

MAT 0334 - Análise Funcional
Prova Substitutiva - 4 de julho de 2017

Nome : _____

Número USP : _____

Assinatura : _____

Professor: Severino Toscano do Rego Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

Questão 1) (2,5 pts) Seja X um espaço de Banach e sejam $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge e que $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Questão 2) (2,5 pts)

Dado $1 \leq p < \infty$, considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n : \ell^p \rightarrow \ell^p$, $T_n((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (x_{k+n})_{k \in \mathbb{N}}$.

- (a) Mostre que cada T_n é um operador limitado.
- (b) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \mathbf{x} = 0$, para todo $\mathbf{x} \in \ell^p$.
- (c) É verdadeiro ou falso que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = 0$?

Questão 3) (2,5 pts)

Seja $D = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2; (k x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2\}$ e considere $M : D \rightarrow \ell^2$, $M((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (k x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

- (a) Mostre que o gráfico de M é fechado em $\ell^2 \times \ell^2$.
- (b) Mostre que M não é limitado.
- (c) Por que as afirmações dos dois itens precedentes não contradizem o Teorema do Gráfico Fechado?

Questão 4) (2,5 pts) Seja X um espaço de Banach.

(a) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que, para cada $\lambda \in X^*$, $(\lambda(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em \mathbb{C} . Mostre que $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

(b) Seja $E \subset X$ tal que, para cada $\lambda \in X^*$, $\{\lambda(x); x \in E\}$ é limitado em \mathbb{C} . Mostre que $\{\|x\|; x \in E\}$ é limitado