 7 dias da primeira semana, de modo que não haja dias consecutivos no subconjunto. A resposta é

$$f(7,3) = C_{7-3+1}^3 = C_5^3 = 10. \quad \square$$

Exemplo 3.6: Uma fila tem 15 cadeiras nas quais devem sentar-se 5 homens, de modo que não fiquem dois homens sentados em cadeiras contíguas. De quantos modos isso pode ser feito?

Solução: Devemos inicialmente escolher 5 cadeiras sem que haja cadeiras consecutivas. Isso pode ser feito de $f(15,5) = C^5_{15-5+1} = C^5_{11}$ modos; escolhidas as 5 cadeiras, devemos designar a cada homem uma cadeira, o que pode ser feito de $P_5 = 5!$ modos. A resposta é $C^5_{11} \times 5! = 55\,440$. □

Exemplo 3.7: Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI nos quais não há duas letas S consecutivas?

Solução: Devemos colocar as letras de MISSISSIPI nas casas abaixo:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Devemos inicialmente escolher 4 casas sem que haja casas consecutivas para colocar as letras S, o que pode ser feito de $f(10,4) = C^4_{10-4+1} = C^4_7 = 35$ modos.

Agora devemos arrumar as letras restantes (4 letras I, 1 letra M e 1 letra P) nas 6 casas restantes, o que pode ser feito de

$$P_6^{4,1,1} = \frac{6!}{4!1!1!} = 30$$

modos. A resposta é $35 \times 30 = 1050$. □

Suponhamos agora que os elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ estejam arrumados em círculo, como na figura 3.3.

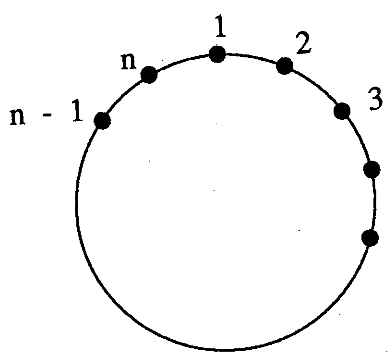

Fig. 3.3

Agora os elementos "1" e "n" são consecutivos. De quantos modos é possível formar um p-subconjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$ no qual não haja números consecutivos? Ora, o número total de subconjuntos será a soma do número de subconjuntos nos quais o elemento "1" figura com o número de subconjuntos nos quais o elemento "1" não figura.

a) Subconjuntos nos quais o elemento "1" figura. Para formá-los devemos escolher $p-1$ elementos em $\{3, 4, \dots, n-1\}$ (pois se o "1" figura, o "2" e o "n" não podem figurar) para serem os companheiros do "1" no subconjunto, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. O número de modos de que isso pode ser feito é

$$f(n-3; p-1) = C^{p-1}_{n-3-(p-1)+1} = C^{p-1}_{n-p-1}.$$

b) Subconjuntos nos quais o elemento "1" não figura. Para formá-los devemos escolher p elementos em $\{2, 3, \dots, n\}$, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Isso pode ser feito de $f(n-1, p) = C^p_{n-1-p+1} = C^p_{n-p}$ modos. Portanto, a resposta é

$$\begin{aligned}
C^{p-1}_{n-p-1} + C^p_{n-p} &= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{(n-p-1)!p + (n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
&= (n-p-1)!\frac{p + (n-p)}{p!(n-2p)!} \\
&= n\frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{n}{n-p}\,\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\
&= \frac{n}{n-p} C^p_{n-p}.
\end{aligned}$$

Acabamos de obter o

Segundo Lema de Kaplansky: *O número de p- subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a*

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p}C^{p}_{n-p}.$$

Os Lemas de Kaplansky foram construídos em 1943 pelo matemático canadense-americano Irving Kaplansky para a resolução do chamado Problema de Lucas que se encontra no Apêndice 2.

Exemplo 3.8: Hugo deve ter aula de tênis três vezes por semana, durante um semestre. Quantos são os modos de escolher os dias de aula, se Hugo não deseja ter aulas em dias consecutivos?

Solução: Hugo deve escolher 3 dos elementos do conjunto *domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado*, não podendo escolher dois dias consecutivos e sendo o domingo e o sábado dias consecutivos. O número de modos de fazer isso é

$$g(7,3) = \frac{7}{7-3}C^{3}_{7-3} = \frac{7}{4}\cdot 4 = 7. \quad \square$$

Exercícios

1. 5 pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?

2. Dado um decágono, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices não-consecutivos do decágono?

3. De quantos modos podemos formar uma seqüência de p elementos iguais a 1 e q elementos iguais a 0 se dois elementos iguais a zero não podem ser adjacentes?

4. De quantos modos podemos formar uma seqüência de p elementos iguais a 2, q elementos iguais a 1 e r elementos iguais a 0 se dois elementos iguais a zero não podem ser adjacentes?

5. De quantos modos é possível formar uma roda de ciranda com 7 meninas e 12 meninos sem que haja duas meninas em posições adjacentes?

6. Quantos são os anagramas de *araraquara* que não possuem duas letras *a* consecutivas?

7. (Generalização do 1º Lema de Kaplansky).
De quantos modos é possível formar um p-subconjunto de $\{1,2,\ldots,n\}$ de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto?

8. (Generalização do 2º Lema de Kaplansky). Refaça o problema anterior no caso circular. Nesse caso, por exemplo, tomando $n = 6$, o conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$ é tal que entre 1 e 4 há dois elementos, entre 5 e 1 há um elemento, entre 6 e 4 há três elementos. (Sugestão: divida os subconjuntos em dois grupos: aqueles que contêm algum dos elementos $1,2,\ldots,r$ e os que não contêm nenhum dos elementos $\{1,2,\ldots,r\}$).

3.4 O Princípio da Reflexão

Uma partícula, estando no ponto (x,y), pode se movimentar para o ponto $(x+1,y+1)$ ou para o ponto $(x+1,y-1)$.

a) Quantos são os trajetos possíveis da partícula de (0,0) a (8,6)?

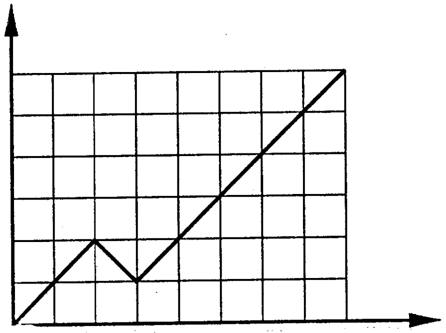

Fig. 3.4

Os movimentos permitidos para a partícula são de subida $S: (x, y) \to (x+1, y+1)$ ou de descida, $D: (x, y) \to (x+1, y-1)$. Na figura 3.4 o trajeto descrito pela partícula foi SSDSSSSS.

Para que ela vá de (0,0) a (8,6) devemos ter $S+D=8$ (em cada movimento, de subida ou descida, a abscissa da partícula avança uma unidade. Como de (0,0) a (8,6) sua abscissa avançou 8 unidades, o total de movimentos de subida e descida deve ser 8) e $S-D=6$ (em cada movimento de subida a ordenada aumenta uma unidade e em cada movimento de descida a ordenada diminui uma unidade). Daí $S=7$ e $D=1$.

O número de trajetos é $P_8^{7,1} = \frac{8!}{7!1!} = 8$.

Uma interessante paráfrase desse problema é a seguinte: numa eleição há 8 eleitores e dois candidatos. Se o candidato S ganha por 6 votos de diferença, de quantos modos pode marchar a apuração?

O gráfico indica em cada ponto (x, y) quantos votos já foram apurados (x) e qual a vantagem do candidato $A(y)$.

Por exemplo, a presença do ponto (3,1) no gráfico do trajeto indica que quando o 3º voto acaba de ser apurado, o candidato S tem uma vantagem de um voto.

b) Quantos são os trajetos de (0,0) a (10,4)?

Temos $S+D=10$ e $S-D=4$. Logo, $S=7$, $D=3$ e a resposta é

$$P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Parafraseando, em uma eleição com 2 candidatos S e D e 10 eleitores, a qual é vencida pelo candidato S por 4 votos de diferença, há 120 modos de marchar a apuração.

c) Quantos desses trajetos tocam na reta $y=-1$?

Todo trajeto de (0,0) a (10,4) que toque na reta $y=-1$ pode ser transformado, por uma reflexão em torno da reta $y=-1$ do trecho do trajeto entre (0,0) e o primeiro toque na reta $y=-1$, em um trajeto do ponto $(0,-2)$ até o ponto (10,4). Reciprocamente, todo trajeto do ponto $(0,-2)$ até o ponto (10,4) (um tal trajeto obrigatoriamente toca na reta $y=-1$) pode ser transformado (por uma reflexão em torno da reta $y=-1$ do trecho entre (0,0) e o primeiro toque na reta $y=-1$) em um trajeto de (0,0) a (10,4) que toca na reta $y=-1$.

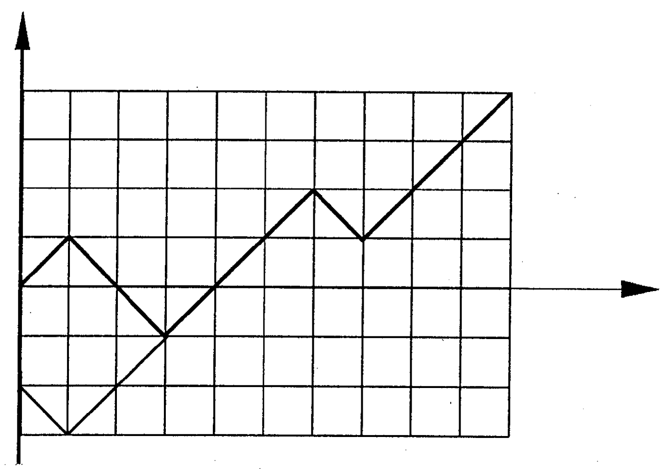

Fig. 3.5

Acabamos de provar que o número de trajetos de (0,0) a (10,4) que tocam na reta $y = -1$ é igual ao número de caminhos de $(0, -2)$ a (10,4). Esse último é fácil de calcular. Temos $S + D = 10$ e $S - D = 6$; sendo $S = 8$ e $D = 2$. A resposta é $P_{10}^{8,2} = 45$.

Parafraseando, em uma eleição com dois candidatos, 10 eleitores, vencida pelo candidato S por 4 votos de diferença, em 45 das 120 possíveis marchas da apuração, o candidato perdedor em algum momento esteve em vantagem. É interessante observar como as aparências enganam. O candidato S tem 70% da votação. No entanto em $45/120 = 37,5\%$ das apurações possíveis em algum momento ele está em desvantagem. □

A técnica usada para resolver a parte c) é conhecida pelo nome de Princípio da Reflexão.

Exercícios

1. Numa fila de cinema, m pessoas tem notas de R$ 5,00 e $n(n < m)$ pessoas tem notas de R$ 10,00. A entrada custa R$ 5,00.

a) Quantas são as filas possíveis?
b) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar sem troco?
c) Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar com duas notas de R$ 5,00?

2. Numa eleição com dois candidatos A e B, há 20 eleitores e o candidato A vence por 15×5. Quantas são as marchas da apuração:

a) Possíveis?
b) Nas quais o candidato A permanece em vantagem (nem sequer empata) desde o primeiro voto apurado?
c) Nas quais o candidato A permanece sempre em vantagem ou empatado com o candidato B?

3.5 O Princípio de Dirichlet

A Análise Combinatória não se ocupa apenas com a contagem de elementos de conjuntos. Muitas vezes, o que se deseja é determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo a certas propriedades. Uma ferramenta simples para resolver alguns desses problemas é o *Princípio das gavetas de Dirichlet**.

Princípio das gavetas de Dirichlet: *Se n objetos forem colocados em no máximo, $n - 1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.*

Prova: (por absurdo) Se cada uma das gavetas contiver, no máximo, um objeto, o número total de objetos nelas colocados será, no máximo, $n - 1$, o que é uma contradição. □

Exemplo 3.9: Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas aniversariam no mesmo mês. □

Exemplo 3.10: Escolha, dentre os elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 200\}$, 101 números ao acaso. Mostre que, entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles divide o outro.

Solução: Observe, em primeiro lugar, que qualquer inteiro n se escreve sob a forma $n = 2^r b$, onde r é um inteiro não-negativo e b é um inteiro ímpar. Por exemplo, $36 = 2^2 \cdot 9$, $25 = 2^0 \cdot 25$, $16 = 2^4 \cdot 1$.

Assim, se $n \in \{1, 2, \ldots, 200\}$, $n = 2^r b$ e b é um dos inteiros ímpares $1, 3, 5, \ldots, 199$. Ora, há 100 possibilidades para b. Se escolhemos 101 números, dois deles terão o mesmo b. Sejam esses número $n_1 = 2^{r_1} b$ e $n_2 = 2^{r_2} b$. Se $r_1 < r_2$, n_1 divide n_2. Se $r_2 < r_1$, n_2 divide n_1, o que conclui a demonstração. □

Exemplo 3.11: Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

*Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805- 1859), matemático alemão.

Solução: Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1. Dos 5 pontos, pelo menos dois pertencerão a um mesmo quadrado de lado 1. A distância entre esses dois pontos será no máximo igual à diagonal do quadrado que é $\sqrt{2}$, o que conclui a demonstração. □

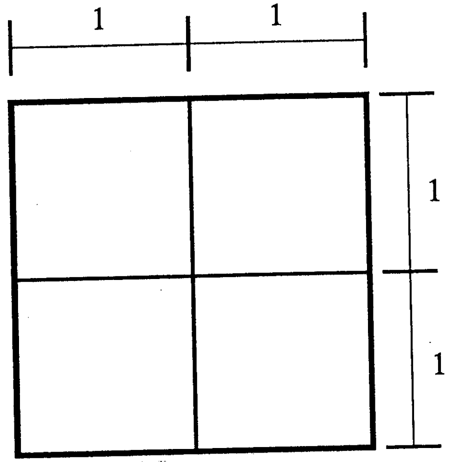

Fig. 3.6

Exemplo 3.12: Mostre que em um conjunto de n pessoas há sempre duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto. (Obs.: Se a conhece b, b conhece a, ou seja, "conhecer" é uma relação simétrica.)

Solução: Observe, em primeiro lugar, que qualquer das pessoas do conjunto conhece no mínimo 0 e no máximo $n-1$ das outras pessoas. Observe, em segundo lugar, que se alguma das pessoas conhece todas as outras $n-1$ pessoas então é impossível que haja alguma pessoa conhecendo 0 outras. Usemos agora o princípio de Dirichlet pondo na 1ª gaveta as pessoas que conhecem 0 outras, na 2ª gaveta as pessoas que conhecem 1 outra,..., na n^{a} gaveta as pessoas que conhecem $n-1$ outras. Apesar de termos n gavetas, as n pessoas são colocadas em, no máximo, $n-1$ gavetas, pois pela segunda observação a primeira e a última das gavetas não podem ser ocupadas simultaneamente. □

Exemplo 3.13: É dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ de m números inteiros ($m > 1$). Mostre que existem naturais r e l,

$1 \le r \le l \le m$, tais que $a_r + a_{r+1} + \cdots + a_l$ é múltiplo de m.

Solução: Considere as somas

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_m &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m \end{aligned}$$

Se alguma dessas somas (digamos S_j) for divisível por m, a demonstração está concluída (nesse caso $r = 1$ e $l = j$). Caso contrário, nenhuma dessas somas divididas por m deixará o resto nulo. Os restos possíveis são, portanto, $1, 2, \ldots, m-1$. Como há m somas e apenas $m-1$ restos possíveis, pelo princípio de Dirichlet, há duas delas, que chamaremos de S_i e S_j, que divididas por m deixam restos iguais. Suponha $i > j$. Então

$$S_i - S_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_i$$

é múltiplo de m e o resultado está demonstrado ($r = j+1, l = i$). □

O princípio de Dirichlet pode ser reformulado do modo seguinte:

> *Se m objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta contém $[(m-1)/n] + 1$ objetos.*
> (Obs: $[x]$ é o maior inteiro menor que ou igual a x).

Prova: Se cada gaveta contiver no máximo $[(m-1)/n]$ objetos, então o número de objetos será no máximo

$$n\left[\frac{m-1}{n}\right] \le n \cdot \frac{m-1}{n} = m - 1 < m,$$

o que é uma contradição. □

Exemplo 3.14: Em um grupo de 40 pessoas, pelo menos 4 pessoas têm o mesmo signo.

Solução: Com efeito, colocando cada pessoa (objeto) na gaveta do seu signo, temos $m = 40$ e $n = 12$. Logo, pelo menos uma gaveta conterá $\left[\frac{40-1}{12}\right] + 1 = 4$ objetos. □

Há ainda outra formulação possível:

Sejam n gavetas e seja μ um inteiro positivo dado. Coloquemos a_1 objetos na 1ª gaveta, a_2 objetos na 2ª gaveta e assim sucessivamente até a_n objetos na n-ésima gaveta. Então se a média $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$ for maior que μ, uma das gavetas conterá pelo menos $\mu + 1$ objetos.

Prova: Se todos os a_i fossem menores que $\mu + 1$, teríamos

$$\begin{gathered} a_1 \leq \mu \\ a_2 \leq \mu \\ \vdots \\ a_n \leq \mu \end{gathered}$$

Daí, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n\mu$ e

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \mu,$$

o que é uma contradição.

Em suma, se uma média aritmética de números for maior que μ então pelo menos um dos números é maior que μ. □

Exemplo 3.15: São dados dois discos A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais, os quais estão pintados de branco ou de preto. No disco A há 100 setores brancos e 100 setores pretos, em ordem desconhecida. No disco B não sabemos quantos setores são brancos. Coloquemos o disco A sobre o disco B, de modo que os setores de A fiquem exatamente sobre os setores de

B. É possível então, rodando o disco A, obter uma posição na qual pelo menos 100 setores de A tenham a mesma cor que os correspondentes de B.

Prova: Coloque A sobre B. Seja a_1 o número de setores sobrepostos que têm cores coincidentes. Gire A de um setor (isto é de $360^o/200$) mantendo B fixo. Seja então a_2 o número de setores sobrepostos que têm cores coincidentes. Continue com esse processo até obter a_{200}. Então o número total de coincidências é $a_1 + a_2 + \cdots + a_{200} = 100 \times 200$.

Com efeito, fixe um setor do disco B (preto, por exemplo). Como A tem 100 setores pretos, haverá 100 posições em que esse setor de B terá a mesma cor que o correspondente setor de A. Assim o número total de coincidências será 100 vezes o número de setores de B.

Daí temos

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{200})}{200} = 100 > 99.$$

Se a média é maior que 99, pelo menos um dos a_i é também maior que 99, ou seja, algum a_i é maior que ou igual a 100. Em suma, em alguma posição o número de coincidências é maior que ou igual a 100. □

Exercícios

1. Em uma gaveta há 12 meias brancas e 12 meias pretas. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza de obter um par de meias da mesma cor?

2. 63 127 candidatos compareceram a uma prova do vestibular (25 questões de múltipla-escolha com 5 alternativas por questão). Considere a afirmação: "Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova". Qual é o maior valor de k para o qual podemos garantir que a afirmação acima é verdadeira?

3. Refaça o problema anterior para a afirmação: "Pelo menos 4 candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova".

4. Um ponto (x, y, z) do $\mathbf{R}^3$ é inteiro se todas suas coordenadas são inteiras.

a) Considere um conjunto de nove pontos inteiros do $\mathbf{R}^3$. Mostre que o ponto médio de algum dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.
b) Dê um exemplo de um conjunto de oito pontos inteiros do $\mathbf{R}^3$ tais que nenhum dos pontos médios dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.

5. Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês?

6. Mostre que em todo $(n+1)$-subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ há um par de elementos tais que um deles divide o outro.

7. Prove que todo número natural tem um múltiplo que se escreve, na base 10, apenas com os algarismos 0 e 1.

8. Prove que em qualquer conjunto de 52 inteiros existe um par de inteiros cuja soma ou cuja diferença é divisível por 100.

9. Prove que dado qualquer conjunto de dez inteiros positivos de dois dígitos cada, é possível obter dois subconjuntos disjuntos cujos elementos têm a mesma soma.

10. Considere 1990 pontos em um plano. Prove que quaisquer três semiplanos, tais que cada um deles contém mais de 1327 desses pontos, têm interseção não-vazia.

11. Mostre que se escolhemos 800 pontos dentro de um cubo de aresta 10, pelo menos um dos segmentos determinados por esses pontos tem comprimento menor que 2.

12. Sejam x um número real e n um inteiro positivo. Mostre que entre os números $x, 2x, 3x, \ldots, (n-1)x$ existe um cuja distância a algum inteiro é, no máximo, $1/n$.

13. Um mestre de xadrez, preparando-se para um torneio, joga, durante onze semanas, pelo menos uma partida por dia mas não mais que doze partidas por semana. Prove que existe um conjunto de dias consecutivos durante os quais ele joga exatamente 20 partidas.

14. Seja n um inteiro ímpar maior que 1 e seja A uma matriz $n \times n$ simétrica tal que cada linha e cada coluna de A é formada pelos números $\{1, 2, \ldots, n\}$ escritos em alguma ordem. Mostre que cada um dos inteiros $\{1, 2, \ldots, n\}$ aparece na diagonal principal de A.

15. Prove que se o conjunto $\{1, 2, \ldots, 1978\}$ é partido em 6 subconjuntos, em algum desses subconjuntos existe um elemento que é igual a à soma de dois elementos, não necessariamente distintos, do mesmo subconjunto.

4. Números Binomiais

4.1 O Triângulo de Pascal

Chamamos de *Triângulo de Pascal* o quadro

$$
\begin{array}{lllll}
C_0^0 & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
\ldots & & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\ldots & & & &
\end{array}
$$

formado pelos números C_n^p (chamados *Números Binomiais, Coeficientes Binomiais* ou ainda *Números Combinatórios*). Se contamos as linhas e colunas do Triângulo começando em zero, o elemento da linha n e coluna p é C_n^p.

Uma propriedade dos números binomiais que nos permite construir rapidamente o Triângulo de Pascal é a

Relação de Stifel: $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.
Ou seja, somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela.

Justificativa: Consideremos um grupo formado por uma mulher e n homens. O número de modos de selecionar nesse grupo

um subgrupo formado por $p+1$ pessoas é C_{n+1}^{p+1}. O número de modos de selecionar um subgrupo formado pela mulher e por p homens é $1 \times C_n^p = C_n^p$ e o número de modos de selecionar um subgrupo de $p+1$ pessoas formado só por homens é C_n^{p+1}.

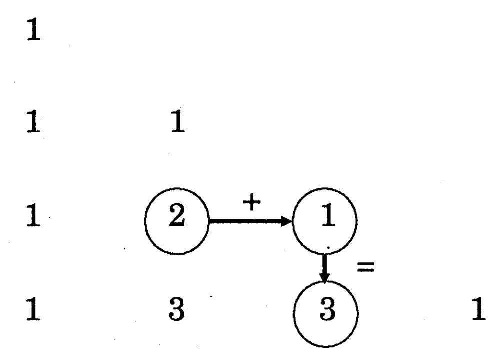

Fig. 4.1

Como o número total de subgrupos é a soma do número de subgrupos dos quais a mulher participa com o número de subgrupos dos quais a mulher não participa, temos

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}. \quad \square$$

Repare que no triângulo de Pascal a linha n começa em C_n^0 e termina em C_n^n. Portanto C_n^p (que está na linha n avançado em p coluna sem relação ao início da linha) e C_n^{n-p} (que está na linha n atrasado em p colunas em relação ao fim da linha) são elementos da linha n que estão situados em posições equidistantes dos extremos. Números como C_n^p e C_n^{n-p} são chamados de *Combinações Complementares*. Assim, por exemplo, a complementar de C_{12}^4 é $C_{12}^{12-4} = C_{12}^8$.

Relação das Combinações Complementares: $C_n^p = C_n^{n-p}$.
Ou seja, em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais.

Justificativa:

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)!]} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p. \quad \square$$

Teorema das Linhas: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
Ou seja, a soma dos elementos da linha n vale 2^n.

Justificativa: C_n^p é o número de subconjuntos com p elementos do conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Então $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$ é o número total de subconjuntos de A. Mas, para formar um subconjunto de $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ devemos marcar cada elemento de A com o sinal $+$ (indicando que o elemento foi escolhido para o subconjunto) ou com o sinal $-$ (indicando que o elemento não foi escolhido). Como o número de modos de marcar os elementos é, $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$, provamos que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n. \quad \square$$

Exemplo 4.1: Qual é o valor da soma

$$S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n?$$

Solução:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \\
&= n[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}] \\
&= n \cdot 2^{n-1} \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema das Colunas:

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \cdots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}.$$

Ou seja, a soma dos elementos de uma coluna do triângulo (começando no primeiro elemento da coluna) é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela da soma.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Fig. 4.2

Justificativa: Apliquemos a relação de Stifel aos elementos da coluna $p+1$:

$$\begin{aligned}
C_{p+1}^{p+1} &= C_{p}^{p+1} + C_{p}^{p} \\
C_{p+2}^{p+1} &= C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^{p} \\
C_{p+3}^{p+1} &= C_{p+2}^{p+1} + C_{p+2}^{p} \\
&\vdots \\
C_{p+n}^{p+1} &= C_{p+n-1}^{p+1} + C_{p+n-1}^{p} \\
C_{p+n+1}^{p+1} &= C_{p+n}^{p+1} + C_{p+n}^{p}.
\end{aligned}$$

Somando (e simplificando parcelas iguais que aparecem em membros opostos) obtemos

$$\begin{aligned}
C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p}^{p+1} + C_{p}^{p} + C_{p+1}^{p} + C_{p+2}^{p} + \\
+ \cdots + C_{p+n-1}^{p} + C_{p+n}^{p}.
\end{aligned}$$

Observando que $C_{p}^{p+1} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p}^{p} + C_{p+1}^{p} + C_{p+2}^{p} + \\
+ \cdots + C_{p+n-1}^{p} + C_{p+n}^{p}. \quad \square
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2: Qual é o valor da soma

$$S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + 50\cdot 51\cdot 52?$$

Solução:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{50} k(k+1)(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{50} 3!C_{k+2}^{3} \\
&= 6[C_3^3 + C_4^3 + \cdots + C_{52}^3] \\
&= 6C_{53}^4 \\
&= 1\,756\,950. \quad \square
\end{aligned}$$

Exemplo 4.3: Qual é o valor da soma

$$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2?$$

Solução: A soma pedida é $S = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

O exemplo anterior nos mostrou como calcular uma soma na qual cada parcela é um produto de inteiros consecutivos. Vamos tentar transformar o polinômio do 2º grau k^2 em um polinômio do 2º grau no qual apareçam em vez de produtos de inteiros iguais, produtos de inteiros consecutivos, isto é, vamos tentar obter uma identidade do tipo

$$k^2 \equiv Ak(k+1) + Bk + C.$$

Temos

$$\begin{aligned}
&k^2 \equiv Ak^2 + (A+B)k + C, \\
&A = 1, \quad A + B = 0, \quad C = 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0. \\
&k^2 \equiv k(k+1) - k
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} [k(k+1) - k] \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{2} - \sum_{k=1}^{n} C_{k}^{1} \\
&= 2C_{n+2}^{3} - C_{n+1}^{2} \\
&= 2\frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{(n+1)n}{2}
\end{aligned}$$

$$= n(n+1)\left[\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad \square$$

Exemplo 4.4: Calcule o valor da soma

$$S = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + \cdots + (3n-1) \cdot n^2 \cdot$$

Solução:

$$S = \sum_{k=1}^{n}(3k-1)k^2 = \sum_{k=1}^{n}(3k^3 - k^2).$$

Seja

$$3k^3 - k^2 \equiv Ak(k+1)(k+2) + Bk(k+1) + Ck + D.$$

Temos

$$3k^3 - k^2 == Ak^3 + (3A+B)k^2 + (2A+B+C)k + D.$$

donde

$$A = 3, \quad 3A + B = -1, \quad 2A + B + C = 0, \quad D = 0$$
$$A = 3, \quad B = -10, \quad C = 4, \quad D = 0.$$
$$3k^3 - k^2 \equiv 3k(k+1)(k+2) - 10k(k+1) + 4k.$$

Logo,

$$S = \sum_{k=1}^{n}[3k(k+1)(k+2) - 10k(k+1) + 4k]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}[3 \cdot 3! C_{k+2}^{3} - 10 \cdot 2! C_{k+1}^{2} + 4C_{k}^{1}]$$
$$= 18\sum_{k=1}^{n} C_{k+2}^{3} - 20\sum_{k=1}^{n} C_{k+1}^{2} + 4\sum_{k=1}^{n} C_{k}^{1}$$
$$= 18C_{n+3}^{4} - 20C_{n+2}^{3} + 4C_{n+1}^{2}$$
$$= 18\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24} - 20\frac{(n+2)(n+1)n}{6} +$$
$$+ 4\frac{(n+1)n}{2}$$
$$= (n+1)n\left[\frac{3(n+3)(n+2)}{4} - 10\frac{n+2}{3} + 2\right]$$
$$= \frac{(n+1)n(9n^2+5n-2)}{12}. \quad \square$$

Teorema das Diagonais:

$$C_{n}^{0} + C_{n+1}^{1} + C_{n+2}^{2} + \cdots + C_{n+p}^{p} = C_{n+p+1}^{p}.$$

Ou seja, a soma dos elementos de uma diagonal (isto é, de uma paralela à hipotenusa), do triângulo de Pascal (começando no primeiro elemento da diagonal) é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela.

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

Fig. 4.3

Justificativa: Temos

$$
\begin{aligned}
C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+p}^p &= C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n \\
&\quad + \cdots + C_{n+p}^n \\
&= C_{n+p+1}^{n+1} \\
&= C_{n+p+1}^p,
\end{aligned}
$$

usando sucessivamente Combinações Complementares, o Teorema das Colunas e Combinações Complementares. □

Um outro fato importante é o seguinte

Teorema: $C_n^p < C_n^{p+1}$ se $p < \frac{n-1}{2}$ e $C_n^p > C_n^{p+1}$ se $p > \frac{n-1}{2}$.

Justificativa:

$$
\begin{aligned}
C_n^{p+1} - C_n^p &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} - \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!(n-p) - n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)1} \\
&= \frac{n!(n-1-2p)}{(p+1)!(n-p)!}.
\end{aligned}
$$

Como $n!$, $(p+1)!$ e $(n-p)!$ são positivos, o sinal de $C_n^{p+1} - C_n^p$ é o mesmo de $n-1-2p$. Logo,

$$C_n^{p+1} - C_n^p > 0 \text{ se } n-1-2p > 0$$

e

$$C_n^{p+1} - C_n^p < 0 \text{ se } n-1-2p < 0,$$

ou seja,

$$C_n^p < C_n^{p+1} \text{ se } p < \frac{n-1}{2}$$

e

$$C_n^p > C_n^{p+1} \text{ se } p > \frac{n-1}{2}. \quad \square$$

O que significa esse teorema? Ele afirma que na primeira metade de cada linha os elementos estão em ordem crescente (cada termo é menor que o seguinte, $C_n^p < C_n^{p+1}$) e que na segunda metade os elementos estão em ordem decrescente (cada termo é maior que o anterior, $C_n^p > C_n^{p+1}$).

Encerramos esta seção com algumas observações: a expressão

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

faz sentido para qualquer n real, desde que p seja um inteiro positivo. Definiremos então para qualquer n real e qualquer p inteiro não-negativo o binomial de n sobre p por

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} \quad (p > 0) \quad \text{e} \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Assim, por exemplo, temos

$$
\begin{aligned}
\binom{1/2}{3} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}, \\
\binom{-5}{4} &= \frac{(-5)(-6)(-7)(-8)}{4!} = 70
\end{aligned}
$$

e
$$\binom{3}{5} = \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{5!} = 0.$$

É claro que se n é inteiro não-negativo,
$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$
é igual a C_n^p, número de p-subconjuntos de um conjunto com n elementos. Se n não é inteiro não-negativo, C_n^p não tem sentido mas
$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$
continua tendo sentido.

É interessante observar que mesmo se n não for um inteiro não-negativo continua sendo verdade a Relação de Stifel

a) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$,

e o Teorema das Diagonais

b) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$.

Enquanto que o Teorema das Linhas

c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$,

o Teorema das Colunas

d) $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$,

e o Teorema das Combinações Complementares

e) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$,

não têm sentido se n não for um inteiro não-negativo.

Exercícios

1. Prove, fazendo as contas, a relação de Stifel:
$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$
supondo n um real qualquer e p inteiro não-negativo.

2. Prove, por um processo análogo ao usado no texto para provar a relação de Stifel, que
$$C_{n+2}^{p+2} = C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2}.$$

3. Prove, fazendo as contas, que
$$\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2},$$
supondo n um real qualquer e p inteiro não-negativo.

4. Usando a relação de Stifel, escreva as sete primeiras linhas do triângulo de Pascal.

5. Prove, usando um argumento combinatório, que $C_n^p = C_n^{n-p}$.

6. Se A possui 512 subconjuntos, qual é o número de elementos de A?

7. Determine um conjunto que possua exatamente 48 subconjuntos.

8. X é um subconjunto próprio de A se $X \subset A$ e $X \neq A$; X é um subconjunto não-trivial de A se $X \subset A$ e $X \neq A$ e $X \neq \phi$. Se A possui 5 elementos, quantos são os subconjuntos próprios de A? Quantos são os subconjuntos não-triviais de A?

9. Tem-se n comprimidos de substâncias distintas, solúveis em água e incapazes de reagir entre si. Quantas soluções distintas podem ser obtidas dissolvendo-se um ou mais desses comprimidos em um copo com água?

10. Quantos coquetéis (misturas de duas ou mais bebidas) podem ser feitos a partir de 7 ingredientes distintos?

11. Em uma sala há 7 lâmpadas. De quantos modos pode ser iluminada a sala?

12. Calcule $\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k$.

13. Calcule o valor de $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$.

14. Calcule o valor de $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.

15. Prove, por indução, o Teorema das Linhas.

16. Prove, por indução, o Teorema das Colunas.

17. Calcule o valor da soma

$$S = 50 \cdot 51 + 51 \cdot 52 + \cdots + 100 \cdot 101.$$

18. Calcule o valor da soma

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

19. Calcule o valor de

$$S = \sum_{k=1}^{n} k(2k+1).$$

20. Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2(k+2).$$

21. Calcule o valor de

$$S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^p C_n^p.$$

22. Tem-se uma rede de caminhos (figura 4.4). Do ponto A partem 2^{1000} homens. Metade parte na direção l e metade na direção m. Ao chegar ao primeiro cruzamento cada grupo se divide: uma metade segue na direção l, a outra na direção m. O mesmo ocorre em cada cruzamento. Numeremos as linhas e os cruzamentos em cada linha a partir do zero; assim, A é o zero-ésimo cruzamento da linha zero. Quantos homens chegam ao k-ésimo cruzamento da linha n?

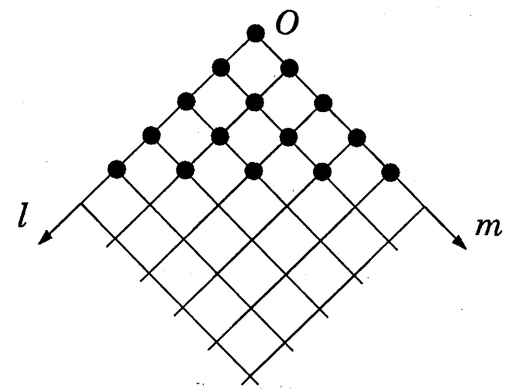

Fig. 4.4

23. Prove que todo poliômio $P(x)$ de grau p pode ser escrito na forma

$$P(x) \equiv A_0 + A_1 x + A_2 x(x+1) + \cdots + A_p x(x+1)\cdots(x+p-1).$$

24. Calcule $CR_n^0 + CR_n^1 + CR_n^2 + \cdots + CR_n^p$.

25. Prove, usando um argumento combinatório, a Fórmula de Euler

$$C_m^0 C_h^p + C_m^1 C_h^{p-1} + C_m^2 C_h^{p-2} + \cdots + C_m^p C_h^0 = C_{m+h}^p.$$

26. Prove, a partir da Fórmula de Euler, a Fórmula de Lagrange (1736-1813)

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

27. Calcule o valor da soma

$$S = C_n^0 C_n^2 + C_n^1 C_n^3 + \cdots + C_n^{n-2} C_n^n.$$

28. Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$.

29. Determine p para que C_{10}^p seja máximo.

30. Determine p para que C_{21}^p seja máximo.

31. Resolva a equação $C_{41}^p = C_{41}^{2p-1}$.

32. Resolva a equação $C_{15-p}^{2p} = C_{15-p}^{9-p}$.

33. Prove que em cada coluna (exceto a coluna zero) os elementos do triângulo de Pascal estão em ordem crescente.

34. O número de Fibonacci F_n é definido como a soma dos elementos da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal:

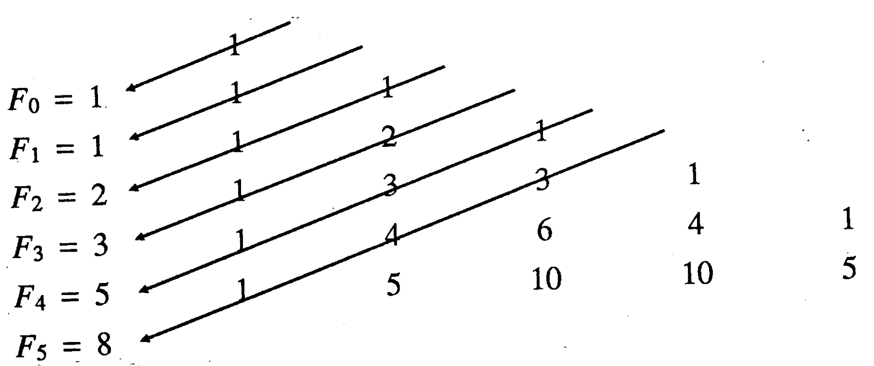

Fig. 4.5

Prove que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

35. A é o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ e p é um natural tal que $1 < p < n$.

a) Quantos são os p-subconjuntos de A nos quais o elemento mínimo é igual a k?

b) Formados todos os p-subconjuntos de A, em cada um deles considera-se o elemento mínimo do subconjunto. Quanto vale a média aritmética desses mínimos?

36. Prove que

$$(-1)^n \binom{-n}{k-1} = (-1)^k \binom{-k}{n-1}.$$

37. Para que valor de k,

$$\binom{2n+k}{n} \cdot \binom{2n-k}{n}.$$

(n dado) é máximo?

38. Calcule

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} \quad (m < n).$$

39. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{k} \quad (n \geq m).$$

40. Prove, por indução, o Teorema das Diagonais.

4.2 O Binômio de Newton

Teorema: *Se x e a são números reais e n é um inteiro positivo,*

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n x^0.$$

Observe que:

i) O desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui $n+1$ termos.
ii) Os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^n$ são os elementos da linha n do Triângulo de Pascal.
iii) Escrevendo os termos do desenvolvimento na ordem acima (isto é, ordenados segundo as potências decrescentes de x), o termo de ordem $k+1$ é

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^k x^{n-k}.$$

Prova: Temos

$$(x+a)^n = (x+a)(x+a)\cdots(x+a).$$

Cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parênteses um x ou um a e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de k, $0 \le k \le n$, se escolhermos a em k dos parênteses, x será escolhido em $n-k$ dos parênteses e o produto será igual a $a^k x^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos. Então $(x+a)^n$ é uma soma onde há, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k}$ parcelas iguais a $a^k x^{n-k}$, isto é,

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k}.$$

Exemplo 4.5: Olhando para o triângulo de Pascal

$$\begin{array}{lllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Obtemos

$$\begin{aligned}
(x+a)^0 &= 1a^0x^0 = 1 \\
(x+a)^1 &= 1a^0x^1 + 1a^1x^0 = x + a \\
(x+a)^2 &= 1a^0x^2 + 2a^1x^1 + 1a^2x^0 = x^2 + 2ax + a^2 \\
(x+a)^3 &= 1a^0x^3 + 3a^1x^2 + 3a^2x^1 + 1a^3x^0 \\
&= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \\
(x+a)^4 &= 1a^0x^4 + 4a^1x^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x^1 + 1a^4x^0 \\
&= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 \quad \square
\end{aligned}$$

Exemplo 4.6: Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(x^3 - 1/x^2)^9$.

Solução: O termo genérico do desenvolvimento é

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= \binom{9}{k} \left(\frac{-1}{x^2}\right)^k (x^3)^{9-k} \\
&= \binom{9}{k} \frac{(-1)^k}{x^{2k}} x^{27-3k} \\
&= (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-5k}.
\end{aligned}$$

No termo em x^2 temos $27 - 5k = 2$, $k = 5$. O termo em x^2 é

$$T_6 = (-1)^5 \binom{9}{5} \cdot x^2 = -126x^2.$$

Resposta: -126. □

Exemplo 4.7: Determine o termo máximo do desenvolvimento de $(1+1/3)^{65}$.

Solução: O termo genérico do desenvolvimento é

$$T_{k+1} = \binom{65}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{65-k} = \binom{65}{k}\cdot\frac{1}{3^k}.$$

$T_{k+1} > T_k$ (ou seja, cada termo é maior que o anterior) se

$$\binom{65}{k}\frac{1}{3^k} > \binom{65}{k-1}\frac{1}{3^{k-1}},$$

isto é,

$$\frac{65!}{k!(65-k)!3^k} > \frac{65!}{(k-1)!(66-k)!}\frac{1}{3^{k-1}}.$$

Assim,

$$\frac{(66-k)!}{(65-k)!} > \frac{k!}{(k-1)!}\frac{3^k}{3^{k-1}}\cdot\frac{65!}{65!},$$

isto é, $66-k > k\cdot 3\cdot 1$, isto é, $k < 16,5$. Logo, $T_{k+1} > T_k$ para $k \in \{1,2,\dots,16\}$ e, analogamente, $T_{k+1} < T_k$ para $k \in \{17,18,\dots,65\}$. Logo,

$$T_1 < T_2 < T_3 < \cdots < T_{16} < T_{17} > T_{18} > \cdots > T_{66}.$$

Segue-se, então, que o termo máximo é $T_{17} = \binom{65}{16}\frac{1}{3^{16}}$.
Resposta: $\binom{65}{16}\frac{1}{3^{16}}$. □

Exemplo 4.8: Qual é a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x^3-2x^2)^{15}$?

Solução: Ora, se

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n,$$

temos

$$P(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Em suma, a soma dos coeficientes de um polinômio em x é o valor numérico do polinômio para $x=1$. A resposta é, portanto

$$(1^3 - 2\cdot 1^2)^{15} = -1. \quad \square$$

Exemplo 4.9: Se na fórmula do binômio fizermos $x = a = 1$, obtemos

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n},$$

que dá uma outra prova do Teorema das Linhas. Se na fórmula do binômio fizermos $x=1$, $a=-1$ obtemos

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n},$$

que é resultado importante, usado no Apêndice 1 para provar o Princípio da Inclusão-Exclusão. □

Exemplo 4.10: Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

Solução:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$, pela fórmula do binômio.

b)

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}x^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k$$
$$= nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}$$
$$= nx\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}x+\cdots+\binom{n-1}{n-1}x^{n-1}\right]$$
$$= nx(1+x)^{n-1}.$$

Uma solução mais sofisticada seria

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n.$$

Derivando obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Multiplicando ambos os membros por x obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k} = nx(1+x)^{n-1}.$$

c) Fazendo $x = 1$ em b) obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}. \quad \square$$

Exemplo 4.11: Considere o desenvolvimento de $(x+a)^n$ ordenado do modo usual, isto é, segundo as potências decrescentes de x. Calcule a soma dos termos de ordem par desse desenvolvimento.

Solução: Temos

$$(x+a)^n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots$$
$$(x-a)^n = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \cdots$$

Daí

$$(x+a)^n - (x-a)^n = 2[T_2 + T_4 + \cdots]$$

e

$$T_2 + T_4 + \cdots = \frac{(x+a)^n - (x-a)^n}{2},$$

que é a resposta. $\square$

Exemplo 4.12: No desenvolvimento de $(x+a)^n$ ordenado de modo usual, temos

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}a^k x^{n-k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}a^k x^{n-k}$$

e

$$T_k = \binom{n}{k-1}a^{k-1}x^{n-k+1}.$$

Daí resulta

$$T_{k+1} = \frac{n-k+1}{k}\frac{a}{x}T_k.$$

Portanto, para obter T_{k+1} a partir de T_k basta aumentar o expoente de a em uma unidade, diminuir o expoente de x em uma unidade e multiplicar o coeficiente de T_k pelo expoente de x em T_k e dividir o produto pelo expoente de a (em T_k) aumentado de um unidade. Isso nos permite obter rapidamente desenvolimentos. Por exemplo,

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4 + a^5.$$

Os coeficientes foram obtidos assim:

$$1, \frac{1\times 5}{1} = 5, \frac{5\times 4}{2} = 10; \frac{10\times 3}{3} = 10; \frac{10\times 2}{4} = 5; \frac{5\times 1}{5} = 1. \quad \square$$

Encerramos esta seção observando que na realidade a fórmula do binômio

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$$

é válida ainda que n não seja um inteiro positivo. Prova- se (veja algum livro de Cálculo que fale sobre a série binomial) que a fórmula acima é válida para todo x tal que $|x| > |a|$. Assim, por exemplo,

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}a^2 + \cdots$$

para todo a tal que $|a| < 1$ e todo n real.

Exercícios

1. Determine o termo central do desenvolvimento de

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8.$$

2. Determine o quinto termo do desenvolvimento de

$$\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^7.$$

a) Supondo o desenvolvimento ordenado segundo as potências crescentes da primeira parcela;
b) Supondo-o ordenado segundo as potências decrescentes da primeira parcela.

3. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}.$$

4. Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(2x^4 - \frac{1}{x}\right)^{12}.$$

5. Determine o coeficiente de x^{28} no desenvolvimento de

$$(x+2)^{20} \cdot (x^2-1)^5.$$

6. Determine o coeficiente de x^n no desenvolvimento de

$$(1-x)^2(1+x)^n.$$

7. Para que valores de n o desenvolvimento de

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^n$$

possui um termo independente de x?

8. Calcule o termo máximo e o termo mínimo do desenvolvimento de $(1+1/2)^{120}$.

9. Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de

$$(2x^2 - 3y)^{1991}.$$

10. Calcule a soma dos coeficientes dos termos de ordem par do desenvolvimento de $(2x^2 - 3y)^n$.

11. Qual é o maior dos números $a = 101^{50}$ e $b = 100^{50} + 99^{50}$?

12. Calcule $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$.

13. Calcule $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^k$.

14. Determine o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de

$$\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3.$$

15. Calcule o valor da soma

$$C_{20}^0 - \frac{C_{20}^1}{2} + \frac{C_{20}^2}{2} - \cdots + \frac{C_{20}^{20}}{2^{20}}.$$

16. Prove que $[(2+\sqrt{3})^n]$ é ímpar para todo n natural (Obs: [ ]=parte inteira).

17. A é um conjunto com n elementos e B é um seu p-subconjunto.

a) Quantos são os conjuntos X tais que $B \subset X \subset A$?
b) Quantos são os pares ordenados (Y, Z) tais que $Y \subset Z \subset A$?

18. Partindo de

$$(x+1)^n \cdot (1+x)^n = (x+1)^{2n}$$

e igualando coeficientes adequados, prove mais uma vez a Fórmula de Lagrange:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

19. Partindo de

$$(x+1)^n \cdot (x+1)^m = (x+1)^{m+h}$$

e igualando coeficientes adequados, prove mais uma vez a Fórmula de Euler

$$C_m^0 C_h^p + C_m^1 C_h^{p-1} + \cdots + C_m^p C_h^0 = C_{m+h}^p.$$

20. Prove que $47^{47} + 77^{77}$ é divisível por 4.

21. Calcule o valor de:
a) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$;
b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots$.

22. Calcule o valor das somas

a) $S_1 = \binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \cdots$;
b) $S_2 = 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \cdots$.

23. Calcule o valor da soma

$$\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n(n+1)\binom{n}{n}.$$

24. Demonstre por indução a Fórmula do Binômio.

25. Qual é o termo máximo da seqüência de termo geral $a_n = \frac{(2n+1)5^n}{n!}$?

26. Calcule $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k 2^k$.

27. Calcule $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k 5^k$.

4.3. Polinômio de Leibniz

Podemos obter uma generalização da fórmula do binômio.

Teorema:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_p!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$$

estendendo-se o somatório a todos os valores inteiros não-negativos de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *tais que* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$.

Prova:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n =& (x_1 + x_2 + \cdots + x_p) \cdots \\ & \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_p).\end{aligned}$$

O termo genérico do produto é obtido escolhendo-se em cada parênteses um x_i e multiplicando-se os escolhidos. Ora, se em α_1 dos parênteses escolhermos x_1, em α_2 dos parênteses escolhermos x_2 etc... obteremos $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ inteiros não-negativos e $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$). O termo $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$ aparece tantas vezes quantos são os modos de escolhermos nos n parênteses α_1 deles para pegarmos o x_1 para fator, α_2 dentre os que sobraram para pegarmos o x_2 como fator etc....Mas isso pode ser feito de

$$C_n^{\alpha_1} \cdot C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2} \cdots C_{n-\alpha_1-\cdots-\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$$

modos. Logo, $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_p^{\alpha_p}$ aparece no desenvolvimento

$$\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$$

vezes.

Exemplo 4.13: Calcule $(x^2 + 2x - 1)^4$.

Solução:

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x - 1)^4 &= \sum \frac{4!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} (x^2)^{\alpha_1} (2x)^{\alpha_2} (-1)^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{24}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} 2^{\alpha_2} (-1)^{\alpha_3} x^{2\alpha_1 + \alpha_2},\end{aligned}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são inteiros não-negativos tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4$.

Abaixo temos uma tabela dos valores possíveis de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e os corespondentes termos do desenvolvimento.

α_1	α_2	α_3	T
4	0	0	x^8
0	4	0	$16x^4$
0	0	4	1
3	1	0	$8x^7$
3	0	1	$-4x^6$
1	0	3	$-4x^2$
1	3	0	$32x^5$
0	1	3	$-8x$
0	3	1	$-32x^3$
2	1	1	$-24x^5$
1	2	1	$-48x^4$
1	1	2	$24x^3$
2	2	0	$24x^6$
2	0	2	$6x^4$
0	2	2	$24x^2$

Somando e reduzindo os termos semelhantes obtemos

$$(x^2 + 2x - 1)^4 =$$

$$x^8 + 8x^7 + 20x^6 + 8x^5 - 26x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 8x + 1. \quad \square$$

Exemplo 4.14: Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x^2 - x + 2)^6$.

Solução:

$$(x^2 - x + 2)^6 = \sum \frac{6!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(x^2)^{\alpha_1}(-x)^{\alpha_2}2^{\alpha_3}$$
$$= \sum \frac{6!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3}(-1)^{\alpha_2}2^{\alpha_3}x^{2\alpha_1+\alpha_2}.$$

Para que o expoente de x seja 4 devemos ter

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 4$$

As soluções são

α_1	α_2	α_3	Termo
0	4	2	$60x^4$
1	2	3	$480x^4$
2	0	4	$240x^4$

Somando, o termo em x^4 do desenvolvimento é $780x^4$. A resposta é portanto, 780. □

Exemplo 4.15: Deduza uma fórmula para o cálculo do quadrado de um polinômio.

Solução:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \sum \frac{2!}{\alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são inteiros não-negativos tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2$. Há dois tipos de soluções para a equação acima.

i) Um dos α é igual a 2 e os demais são iguais a zero. Obteremos então termos da foram x_i^2 $(1 \leq i \leq n)$.
ii) Dois dos α são iguais a 1 e os demais são iguais a zero. Obteremos então termos da forma $2x_ix_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Logo,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_ix_j,$$

isto é, o quadrado de um polinômio é igual à soma dos quadrados dos seus termos mais a soma dos duplos produtos dos seus termos. Assim, por exemplo,

$$(x^2 + 3x + 1)^2 =$$
$$x^4 + 9x^2 + 1 + 2(x^2)(3x) + 2(x^2)(1) + 2(3x)1 =$$
$$= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1. \quad \square$$

Exercícios

1. Determine o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de

$$(1 + x^5 + x^7)^{20}.$$

2. Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de

$$(x^3 - 3x + 1)^{1822}.$$

3. Quantos termos possui o desenvolvimento de

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{20}?$$

4. Deduza uma fórmula para o cálculo do cubo de um polinômio.