A ÁLGEBRA DE TOEPLITZ

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA USP

MAT5818 – NOTAS DE AULA

2° SEMESTRE DE 2017

Os resultados apresentados nestas notas são muito conhecidos. A presente exposição é inspirada principalmente em [1, 2, 5].

A ÁLGEBRA DE TOEPLITZ ABSTRATA

Sejam H um espaço de Hilbert separável e $\{e_1, e_2, \cdots\}$ um conjunto ortonormal completo. Denotemos por $\mathcal{B}(H)$ e $\mathcal{K}(H)$, respectivamente, a álgebra dos operadores limitados em H e o ideal dos operadores compactos.

Dados inteiros positivos n e m, definamos $E_{nm}(\xi) = \langle e_n, \xi\rangle e_m$, $\xi \in H$. Sendo de posto finito, $E_{nm} \in \mathcal{K}(H)$. É fácil ver que $E^*_{mn} = E_{nm}$.

Proposição 1. *O subespaço gerado por todos os E_{nm}, n e m inteiros positivos, é denso em $\mathcal{K}(H)$.*

Demonstração: Dados $x, y \in H$, denotemos por $\langle x, \cdot\rangle y$ o operador $H \ni \xi \longmapsto \langle x, \xi\rangle y \in H$. Se $x_k \to x$ e $y_k \to y$ em H, então $\langle x_k, \cdot\rangle y_k$ converge a $\langle x, \cdot\rangle y$ em $\mathcal{B}(H)$, pois

$$\|\langle x,\xi\rangle y - \langle x_k,\xi\rangle y_k\| \leq \|\langle x,\xi\rangle y - \langle x_k,\xi\rangle y\| + \|\langle x_k,\xi\rangle y - \langle x_k,\xi\rangle y_k\| \leq (\|x - x_k\|\|y\| + \|x_k\|\|y - y_k\|)\|\xi\|,$$

para todo $\xi \in H$. Segue da densidade do subespaço gerado por $\{e_1, e_2, \cdots\}$ e da identidade

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n, \ \cdot \ \right\rangle \sum_{m=1}^{M} \beta_m e_m = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \overline{\alpha_n}\beta_m E_{nm}$$

que todo operador de posto finito $\displaystyle\sum_{j=1}^{J}\langle x_j, \cdot\rangle y_j$, $x_j, y_j \in H$, é limite de combinações lineares de E_{nm}s. A proposição decorre agora da densidade dos operadores de posto finito em $\mathcal{K}(H)$. $\square$

Seja $S : H \to H$ o operador limitado que satisfaz $Se_n = e_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$. É simples verificar que S é uma isometria e que $S^*e_n = e_{n-1}$ se $n \geq 2$, $S^*e_1 = 0$. Além disso, se m e n são inteiros, $m \geq n > 0$, então

$$[S^n(S^*)^m - (S^*)^m S^n](e_k) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \leq m - n \quad \text{ou} \quad k > m \\ -e_{k-m+n} & \text{se} \quad m - n < k \leq m \end{cases}$$

e, portanto,

$$S^n(S^*)^m - (S^*)^m S^n = -\sum_{l=m-n+1}^{m} \langle e_l, \cdot\rangle e_{l-m+n} = -\sum_{l=m-n+1}^{m} E_{l,m-n+l}. \tag{1}$$

Se $n > m$,

$$S^n(S^*)^m - (S^*)^m S^n = [S^m(S^*)^n - (S^*)^n S^m]^* = -\sum_{l=n-m+1}^{m} (E_{l,n-m+l})^* = -\sum_{l=n-m+1}^{m} E_{n-m+l,l}. \tag{2}$$

Seja $\mathcal{T}$ a menor C*subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ contendo S, ou seja, $\mathcal{T}$ é o fecho do conjunto, que denotamos por $\mathcal{T}_0$, de todas as combinações lineares de produtos (com número arbitrário de termos) de S e S^*. Note que $\mathcal{T}_0$ é uma *subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ e $I = S^*S \in \mathcal{T}_0$.

Usando (1) e (2), observando que combinações lineares de E_{nm}s são operadores de posto finito, e que o conjunto dos operadores de posto finito é um ideal em $\mathcal{B}(H)$, vemos que todo $T \in \mathcal{T}_0$ pode ser escrito como $T = T_1 + T_2$, sendo T_1 uma combinação linear de operadores da forma $S^n(S^*)^m$, m e n inteiros não negativos, e T_2 um operador de posto finito. Novamente usando (1) e (2), vemos que o comutador $[T_1, S_1] = T_1S_1 - S_1T_1$ de duas combinações lineares de $S^n(S^*)^m$s é um operador de posto finito. Logo, usando de novo que os operadores de posto finito formam um ideal, todos os comutadores $[T, S] = TS - ST$, $T, S \in \mathcal{T}_0$, são operadores de posto finito.

Consideremos agora um comutador $[T, S]$ de dois elementos arbitrários T e S de $\mathcal{T}$. Tomemos sequências T_n e S_n em $\mathcal{T}_0$ tais que $T_n \to T$ e $S_n \to S$. Como $[T_n, S_n] \to [T, S]$ e $\mathcal{K}(H)$ é o fecho do conjunto dos operadores de posto finito, segue que $[T, S] \in \mathcal{K}(H)$. Provamos:

Teorema 1. *Todos os comutadores de $\mathcal{T}$ são operadores compactos.*

Além disso, temos:

Teorema 2. *O ideal dos compactos, $\mathcal{K}(H)$, está contido em $\mathcal{T}$.*

Demonstração: Dados $x, y, \xi \in H$ e $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$, temos $T_1(\langle x, T_2\xi\rangle y) = \langle T_2^* x, \xi\rangle T_1 y$ e, portanto,

$$T_1 \circ \langle x, \cdot\rangle y \circ T_2 = \langle T_2^* x, \cdot\rangle T_1 y.$$

Fazendo $m = n = 1$ em (1), vemos que $E_{11} \in \mathcal{T}_0$ e, portanto,

$$S^k E_{11}(S^*)^l = S^k \circ \langle e_1, \cdot\rangle e_1 \circ (S^l)^* = \langle S^l e_1, \cdot\rangle S^k e_1 = \langle e_{l+1}, \cdot\rangle e_{k+1} = E_{l+1,k+1} \in \mathcal{T}_0,$$

para todos inteiros não negativos k e l. Segue da Proposição 1 que $\mathcal{K}(H) \subset \mathcal{T}$. $\square$

Segue do Teorema 2 que $\mathcal{K}(H)$ é um ideal de $\mathcal{T}$. Denotemos por $\mathcal{Q}_T$ o quociente $\mathcal{T}/\mathcal{K}(H)$. Segue do Teorema 1 que a C*álgebra unital $\mathcal{Q}_T$ é comutativa. Denotemos por $\mathbf{M}$ o espectro de $\mathcal{Q}_T$, por $\kappa : \mathcal{Q}_T \to C(\mathbf{M})$ a transformada de Gelfand, por $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{Q}_T$ a projeção canônica $\pi(T) = [T]$, e por $\tau : \mathcal{T} \to C(\mathbf{M})$ o *homomorphismo $\tau = \kappa \circ \pi$.

Teorema 3. *Dado um $T \in \mathcal{T}$ arbitrário, temos que T é um operador de Fredholm se, e somente se, $[\tau(T)](m) \neq 0$ para todo $m \in \mathbf{M}$.*

Demonstração: O Teorema de Atkinson nos diz que T é de Fredholm se, e somente se, a classe de T no quociente $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ é inversível. Como a C*álgebra $\mathcal{Q}_T$ pode ser canonicamente identificada com uma C*subálgebra de $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$, segue que T é de Fredholm se, e somente se, $\pi(T)$ é inversível em $\mathcal{Q}_T$. O teorema segue, agora, de κ ser um isomorfismo de C*álgebras. □

Nossa meta é dar descrições mais concretas de $\mathcal{T}$ e de $\mathbf{M}$, que tornem mais explícito e aplicável o Teorema 3.

Proposição 2. *A aplicação $\tau(S) \in C(\mathbf{M})$ é injetora e $[\tau(S)](m) \in S^1$, para todo $m \in \mathbf{M}$.*

Demonstração: Segue de $S^*S = I$ que

$$|[\tau(S)](m)|^2 = [\tau(S)](m)\overline{[\tau(S)](m)} = [\tau(S^*S)](m) = [\tau(I)](m) = 1,$$

para todo $m \in \mathbf{M}$.

Sejam $m, m' \in \mathbf{M}$ e suponha que $[\tau(S)](m) = [\tau(S)](m')$. Segue de τ ser um *homomorfismo que $[\tau(T)](m) = [\tau(T)](m')$ para todo $T \in \mathcal{T}_0$. Segue da continuidade de τ que, para todo $T \in \mathcal{T}$, $[\tau(T)](m) = [\tau(T)](m')$ e, portanto, $\kappa([T])(m) = \kappa([T])(m')$, para todo $[T] \in \mathcal{Q}_T$. Segue da definição da transformada de Gelfand que os homomorfismos $m, m' : \mathcal{Q}_T \to \mathbb{C}$ são iguais. □

Seja $L \subseteq S^1$ a imagem da aplicação injetora $\tau(S) : \mathbf{M} \to S^1$. Sendo $\tau(S)$ contínua e S^1 compacto, L é compacto e $\tau(S) : S^1 \to L$ é um homeomorfismo.

Teorema 4. $L = S^1$.

Demonstração: Dado $w \in S^1$, seja $U_w \in \mathcal{B}(H)$ o operator unitário definido por $U_w(e_k) = w^k e_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Segue de $U_w^* S U_w = \overline{w} S$ que a aplicação $T \mapsto U_w^* T U_w$ deixa $\mathcal{T}$ invariante. Como também $\mathcal{K}(H)$ é invariante por conjugação por U_w (na verdade, por conjugação por qualquer unitário), dado $m : \mathcal{Q}_T \to \mathbb{C}$ pertencente a $\mathbf{M}$, podemos definir $m_w : \mathcal{Q}_T \to \mathbb{C}$, $m_w([T]) = m([U_w^* T U_w])$, $T \in \mathcal{T}$. Segue de $[T] \mapsto [U_w^* T U_w]$ ser um *isomorfismo de $\mathcal{Q}_T$ que $m_w \in \mathbf{M}$. Segue de $U_w^* S U_w = \overline{w} S$ que $\tau(U_w^* S U_w) = \overline{w}\tau(S)$.

Dado $\lambda \in L$, seja $m \in \mathbf{M}$ tal que $\tau(S) = \lambda$. Então $\tau(U_w^* S U_w) = \overline{w}\tau(S) = \overline{w}\lambda \in L$, para todo $w \in S^1$. Sendo homeomorfo ao espectro de $\mathcal{Q}_T$, L é não vazio. Seja $\lambda_0 \in L$. Dado um ponto $\lambda \in S^1$ arbitrário, tome $w = \overline{\lambda}\lambda_0$. Então $\lambda = \overline{w}\lambda_0 \in L$. □

Corolário 1. *$\tau(S) : \mathbf{M} \to S^1$ é um homeomorfismo.*

Corolário 2. *A aplicação que leva $f \in C(\mathbf{M})$ em $f \circ \tau(S)^{-1} \in C(S^1)$ é um *-isomorfismo.*

Definimos $\sigma : \mathcal{T} \to C(S^1)$, $\sigma(T) = \tau(T) \circ \tau(S)^{-1}$. Claro então que

$$[\sigma(S)](\lambda) = \lambda, \quad \text{para todo} \quad \lambda \in S^1. \tag{3}$$

Segue do Corolário 2 que, dado $T \in \mathcal{T}$, $\tau(T)$ nunca se anula se, e somente se, $\sigma(T)$ nunca se anula. Obtemos assim a seguinte reformulação do Teorema 3.

Teorema 5. *Dado um $T \in \mathcal{T}$ arbitrário, temos que T é um operador de Fredholm se, e somente se, $[\sigma(T)](\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in S^1$.*

Os operadores de Toeplitz

A álgebra $\mathcal{T}$ foi definida na seção anterior a partir de um espaço de Hilbert separável arbitrário H e de um conjunto ortonormal completo de H. As C*álgebras que se obtêm a partir de diferentes escolhas do espaço de Hilbert e da base são canonicamente isomorfas e todos os resultados que obtivemos até agora independem dessas escolhas. Nesta seção, faremos uma escolha particular do espaço de Hilbert H e de um conjunto ortonormal completo de H, de modo a poder descrever $\mathcal{T}$ como sendo a C*álgebra gerada pelos clássicos *operadores de Toeplitz* com símbolos contínuos no círculo.

Em $L^2(S^1)$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C};\, |z| = 1\}$, consideramos o produto interno

$$\langle f, g\rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{i\theta})}g(e^{i\theta})\,d\theta, \quad f, g \in L^2(S^1),$$

e denotamos por $\|\cdot\|_2$ a norma por ele induzida. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja $e_k(z) = z^k$, $z \in S^1$. É bem sabido que, munido deste produto interno, $L^2(S^1)$ é um espaço de Hilbert e que $\{e_k;\, k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal completo.

Definimos H como o subespaço fechado de $L^2(S^1)$ gerado por $\{e_k;\, k \geq 0\}$. O espaço H é classicamente denotado por $H^2(S^1)$ e é um dos chamados *espaços de Hardy* no círculo. Num certo sentido que necessita de uma definição precisa, $H^2(S^1)$ consiste [6, Theorem 17.10] das funções de $L^2(S^1)$ que são valores de fronteira de funções holomorfas no disco aberto $\{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$.

Seja P a projeção ortogonal de $L^2(S^1)$ sobre H. Para cada $f \in C(S^1)$, define-se o *operador de Toeplitz com símbolo f*, $T_f : H \to H$, por $T_f(\varphi) = P(f\varphi)$. Denotando por $\|\cdot\|_\infty$ a norma do supremo em $C(S^1)$, segue de $\|f\varphi\|_2 \leq \|f\|_\infty\|\varphi\|_2$ e $\|P\| \leq 1$ que $T_f \in \mathcal{B}(H)$ e

$$\|T_f\| \leq \|f\|_\infty. \tag{4}$$

Tal como no caso geral, seja $S : H \to H$ o operador definido por $S(e_k) = e_{k+1}$, $k \geq 0$ e seja $\mathcal{T}$ a C*subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ gerada por S (claro que não faz diferença indexarmos a sequência por $\{1, 2, 3\cdots\}$ ou por $\{0, 1, 2, \cdots\}$).

Chamamos de *polinômio trigonométrico* uma combinação linear de elementos de $\{e_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 6. *A C*subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ gerada por $\{T_f;\ f \in C(S^1)\}$ coincide com $\mathcal{T}$.*

Demonstração: Segue de $S = T_{e_1}$ que a C*subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ gerada por $\{T_f;\ f \in C(S^1)\}$ contém $\mathcal{T}$.

É fácil verificar que $S^n = T_{e_n}$, para todo inteiro $n \geq 0$, e $(S^*)^m = T_{e_{-m}}$, para todo inteiro $m > 0$. Assim, se f é um polinômio trigonométrico, então $T_f \in \mathcal{T}$. É bem sabido que, dada $f \in C(S^1)$, existe uma sequência f_n polinômios trigonométricos tal que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$. Daí, $\|T_f - T_{f_n}\| \leq \|f - f_n\|_\infty \to 0$ e, portanto, $T_f \in \mathcal{T}$ (pois $\mathcal{T}$ é fechada). $\square$.

Lema 1. *Dada $f \in C(S^1)$, $[\sigma(T_f)](\lambda) = f(\lambda)$, para todo $\lambda \in S^1$.*

Demonstração: Dada $f \in C(S^1)$ existe uma sequência f_k de polinômios trigonométricos tal que $\|f - f_k\|_\infty \to 0$. Segue da continuidade de τ que basta supor que f é um polinômio trigonométrico. Temos: $S^k = T_{e_k}$, $(S^*)^l = T_{e_{-l}}$, $\sigma(S^k) = \sigma(S)^k$ e $\sigma[(S^*)^l] = \overline{\sigma(S)^l} = \sigma(S)^{-l}$, para k, l inteiros positivos. Segue agora de (3) que, para

$$f = \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k,\ c_k \in \mathbb{C},\ N \in \mathbb{N}, \quad \text{temos } T_f = \sum_{k=-N}^{-1} c_k (S^*)^{-k} + \sum_{k=0}^{N} c_k S^k,$$

$$\sigma(T_f) = \sum_{k=-N}^{-1} c_k \sigma[(S^*)^{-k}] + \sum_{k=0}^{N} c_k \sigma(S^k) = \sum_{k=-N}^{-N} c_k \sigma(S)^k$$

e

$$[\sigma(T_f)](\lambda) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \sigma(S)^k(\lambda) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \lambda^k = f(\lambda)$$

para todo $\lambda \in L$. $\square$

Usando o Teorema 6 e o Lema 1, o Teorema 5 aplicado a T_f, $f \in C(S^1)$, resulta no seguinte teorema, cujo enunciado pode ser apreciado de um ponto de vista de “Teoria de Operadores pura”, isto é, seu enunciado pode ser compreendido sem que seja preciso invocar conceito algum da teoria das Álgebras de Banach.

Teorema 7. *Dada $f \in C(S^1)$, o operador de Toeplitz $T_f : H^2(S^1) \to H^2(S^1)$ é um operador de Fredholm se, e somente se, $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in S^1$.*

Uma outra aplicação do Corolário 2 e do Lema 1 é que vale a igualdade em (4):

Teorema 8. *Dada $f \in C(S^1)$, o operador de Toeplitz $T_f : H^2(S^1) \to H^2(S^1)$ satisfaz*

$$\|T_f\| = \inf_{K \in \mathcal{K}(H)} \|T_f + K\| = \|f\|_\infty.$$

Demonstração: Segue da definição de τ na página 2 que o núcleo de τ é igual a $\mathcal{K}(H)$, pois κ é um isomorfismo. O homomorfismo $\sigma : \mathcal{T} \to C(S^1)$ foi definido como a composição do isomorfismo do Corolário 2 com τ. Logo, o núcleo de σ também é igual a $\mathcal{K}(H)$.

Dado um homomorfismo de C*álgebras, a bijeção canonicamente induzida entre o quociente de seu domínio pelo núcleo e sua imagem é uma isometria. Logo, para todo $T \in \mathcal{T}$,

$$\inf_{K\in\mathcal{K}(H)} \|T + K\| = \sup_{\lambda\in S^1} |\sigma(T)(\lambda)|.$$

Em particular, tomando $T = T_f$ e aplicando o Lema 1 e (4), segue que

$$\|T_f\| \geq \inf_{K\in\mathcal{K}(H)} \|T_f + K\| = \|f\|_\infty \geq \|T_f\|,$$

como queríamos. □

Este resultado tem aplicações ao estudo de problemas de valor de fronteira: o Lemma 3.1.5 de [3], por exemplo, pode ser obtido a partir do Teorema 8, veja [4, Section 3.1 e Lemma 2].

Dado qualquer $T \in \mathcal{T}$, seja $f = \sigma(T)$. Como $\sigma(T - T_f) = 0$ e $\ker\sigma = \mathcal{K}(H)$, $T - T_f \in \mathcal{K}(H)$. Logo todo $T \in \mathcal{T}$ pode ser escrito como a soma de um operador de Toeplitz T_f, $f \in C(S^1)$, com um operador compacto. Essa decomposição é única pois, se $T_f + K = T_g + K'$, então T_{f-g} é compacto, logo $0 = \sigma(T_f - T_g) = f - g$. Ou seja, o subespaço fechado $\mathcal{T}$ de $B(H)$ pode ser escrito como a soma direta de dois outros subespaços fechados,

$$\mathcal{T} = \{T_f;\ f \in C(S^1)\} \oplus \mathcal{K}(H),$$

sendo $C(S^1) \ni f \mapsto T_f$ uma isometria de $C(S^1)$ em $\{T_f;\ f \in C(S^1)\}$. O Teorema 8 nos diz portanto que a projeção

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} & \longrightarrow & \{T_f;\ f \in C(S^1)\} \\ A & \longmapsto & T_{\sigma(A)} \end{array}$$

tem norma 1.

Referências

[1] H. O. Cordes. Elliptic pseudo-differential operators – An abstract theory, Lecture Notes in Mathematics **756**. Springer, 1979.

[2] R. G. Douglas. Banach algebra techniques in operator theory. Academic Press, 1972.

[3] G. Grubb. Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems, 2nd Edition. Birkhäuser, 1996.

[4] S. T. Melo, R. Nest & E. Schrohe. *C*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra.* J. reine angew. Math. **561** (2003), 145–175.

[5] M. Rørdan, F. Larsen & N. Laustsen. An introduction to K-theory for C*algebras, London Mathematical Society Student Texts **79**. Cambridge University Press 2000.

[6] W.Rudin. Real and Complex Analysis, 2nd Edition. McGraw-Hill, 1974.