### Revisão de conceitos

- Espaço vetorial
- Fechamento na adição
- Fechamento na multiplicação por escalar
- Exemplos de espaços vetoriais

### Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um dado conjunto com duas operações é um espaço vetorial.
- Mostrar que um conjunto com duas operações não é um espaço vetorial provando que pelo menos um dos axiomas falha.

## Conjunto de exercícios 4.1

**1.** Seja $V$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),\ a\mathbf{u} = (0, au_2)$$

(a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$, com $\mathbf{u} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$ e $a = 3$.

(b) Explique por que $V$ é fechado na adição e multiplicação por escalar.

(c) Como a adição de $V$ é a operação de adição padrão de $R^2$, certos axiomas de espaço vetorial valem para $V$ por valerem em $R^2$. Quais são esses axiomas?

(d) Mostre que valem os Axiomas 7, 8 e 9.

(e) Mostre que o Axioma 10 falha e que, portanto, $V$ não é um espaço vetorial com as operações dadas.

**2.** Seja $V$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1), \quad a\mathbf{u} = (au_1, au_2)$$

(a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$, com $\mathbf{u} = (0, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -3)$ e $a = 2$.

(b) Mostre que $(0, 0) \neq \mathbf{0}$.

(c) Mostre que $(-1,-1) = \mathbf{0}$.

(d) Mostre que vale o Axioma 5 fornecendo um par ordenado $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, com $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

(e) Encontre dois axiomas de espaço vetorial que não sejam válidos.

Nos Exercícios 3–12, determine se o conjunto equipado com as operações dadas é um espaço vetorial. Para os que não são espaços vetoriais, identifique os axiomas que falham.

**3.** O conjunto de todos os números reais com as operações padrão de adição e multiplicação.

**4.** O conjunto de todos os pares de números reais da forma $(x, 0)$ com as operações padrão de $R^2$.

**5.** O conjunto de todos os pares de números reais da forma $(x, y)$, em que $x \geq 0$, com as operações padrão de $R^2$.

**6.** O conjunto de todas as ênuplas de números reais da forma $(x, x, \ldots, x)$ com as operações padrão de $R^n$.

**7.** O conjunto de todos os ternos de números reais com a operação padrão de adição, mas com multiplicação por escalar definida por

$$a(x, y, z) = (a^2x, a^2y, a^2z)$$

**8.** O conjunto de todas as matrizes $2 \times 2$ invertíveis com as operações matriciais padrão de adição e multiplicação por escalar.

**9.** O conjunto de todas as matrizes $2 \times 2$ da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

com as operações matriciais padrão de adição e multiplicação por escalar.

**10.** O conjunto de todas as funções reais $f$ definidas em cada ponto da reta real e tais que $f(1) = 0$, com as operações do Exemplo 6.

**11.** O conjunto de todos os pares de números reais da forma $(1, x)$ com as operações

$$(1, y) + (1, y') = (1, y + y') \quad \text{e} \quad a(1, y) = (1, ay)$$

**12.** O conjunto de todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x$ com as operações

$$(a_0 + a_1x) + (b_0 + b_1x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x$$

e

$$k(a_0 + a_1x) = (ka_0) + (ka_1)x$$

**13.** Verifique os Axiomas 3, 7, 8 e 9 com o espaço vetorial dado no Exemplo 4.

**14.** Verifique os Axiomas 1, 2, 3, 7, 8, 9 e 10 com o espaço vetorial dado no Exemplo 6.

**15.** Com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas no Exemplo 7, mostre que $V = R^2$ satisfaz os Axiomas de 1 até 9.

**16.** Verifique os Axiomas 1, 2, 3, 6, 8, 9 e 10 com o espaço vetorial dado no Exemplo 8.

**17.** Mostre que o conjunto de todos os pontos em $R^2$ que estão numa reta é um espaço vetorial em relação às operações padrão de adição e multiplicação por escalar se, e só se, a reta passa pela origem.

**18.** Mostre que o conjunto de todos os pontos em $R^3$ que estão num plano é um espaço vetorial em relação às operações padrão de adição e multiplicação por escalar se, e só se, o plano passa pela origem.

Nos Exercícios **19–21**, prove que o conjunto com as operações dadas é um espaço vetorial.

**19.** O conjunto $V = \{\mathbf{0}\}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar dadas no Exemplo 1.

**20.** O conjunto de todas as sequências infinitas de números reais com as operações de adição e multiplicação por escalar dadas no Exemplo 3.

**21.** O conjunto $M_{mn}$ de todas as matrizes $m \times n$ com as operações padrão de adição e multiplicação por escalar.

**22.** Prove a parte ($d$) do Teorema 4.1.1.

**23.** O argumento a seguir prova que se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores num espaço vetorial $V$ tais que $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (a ***lei de cancelamento*** para a adição vetorial). Conforme exemplificado, justifique ao passos dados preenchendo as lacunas.

| | |
|---|---|
| $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ | Hipótese |
| $(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w})$ | Somar $-\mathbf{w}$ a ambos lados |
| $\mathbf{u} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})] = \mathbf{v} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})]$ | ______________ |
| $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$ | ______________ |
| $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ | ______________ |

**24.** Seja $\mathbf{v}$ um vetor qualquer num espaço vetorial. Prove que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

**25.** O argumento a seguir prova em sete passos a parte ($b$) do Teorema 4.1.1. Justifique cada passo afirmando que é verdadeiro por hipótese ou especificando qual dos dez axiomas de espaço vetorial é aplicável.

*Hipótese*: sejam $\mathbf{u}$ um vetor qualquer num espaço vetorial, $\mathbf{0}$ o vetor nulo de $V$ e $a$ um escalar.

*Conclusão*: então $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

*Prova*:

(1) $a\mathbf{0} + a\mathbf{u} = a(\mathbf{0} + \mathbf{u})$

(2) $\qquad = a\mathbf{u}$

(3) Como $a\mathbf{u}$ está em $V$, $-a\mathbf{u}$ está em $V$.

(4) Portanto, $(a\mathbf{0} + a\mathbf{u}) + (-a\mathbf{u}) = a\mathbf{u} + (-a\mathbf{u})$.

(5) $a\mathbf{0} + (a\mathbf{u} + (-a\mathbf{u})) = a\mathbf{u} + (-a\mathbf{u})$

(6) $a\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(7) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

**26.** Seja $\mathbf{v}$ um vetor qualquer num espaço vetorial. Prove que $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$.

**27.** Prove: se $\mathbf{u}$ for um vetor num espaço vetorial $V$ e $a$ um escalar tais que $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$, então ou $a = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. [*Sugestão*: mostre que se $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $a \neq 0$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. O resultado segue, então, como uma consequência lógica.]

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um vetor é um segmento de reta orientado (seta).

(b) Um vetor é uma ênupla de números reais.

(c) Um vetor é um elemento qualquer num espaço vetorial.

(d) Existe um espaço vetorial consistindo em exatamente dois vetores distintos.

(e) O conjunto de polinômios de grau exatamente 1 é um espaço vetorial com as operações definidas no Exemplo 12.

## 4.2 Subespaços

É possível para um espaço vetorial estar contido num outro espaço vetorial. Nesta seção, discutimos como reconhecer tais espaços vetoriais e apresentamos uma variedade de exemplos que serão utilizados mais adiante.

Começamos com alguma terminologia.

**DEFINIÇÃO 1** Um subconjunto $W$ de um espaço vetorial $V$ é denominado ***subespaço*** de $V$ se $W$ for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $V$.

Em geral, devemos verificar os dez axiomas de espaço vetorial para mostrar que um conjunto $W$ com duas operações forma um espaço vetorial. No entanto, se $W$ for parte de um espaço vetorial $V$ conhecido, então certos axiomas não precisam ser verificados, pois eles são "herdados" de $V$. Por exemplo, *não* é necessário conferir que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ vale em $W$, pois isso vale para todos os vetores de $V$, inclusive os de $W$. Por outro lado, *é* ne-

**Observação** Enquanto o conjunto das soluções de cada sistema *homogêneo* de $m$ equações em $n$ incógnitas é um subespaço de $R^n$, *nunca* é verdade que o conjunto das soluções de um sistema *não homogêneo* de $m$ equações em $n$ incógnitas seja um subespaço de $R^n$. Há dois cenários possíveis: primeiro, o sistema pode não ter quaisquer soluções; e segundo, se houver soluções, então o conjunto de soluções não será fechado nem na adição, nem na multiplicação por escalar (Exercício 18).

*Observação final* É importante reconhecer que os conjuntos geradores não são únicos. Por exemplo, qualquer vetor não nulo na reta da Figura 4.2.6*a* gera aquela reta, e quaisquer dois vetores não colineares no plano da Figura 4.2.6*b* geram aquele plano. O próximo teorema, cuja prova é deixada como exercício, enuncia condições sob as quais dois conjuntos de vetores geram o mesmo espaço.

**TEOREMA 4.2.5** *Se* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *e* $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ *são conjuntos não vazios de vetores num espaço vetorial V, então*

$$\text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} = \text{ger}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$$

*se, e só se, cada vetor em S é uma combinação linear dos vetores em S', e cada vetor em S' é uma combinação linear dos vetores em S.*

### Revisão de conceitos

- Subespaço
- Subespaço nulo
- Exemplos de subespaços
- Combinação linear
- Gerado
- Espaço solução

### Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço.
- Mostrar que um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço.
- Mostrar que um subconjunto não vazio de um espaço vetorial não é um subespaço demonstrando que o conjunto não é fechado na adição ou não é fechado na multiplicação por escalar.
- Dado um conjunto $S$ de vetores em $R^n$ e um vetor $\mathbf{v}$ em $R^n$, determinar se $\mathbf{v}$ é uma combinação linear dos vetores em $S$.
- Dado um conjunto $S$ de vetores em $R^n$, determinar se os vetores em $S$ geram $R^n$.
- Determinar se dois conjuntos não vazios de vetores num espaço vetorial $V$ geram o mesmo subespaço de $V$.

## Conjunto de exercícios 4.2

**1.** Use o Teorema 4.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de $R^3$.

(a) Todos os vetores da forma $(a, 0, 0)$.

(b) Todos os vetores da forma $(a, 1, 1)$.

(c) Todos os vetores da forma $(a, b, c)$, com $b = a + c$.

(d) Todos os vetores da forma $(a, b, c)$, com $b = a + c + 1$.

(e) Todos os vetores da forma $(a, b, 0)$.

**2.** Use o Teorema 4.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de $M_{nn}$.

(a) O conjunto de todas as matrizes $(a, 0, 0)$ diagonais.

(b) O conjunto de todas as matrizes $A$ de tamanho $n \times n$ tais que $\det(A) = 0$.

(c) O conjunto de todas as matrizes $A$ de tamanho $n \times n$ tais que $\text{tr}(A) = 0$.

(d) O conjunto de todas as matrizes $n \times n$ simétricas.

(e) O conjunto de todas as matrizes $A$ de tamanho $n \times n$ tais que $A^T = -A$.

(f) O conjunto de todas as matrizes $A$ de tamanho $n \times n$ com as quais $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

(g) O conjunto de todas as matrizes $A$ de tamanho $n \times n$ tais que $AB = BA$ com alguma matriz $B$ fixada.

**3.** Use o Teorema 4.2.1 para determinar quais dos seguintes são subespaços de $P_3$.

(a) Todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ com $a_0 = 0$.

(b) Todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ com $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

(c) Todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ em que $a_0$, $a_1$, $a_2$ são inteiros.

(d) Todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x$ em que $a_0$ e $a_1$ são números reais.

**4.** Quais dos seguintes são subespaços de $F(-\infty, \infty)$?

(a) Todas as funções $f$ em $F(-\infty, \infty)$ tais que $f(0) = 0$.

(b) Todas as funções $f$ em $F(-\infty, \infty)$ tais que $f(0) = 1$.

(c) Todas as funções $f$ em $F(-\infty, \infty)$ tais que $f(-x) = f(x)$.

(d) Todos os polinômios de grau 2.

**5.** Quais dos seguintes são subespaços de $R^\infty$?

(a) Todas as sequências $\mathbf{v}$ em $R^\infty$ da forma $\mathbf{v} = (v, 0, v, 0, v, 0, \ldots)$.

(b) Todas as sequências $\mathbf{v}$ em $R^\infty$ da forma $\mathbf{v} = (v, 1, v, 1, v, 1, \ldots)$.

(c) Todas as sequências $\mathbf{v}$ em $R^\infty$ da forma $\mathbf{v} = (v, 2v, 4v, 8v, 16v, \ldots)$.

(d) Todas as sequências em $R^\infty$ cujos componentes são nulos a partir de algum ponto.

**6.** Uma reta $L$ pela origem em $R^3$ pode ser representada por equações paramétricas da forma $x = at$, $y = bt$ e $z = ct$. Use essas equações para mostrar que $L$ é um subespaço de $R^3$, mostrando que se $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ forem pontos em $L$ e $k$ for um número real qualquer, então $k\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ também são pontos em $L$.

**7.** Quais dos seguintes são combinações lineares de $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$?

(a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$

(c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$

**8.** Expresse os seguintes como combinações lineares de $\mathbf{u} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

(a) $(-9, -7, -15)$ (b) $(6, 11, 6)$

(c) $(0, 0, 0)$ (d) $(7, 8, 9)$

**9.** Quais dos seguintes são combinações lineares de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

(a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

**10.** Em cada parte, expresse o vetor como uma combinação linear de $\mathbf{p}_1 = 2 + x + 4x^2$, $\mathbf{p}^2 = 1 - x + 3x^2$ e $\mathbf{p}_3 = 3 + 2x + 5x^2$.

(a) $-9 - 7x - 15x^2$ (b) $6 + 11x + 6x^2$

(c) $0$ (d) $7 + 8x + 9x^2$

**11.** Em cada parte, determine se os vetores dados geram $R^3$.

(a) $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (8, -1, 8)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 5)$, $\mathbf{v}_3 = (5, -2, 9)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 4, -1)$

(d) $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 6)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 4, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 3, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (3, 3, 1)$

**12.** Sejam $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$. Em cada parte, decida se o vetor está em $\text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(a) $(2, 3, -7, 3)$ (b) $(0, 0, 0, 0)$

(c) $(1, 1, 1, 1)$ (d) $(-4, 6, -13, 4)$

**13.** Determine se os polinômios dados geram $P_2$.

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x + 2x^2, \quad \mathbf{p}_2 = 3 + x,$$
$$\mathbf{p}_3 = 5 - x + 4x^2, \quad \mathbf{p}_4 = -2 - 2x + 2x^2$$

**14.** Sejam $\mathbf{f} = \cos^2 x$ e $\mathbf{g} = \operatorname{sen}^2 x$. Quais dos seguintes estão no espaço gerado por $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$?

(a) $\cos 2x$ (b) $3 + x^2$ (c) $1$ (d) $\operatorname{sen} x$ (e) $0$

**15.** Determine se o espaço solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é uma reta pela origem, um plano pela origem ou somente a origem. Se for um plano, obtenha uma equação desse plano; se for uma reta, obtenha equações paramétricas dessa reta.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

**16.** (***Requer Cálculo***) Mostre que os seguintes conjuntos de funções são subespaços de $F(-\infty, \infty)$.

(a) Todas as funções contínuas em $(-\infty, \infty)$.

(b) Todas as funções deriváveis em $(-\infty, \infty)$.

(c) Todas as funções deriváveis em $(-\infty, \infty)$ que satisfazem $\mathbf{f}' + 2\mathbf{f} = 0$.

**17.** (***Requer Cálculo***) Mostre que o conjunto das funções $\mathbf{f} = f(x)$ contínuas em $[a, b]$ tais que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

é um subespaço de $C[a, b]$.

**18.** Mostre que os vetores solução de um sistema não homogêneo e consistente de $m$ equações lineares em $n$ incógnitas não formam um subespaço de $R^n$.

**19.** Prove o Teorema 4.2.5.

**20.** Use o Teorema 4.2.5 para mostrar que os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 6, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 2, 5)$, $\mathbf{w}_1 = (1, -2, -5)$ e $\mathbf{w}_2 = (0, 8, 9)$ geram o mesmo subespaço de $R^3$.

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Cada subespaço de um espaço vetorial é, ele mesmo, um espaço vetorial.

(b) Cada espaço vetorial é um subespaço de si mesmo.

(c) Cada subconjunto de um espaço vetorial $V$ que contenha o vetor zero de $V$ é um subespaço de $V$.

(d) O conjunto $R^2$ é um subespaço de $R^3$.

(e) O conjunto das soluções de um sistema linear consistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de $m$ equações em $n$ incógnitas é um subespaço de $R^n$.

(f) O gerado de qualquer conjunto finito de vetores em um espaço vetorial é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

(g) A interseção de dois subespaços quaisquer de um espaço vetorial $V$ é um subespaço vetorial de $V$.

(h) A união de dois subespaços quaisquer de um espaço vetorial $V$ é um subespaço vetorial de $V$.

(i) Dois subconjuntos de um espaço vetorial $V$ que geram o mesmo subespaço de $V$ devem ser iguais.

(j) O conjunto de matrizes $n \times n$ triangulares superiores é um subespaço do espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$.

(k) Os polinômios $x - 1$, $(x - 1)^2$ e $(x - 1)^3$ geram $P^3$.

## 4.3 Independência linear

Nesta seção, consideramos o problema de decidir se os vetores de um dado conjunto estão inter-relacionados, no sentido de que um deles, ou mais, pode ser expresso como uma combinação linear dos outros. Isso é importante nas aplicações, porque a existência de tais relações muitas vezes indica que podem ocorrer certos tipos de complicações.

*Vetores irrelevantes*

Num sistema de coordenadas retangulares $xy$, cada vetor no plano pode ser expresso de exatamente uma maneira como combinação linear dos vetores unitários canônicos. Por exemplo, a única maneira de escrever o vetor (3, 2) como uma combinação linear de $\mathbf{i} = (1, 0)$ e $\mathbf{j} = (0, 1)$ é

$$(3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \tag{1}$$

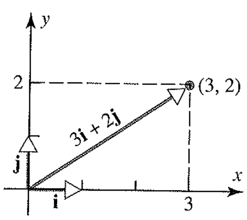



Figura 4.3.1

(Figura 4.3.1). Entretanto, vejamos o que ocorre se introduzirmos um terceiro eixo coordenado que faz um ângulo de 45° com o eixo $x$. Denotemos esse eixo por $w$. Conforme ilustrado na Figura 4.3.2, o vetor unitário ao longo do eixo $w$ é

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

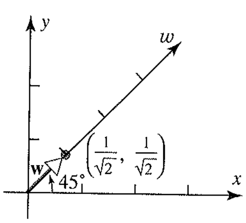



Figura 4.3.2

Enquanto a Fórmula (1) mostra a única maneira de escrever o vetor (3, 2) como uma combinação linear de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, há uma infinidade de maneiras de escrever esse vetor como uma combinação linear de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{w}$. Três possibilidades são

$$(3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{w}$$

$$(3, 2) = 2(1, 0) + (0, 1) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{w}$$

$$(3, 2) = 4(1, 0) + 3(0, 1) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{w}$$

Resumindo, ao introduzir um eixo supérfluo, criamos a complicação de ter múltiplas maneiras de associar coordenadas aos pontos do plano. O que torna o vetor $\mathbf{w}$ supérfluo é o fato de que ele pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, a saber,

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

## Conjunto de exercícios 4.3

**1.** Explique por que o conjunto de vetores dado é linearmente independente. (Resolva o problema inspecionando o conjunto.)

(a) $\mathbf{u}_1 = (-1, 2, 4)$ e $\mathbf{u}_2 = (5, -10, -20)$ em $R^3$

(b) $\mathbf{u}_1 = (3, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (4, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (-4, 7)$ em $R^2$

(c) $\mathbf{p}_1 = 3 - 2x + x^2$ e $\mathbf{p}_2 = 6 - 4x + 2x^2$ em $P_2$

(d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ em $M_{22}$

**2.** Quais dos seguintes conjuntos de vetores em $R^3$ são linearmente dependentes?

(a) $(4, -1, 2), (-4, 10, 2)$

(b) $(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)$

(c) $(8, -1, 3), (4, 0, 1)$

(d) $(-2, 0, 1), (3, 2, 5), (6, -1, 1), (7, 0, -2)$

**3.** Quais dos seguintes conjuntos de vetores em $R^4$ são linearmente dependentes?

(a) $(3, 8, 7, -3), (1, 5, 3, -1), (2, -1, 2, 6), (1, 4, 0, 3)$

(b) $(0, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 0), (1, 1, 0, -1)$

(c) $(0, 3, -3, -6), (-2, 0, 0, -6), (0, -4, -2, -2), (0, -8, 4, -4)$

(d) $(3, 0, -3, 6), (0, 2, 3, 1), (0, -2, -2, 0), (-2, 1, 2, 1)$

**4.** Quais dos seguintes conjuntos de vetores em $P_2$ são linearmente dependentes?

(a) $2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2$

(b) $3 + x + x^2, 2 - x + 5x^2, 4 - 3x^2$

(c) $6 - x^2, 1 + x + 4x^2$

(d) $1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2$

**5.** Suponha que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sejam vetores em $R^3$ com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão num mesmo plano.

(a) $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, -4)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (-6, 7, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 2)$

**6.** Suponha que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sejam vetores em $R^3$ com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão num mesmo plano.

(a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, -6)$, $\mathbf{v}_3 = (-3, 6, 0)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 7, -6)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (4, 6, 8)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, -3, -4)$

**7.** (a) Mostre que os três vetores $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 0, 5, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (4, -7, 1, 3)$ formam um conjunto linearmente dependente em $R^4$.

(b) Expresse cada vetor na parte (a) como uma combinação linear dos outros dois.

**8.** (a) Mostre que os três vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 3, 3)$ formam um conjunto linearmente dependente em $R^4$.

(b) Expresse cada vetor na parte (a) como uma combinação linear dos outros dois.

**9.** Os vetores dados formam um conjunto linearmente dependente em $R^3$ com quais valores reais de $\lambda$?

$$\mathbf{v}_1 = \left(\lambda, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, \lambda, -\tfrac{1}{2}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \lambda\right)$$

**10.** Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for um conjunto linearmente independente de vetores, então também o são $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2\}$ e $\{\mathbf{v}_3\}$.

**11.** Mostre que se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto linearmente independente de vetores, então também o é qualquer subconjunto não vazio de $S$.

**12.** Mostre que se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for um conjunto linearmente dependente de vetores num espaço vetorial $V$ e se $\mathbf{v}_4$ for um vetor qualquer em $V$ que não está em $S$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ também é linearmente dependente.

**13.** Mostre que se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto linearmente dependente de vetores num espaço vetorial $V$ e se $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ forem vetores quaisquer em $V$ que não estão em $S$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ também é linearmente dependente.

**14.** Mostre que qualquer conjunto com mais de três vetores em $P_2$ é linearmente dependente.

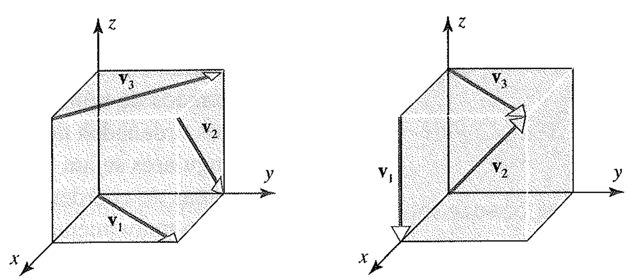
**15.** Mostre que se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ for um conjunto linearmente independente e $\mathbf{v}_3$ não pertencer a $\text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, então $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.

**16.** Prove: dados quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ num espaço vetorial $V$, os vetores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ e $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ formam um conjunto linearmente dependente.

**17.** Prove: o espaço gerado por dois vetores em $R^3$ é uma reta pela origem, um plano pela origem, ou a própria origem.

**18.** Sob quais condições é um conjunto de um único vetor linearmente independente?

**19.** Os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ na parte (*a*) da figura dada são linearmente independentes? E os da parte (*b*)? Explique.




(*a*) (*b*)

Figura Ex-19

**20.** Utilizando identidades apropriadas, onde necessário, determine quais dos conjuntos de vetores em $F(-\infty, \infty)$ dados são linearmente dependentes.

(a) $6, 3\,\text{sen}^2 x, 2\cos^2 x$ (b) $x, \cos x$

(c) $1, \text{sen}\, x, \text{sen}\, 2x$ (d) $\cos 2x, \text{sen}^2 x, \cos^2 x$

(e) $(3-x)^2, x^2 - 6x, 5$ (f) $0, \cos^3 \pi x, \text{sen}^5 3\pi x$

**21.** As funções $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = \cos x$ são linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$ porque nenhuma das duas é um múltiplo escalar da outra. Confirme a independência linear usando o teste do wronskiano.

**22.** As funções $f_1(x) = \text{sen}\, x$ e $f_2(x) = \cos x$ são linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$ porque nenhuma das duas é um múltiplo escalar da outra. Confirme a independência linear usando o teste do wronskiano.

**23.** (***Requer Cálculo***) Em cada parte, use o wronskiano para mostrar que o conjunto de vetores dado é linearmente independente.

(a) $1, x, e^x$ (b) $1, x, x^2$

**24.** Use o teste do wronskiano para mostrar que as funções $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x$ e $f_3(x) = x^2e^x$ são linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$.

**25.** Use o teste do wronskiano para mostrar que as funções $f_1(x) = \text{sen}\, x, f_2(x) = \cos x$ e $f_3(x) = x\cos x$ são linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$.

**26.** Use a parte (*a*) do Teorema 4.3.1 para provar a parte (*b*).

**27.** Prove a parte (*b*) do Teorema 4.3.2.

**28.** (a) Mostramos no Exemplo 1 que os vetores mutuamente ortogonais **i**, **j** e **k** formam um conjunto linearmente independente de vetores em $R^3$. Será que qualquer conjunto de vetores mutuamente ortogonais em $R^3$ forma um conjunto linearmente independente? Justifique sua conclusão geometricamente.

(b) Justifique sua conclusão algebricamente. [*Sugestão*: use produto escalar.]

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um conjunto que consiste num único vetor é linearmente dependente.

(b) Dado qualquer escalar $k$, o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}, k\mathbf{v}\}$ é linearmente dependente.

(c) Cada conjunto linearmente dependente contém o vetor zero.

(d) Se o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for linearmente independente, então, dado qualquer escalar não nulo $k$, o conjunto $\{k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2, k\mathbf{v}_3\}$ também é linearmente dependente.

(e) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ forem vetores não nulos linearmente dependentes, então pelo menos um vetor $\mathbf{v}_k$ é uma combinação linear única de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.

(f) O conjunto das matrizes $2 \times 2$ que contém exatamente dois 1 e dois 0 é linearmente independente em $M_{22}$.

(g) Os três polinômios $(x-1)(x+2)$, $x(x+2)$, e $x(x-1)$ são linearmente independentes.

(h) As funções $f_1$ e $f_2$ são linearmente dependentes se existirem um número real $x$ e escalares $k_1$ e $k_2$ tais que $k_1f_1(x) + k_2f_2(x) = 0$.

## 4.4 Coordenadas e bases

Costumamos pensar numa reta como sendo unidimensional, num plano, como bidimensional e no espaço à nossa volta, como tridimensional. O objetivo principal desta e da próxima seções é tornar mais precisa essa noção intuitiva de dimensão. Nesta seção, discutimos sistemas de coordenadas em espaços vetoriais arbitrários e preparamos o terreno para uma definição precisa de dimensão na próxima seção.

### *Sistemas de coordenadas na Álgebra Linear*

Na Geometria Analítica, aprendemos a usar sistemas de coordenadas *retangulares* para criar uma correspondência bijetora entre os pontos do espaço bidimensional e os pares ordenados de números reais, bem como entre os pontos do espaço tridimensional e os ternos ordenados de números reais (Figura 4.4.1). Embora os sistemas de coordenadas retangulares sejam comuns, eles não são essenciais. Por exemplo, a Figura 4.4.2 mostra sistemas de coordenadas nos espaços bi e tridimensionais em que os eixos coordenados não são mutuamente perpendiculares.

Na Álgebra Linear, costumamos especificar sistemas de coordenadas usando vetores em vez de eixos coordenados. Por exemplo, na Figura 4.4.3, recriamos os sistemas de coordenadas dados na Figura 4.4.2 usando vetores unitários para identificar os sentidos positivos nos eixos e, então, associando coordenadas a um ponto $P$ usando os coeficientes escalares nas equações

$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$$

Igualando os componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 2$ (verifique). Portanto,

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

***Solução (b)*** Usando a definição de $(\mathbf{v})_S$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7) \end{aligned}$$ ◀

### Revisão de conceitos

- Base
- Bases canônicas de $R^n$, $P_n$, $M_{mn}$
- Dimensão finita
- Dimensão infinita
- Coordenadas
- Vetor de coordenadas

### Aptidões desenvolvidas

- Mostrar que um conjunto de vetores é uma base de um espaço vetorial.
- Encontrar as coordenadas de um vetor em relação a uma base.
- Encontrar o vetor de coordenadas de um vetor em relação a uma base.

## Conjunto de exercícios 4.4

**1.** Em cada parte, explique em palavras por que os vetores dados *não são* uma base do espaço vetorial dado.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2), \mathbf{u}_2 = (0, 3), \mathbf{u}_3 = (2, 7)$ para $R^2$

(b) $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2), \mathbf{u}_2 = (6, 1, 1)$ para $R^3$

(c) $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2, \mathbf{p}_2 = x - 1$ para $P_2$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix},$

$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ para $M_{22}$

**2.** Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de $R^2$?

(a) $\{(2, 1), (3, 0)\}$ (b) $\{(4, 1), (-7, -8)\}$

(c) $\{(0, 0), (1, 3)\}$ (d) $\{(3, 9), (-4, -12)\}$

**3.** Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de $R^3$?

(a) $\{(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)\}$

(b) $\{(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)\}$

(c) $\{(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)\}$

(d) $\{(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)\}$

**4.** Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de $P_2$?

(a) $1 - 3x + 2x^2, 1 + x + 4x^2, 1 - 7x$

(b) $4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2$

(c) $1 + x + x^2, x + x^2, x^2$

(d) $-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2$

**5.** Mostre que as matrizes dadas formam uma base de $M_{22}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**6.** Seja $V$ o espaço gerado por $\mathbf{v}_1 = \cos^2 x$, $\mathbf{v}_2 = \operatorname{sen}^2 x$, $\mathbf{v}_3 = \cos 2x$.

(a) Mostre que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ não é uma base de $V$.

(b) Encontre uma base de $V$.

**7.** Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $R^2$.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1); \mathbf{w} = (3, -7)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4), \mathbf{u}_2 = (3, 8); \mathbf{w} = (1, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1), \mathbf{u}_2 = (0, 2); \mathbf{w} = (a, b)$

**8.** Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $R^2$.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, -1), \mathbf{u}_2 = (1, 1); \mathbf{w} = (1, 0)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, -1), \mathbf{u}_2 = (1, 1); \mathbf{w} = (0, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, -1), \mathbf{u}_2 = (1, 1); \mathbf{w} = (1, 1)$

**9.** Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

(b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

**10.** Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{p}$ em relação à base $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.

(a) $\mathbf{p} = 4 - 3x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1$, $\mathbf{p}_2 = x$, $\mathbf{p}_3 = x^2$

(b) $\mathbf{p} = 2 - x + x^2$; $\mathbf{p}_1 = 1 + x$, $\mathbf{p}_2 = 1 + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x + x^2$

**11.** Encontre o vetor de coordenadas de $A$ em relação à base $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 12–13, mostre que $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é uma base de $M_{22}$ e expresse $A$ como uma combinação linear dos vetores da base.

**12.** $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

**13.** $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 14–15, mostre que $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ é uma base de $P_2$ e expresse $\mathbf{p}$ como uma combinação linear dos vetores da base.

**14.** $\mathbf{p}_1 = 1 + 2x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = 2 + 9x$, $\mathbf{p}_3 = 3 + 3x + 4x^2$; $\mathbf{p} = 2 + 17x - 3x^2$

**15.** $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = x + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x^2$; $\mathbf{p} = 7 - x + 2x^2$

**16.** A figura dada mostra um sistema de coordenadas retangulares $xy$ e um sistema de coordenadas $x'y'$ com eixos oblíquos. Supondo que em todos os eixos foram utilizadas escalas de uma unidade, encontre as coordenadas $x'y'$ dos pontos cujas coordenadas $xy$ estão dadas.

(a) $(1, 1)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) $(a, b)$

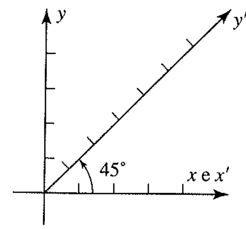



Figura Ex-16

**17.** A figura dada mostra um sistema de coordenadas retangulares $xy$ determinado pelos vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ da base canônica e um sistema de coordenadas $x'y'$ determinado pelos vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ de uma outra base. Encontre as coordenadas $x'y'$ dos pontos cujas coordenadas $xy$ estão dadas.

(a) $(\sqrt{3}, 1)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) $(a, b)$

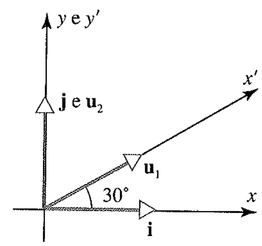



Figura Ex-17

**18.** A base de $M_{22}$ dada no Exemplo 4 consiste em matrizes não invertíveis. Será que existe alguma base de $M_{22}$ consistindo em matrizes invertíveis? Justifique sua resposta.

**19.** Prove que $R^\infty$ tem dimensão infinita.

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $V = \text{ger}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, então $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $V$.

(b) Cada subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial $V$ é uma base de $V$.

(c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base de um espaço vetorial $V$, então cada vetor em $V$ pode ser expresso como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

(d) O vetor de coordenadas de um vetor $\mathbf{x}$ em $R^n$ em relação à base canônica de $R^n$ é $\mathbf{x}$.

(e) Cada base de $P_4$ contém pelo menos um polinômio de grau 3 ou menor.

### Revisão de conceitos

- Dimensão
- Relação entre o conceitos de independência linear, base e dimensão

### Aptidões desenvolvidas

- Encontrar uma base e a dimensão do espaço solução de um sistema linear homogêneo.
- Usar a dimensão para determinar se um conjunto de vetores é uma base de um espaço vetorial de dimensão finita.
- Estender um conjunto linearmente independente a uma base.

## Conjunto de exercícios 4.5

Nos Exercícios 1–6, encontre uma base do espaço solução do sistema linear homogêneo e encontre a dimensão desse espaço.

**1.** $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 \quad + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**2.** $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

**3.** $$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

**4.** $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**5.** $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \quad + 5x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**6.** $$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 6x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

**7.** Encontre bases dos seguintes subespaços de $R^3$.

(a) O plano $3x - 2y + 5z = 0$.

(b) O plano $x - y = 0$.

(c) A reta $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$.

(d) Todos os vetores da forma $(a, b, c)$ com $b = a + c$.

**8.** Encontre as dimensões dos seguintes subespaços de $R^4$.

(a) Todos os vetores da forma $(a, b, c, 0)$.

(b) Todos os vetores da forma $(a, b, c, d)$, em que $d = a + b$ e $c = a - b$.

(c) Todos os vetores da forma $(a, b, c, d)$, em que $a = b = c = d$.

**9.** Encontre a dimensão de cada um dos seguintes espaços vetoriais.

(a) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ diagonais.

(b) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ simétricas.

(c) O espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ triangulares superiores.

**10.** Encontre a dimensão do subespaço de $P_3$ consistindo em todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ com $a_0 = 0$.

**11.** (a) Mostre que o conjunto $W$ de todos os polinômios em $P_2$ tais que $p(1) = 0$ é um subespaço de $P_2$.

(b) Faça uma conjectura sobre a dimensão de $W$.

(c) Confirme sua conjectura encontrando uma base de $W$.

**12.** Em cada caso, encontre um vetor da base canônica de $R^3$ que pode ser acrescentado ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para formar uma base de $R^3$.

(a) $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2, -2)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -2)$

**13.** Encontre vetores da base canônica de $R^4$ que podem ser acrescentados ao conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para formar uma base de $R^4$

$$\mathbf{v}_1 = (1, -4, 2, -3), \mathbf{v}_2 = (-3, 8, -4, 6)$$

**14.** Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base de um espaço vetorial $V$. Mostre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ também é uma base, sendo $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

**15.** Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 5, -3)$ são linearmente independentes. Aumente $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ até uma base de $R^3$.

**16.** Os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3, -5)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 2, -3)$ são linearmente independentes. Aumente $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ até uma base de $R^4$.

**17.** (a) Mostre que, para cada inteiro positivo $n$, podemos encontrar $n + 1$ vetores linearmente independentes em $F(-\infty, \infty)$. [*Sugestão*: procure polinômios.]

(b) Use o resultado da parte (a) para provar que $F(-\infty, \infty)$ tem dimensão infinita.

(c) Prove que $C(-\infty, \infty)$ e $C^m(-\infty, \infty)$ são espaços vetoriais de dimensão infinita.

**18.** Seja $S$ uma base de um espaço vetorial $V$ de dimensão $n$. Mostre que se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ formarem um conjunto linearmente independente de vetores em $V$, então os vetores de coordenadas $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ formam um conjunto linearmente independente em $R^n$ e reciprocamente.

**19.** Usando a notação do Exercício 18, mostre que se os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ gerarem $V$, então os vetores de coordenadas $(\mathbf{v}_1)_S, (\mathbf{v}_2)_S, \ldots, (\mathbf{v}_r)_S$ geram $R_n$ e reciprocamente.

**20.** Em cada caso, encontre uma base do subespaço de $P_2$ gerado pelos vetores dados.

(a) $-1 + x - 2x^2$, $3 + 3x + 6x^2$, $9$

(b) $1 + x, x^2, -2 + 2x^2, -3x$

(c) $1 + x - 3x^2, 2 + 2^x - 6x^2, 3 + 3x - 9x^2$

[*Sugestão*: seja $S$ a base canônica de $P_2$ e trabalhe com os vetores de coordenadas em relação a $S$ como nos Exercícios 18 e 19.]

**21.** Prove: qualquer subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita tem dimensão finita.

**22.** Enuncie as duas partes do Teorema 4.5.2 em forma contrapositiva.

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O espaço vetorial nulo tem dimensão zero.

(b) Existe um conjunto de 17 vetores linearmente independentes em $R^{17}$.

(c) Existe um conjunto de 11 vetores que gera $R^{17}$.

(d) Cada conjunto linearmente independente de cinco vetores em $R^5$ é uma base de $R^5$.

(e) Cada conjunto de cinco vetores que gera $R^5$ é uma base de $R^5$.

(f) Cada conjunto de vetores que gera $R^n$ contém alguma base de $R^n$.

(g) Cada conjunto de vetores linearmente independente em $R^n$ está contido em alguma base de $R^n$.

(h) Existe alguma base de $M_{22}$ consistindo em matrizes invertíveis.

(i) Se $A$ tiver tamanho $n \times n$ e $I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ forem matrizes distintas, então $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ é linearmente independente.

(j) Existem pelo menos dois subespaços tridimensionais distintos de $P^2$.

# 4.6 Mudança de bases

Uma base conveniente para um problema pode não ser conveniente para um outro, de forma que é um procedimento comum no estudo de espaços vetoriais a mudança de uma base para uma outra. Como a base é a generalização de coordenadas para um espaço vetorial, a mudança de bases é relacionada à mudança de eixos coordenados em $R^2$ e $R^3$. Nesta seção, estudamos problemas relativos à mudança de bases.

*Aplicação de coordenadas*

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for uma base de um espaço vetorial $V$ de dimensão finita e se

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

for o vetor de coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação a $S$, então, como observamos na Seção 4.4, a aplicação

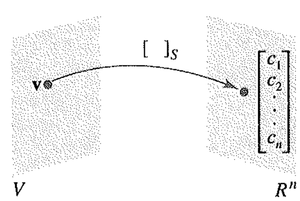
$$\mathbf{v} \to (\mathbf{v})_S \qquad (1)$$

cria uma conexão (uma bijeção) entre os vetores do espaço vetorial *arbitrário* $V$ e os vetores do espaço vetorial *familiar* $R^n$. Dizemos que (1) é a ***aplicação de coordenadas*** de $V$ em $R^n$. Nesta seção, é conveniente expressar os vetores de coordenadas em formato matricial

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

em que os colchetes enfatizam a notação matricial (Figura 4.6.1).

Aplicação de coordenadas




▲ Figura 4.6.1

*Mudança de bases*

Existem muitas aplicações em que é necessário trabalhar com mais de um sistema de coordenadas. Nesses casos, acaba sendo importante saber como se relacionam as coordenadas de um vetor fixado em relação a cada um desses sistemas de coordenadas. Isso nos leva ao problema seguinte.

**Problema da mudança de base** Se $\mathbf{v}$ for um vetor num espaço vetorial $V$ de dimensão finita e se mudarmos a base de $V$ de uma base $B$ para uma base $B'$, qual é a relação entre os vetores de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ e $[\mathbf{v}]_{B'}$?

**TEOREMA 4.6.2** *Sejam $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base qualquer do espaço vetorial $R^n$ e $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a base canônica de $R^n$. Se os vetores dessas bases forem escritos em forma de colunas, então*

$$P_{B' \to S} = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n] \tag{15}$$

Segue desse teorema que se

$$A = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{u}_n]$$

é uma matriz $n \times n$ invertível *qualquer*, então $A$ pode ser vista como a matriz de transição da base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $R^n$ para a base canônica de $R^n$. Assim, por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

cuja invertibilidade foi mostrada no Exemplo 4 da Seção 1.5, é a matriz de transição da base

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (2, 5, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (3, 3, 8)$$

para a base

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

### Revisão de conceitos

- Aplicação de coordenadas
- Problema da mudança de base
- Matriz de transição

### Aptidões desenvolvidas

- Encontrar diretamente os vetores de coordenadas em relação a uma base dada.
- Encontrar a matriz de transição de uma base para outra.
- Usar a matriz de transição para calcular vetores de coordenadas.

## Conjunto de exercícios 4.6

**1.** Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $R^2$.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1); \mathbf{w} = (3, -7)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4), \mathbf{u}_2 = (3, 8); \mathbf{w} = (1, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1), \mathbf{u}_2 = (0, 2); \mathbf{w} = (a, b)$

**2.** Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $R^3$.

(a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3); \mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (2, 2, 0), \mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

(b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3); \mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6), \mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$

**3.** Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{p}$ em relação à base $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ de $P_2$.

(a) $\mathbf{p} = 4 - 3x + x^2; \mathbf{p}_1 = 1, \mathbf{p}_2 = x, \mathbf{p}_3 = x^2$

(b) $\mathbf{p} = 2 - x + x^2; \mathbf{p}_1 = 1 + x, \mathbf{p}_2 = 1 + x^2, \mathbf{p}_3 = x + x^2$

**4.** Encontre o vetor de coordenadas de $A$ em relação à base $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de $M_{22}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**5.** Considere os vetores de coordenadas

$$[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{q}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [B]_S = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre $\mathbf{w}$ se $S$ for a base no Exercício 2(a).

(b) Encontre $\mathbf{q}$ se $S$ for a base no Exercício 3(a).

(c) Encontre $B$ se $S$ for a base no Exercício 4.

**6.** Considere as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\}$ de $R^2$, em que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre a matriz de transição de $B'$ para $B$.

(b) Encontre a matriz de transição de $B$ para $B'$.

(c) Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{w}]_B$, em que

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e use (10) para calcular $[\mathbf{w}]_{B'}$.

(d) Confira seu trabalho calculando $[\mathbf{w}]_{B'}$ diretamente.

**7.** Repita as orientações do Exercício 6 com o mesmo vetor $\mathbf{w}$, mas com

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**8.** Considere as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $B' = \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \mathbf{u}_3'\}$ de $R^3$, em que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3' = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre a matriz de transição de $B$ para $B'$.

(b) Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{w}]_B$, em que

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e use (12) para calcular $[\mathbf{w}]_{B'}$.

(c) Confira seu trabalho calculando $[\mathbf{w}]_{B'}$ diretamente.

**9.** Repita as orientações do Exercício 8 com o mesmo vetor $\mathbf{w}$, mas com

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**10.** Considere as bases $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ de $P_1$, em que

$$\mathbf{p}_1 = 6 + 3x, \quad \mathbf{p}_2 = 10 + 2x, \quad \mathbf{q}_1 = 2, \quad \mathbf{q}_2 = 3 + 2x$$

(a) Encontre a matriz de transição de $B'$ para $B$.

(b) Encontre a matriz de transição de $B$ para $B'$.

(c) Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{p}]_B$, em que $\mathbf{p} = -4 + x$, e use (12) para calcular $[\mathbf{p}]_{B'}$.

(d) Confira seu trabalho calculando $[\mathbf{p}]_{B'}$ diretamente.

**11.** Seja $V$ o espaço gerado por $\mathbf{f}_1 = \operatorname{sen} x$ e $\mathbf{f}_2 = \cos x$.

(a) Mostre que $\mathbf{g}_1 = 2 \operatorname{sen} x + \cos x$ e $\mathbf{g}_2 = 3 \cos x$ formam uma base de $V$.

(b) Encontre a matriz de transição de $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ para $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

(c) Encontre a matriz de transição de $B$ para $B'$.

(d) Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{h}]_B$, em que $\mathbf{h} = 2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$, e use (12) para calcular $[\mathbf{h}]_{B'}$.

(e) Confira seu trabalho calculando $[\mathbf{h}]_{B'}$ diretamente.

**12.** Sejam $S$ a base canônica de $R^2$ e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ a base dada por $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-3, 4)$.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B\to S}$ por inspeção.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{S\to S}$.

(c) Confirme que $P_{B\to S}$ e $P_{S\to B}$ são inversas uma da outra.

(d) Seja $\mathbf{w} = (5, -3)$. Encontre $[\mathbf{w}]_B$ e então use a Fórmula (11) para calcular $[\mathbf{w}]_S$.

(e) Seja $\mathbf{w} = (3, -5)$. Encontre $[\mathbf{w}]_S$ e então use a Fórmula (12) para calcular $[\mathbf{w}]_B$.

**13.** Sejam $S$ a base canônica de $R^3$ e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a base dada por $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 5, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 8)$.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B\to S}$ por inspeção.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{S\to B}$.

(c) Confirme que $P_{B\to S}$ e $P_{S\to B}$ são inversas uma da outra.

(d) Seja $\mathbf{w} = (5, -3, 1)$. Encontre $[\mathbf{w}]_B$ e então use a Fórmula (11) para calcular $[\mathbf{w}]_S$.

(e) Seja $\mathbf{w} = (3, -5, 0)$. Encontre $[\mathbf{w}]_S$ e então use a Fórmula (12) para calcular $[\mathbf{w}]_B$.

**14.** Sejam $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ as bases de $R^2$ dadas por $\mathbf{u}_1 = (2, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (4, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, -1)$.

(a) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{B_2\to B_1}$.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{B_1\to B_2}$.

(c) Confirme que $P_{B_2\to B_1}$ e $P_{B_1\to B_2}$ são inversas uma da outra.

(d) Seja $\mathbf{w} = (5, -3)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_1}$ e use a matriz $P_{B_1\to B_2}$ para calcular $[\mathbf{w}]_{B_2}$ a partir de $[\mathbf{w}]_{B_1}$.

(e) Seja $\mathbf{w} = (3, -5)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_2}$ e use a matriz $P_{B_2\to B_1}$ para calcular $[\mathbf{w}]_{B_2}$ a partir de $[\mathbf{w}]_{B_1}$.

**15.** Sejam $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ as bases de $R^2$ dadas por $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 4)$

(a) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{B_2\to B_1}$.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição $P_{B_1 \to B_2}$.

(c) Confirme que $P_{B_2 \to B_1}$ e $P_{B_1 \to B_2}$ são inversas uma da outra.

(d) Seja $\mathbf{w} = (0, 1)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_1}$ e use a matriz $P_{B_1 \to B_2}$ para calcular $[\mathbf{w}]_{B_2}$ a partir de $[\mathbf{w}]_{B_1}$.

(e) Seja $\mathbf{w} = (2, 5)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_2}$ e use a matriz $P_{B_2 \to B_1}$ para calcular $[\mathbf{w}]_{B_1}$ a partir de $[\mathbf{w}]_{B_2}$.

**16.** Sejam $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ as bases de $R^3$ dadas por $\mathbf{u}_1 = (-3, 0, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (-3, 2, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 6, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (-6, -6, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, -6, 4)$ e $\mathbf{v}_3 = (-2, -3, 7)$.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B_1 \to B_2}$.

(b) Seja $\mathbf{w} = (-5, 8, -5)$. Encontre $[\mathbf{w}]_{B_1}$ e então use a matriz de transição obtida na parte (a) para calcular $[\mathbf{w}]_{B_2}$ por multiplicação matricial.

(c) Confira seu resultado na parte (b) calculando $[\mathbf{w}]_{B_2}$ diretamente.

**17.** Repita as orientações do Exercício 16 com o mesmo vetor $\mathbf{w}$, mas com $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_1 = (3, 1, -5)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -3)$ e $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2)$.

**18.** Sejam $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base canônica de $R^2$ e a base que resulta quando os vetores de $S$ são refletidos em torno da reta $y = x$.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B \to S}$.

(b) Seja $P = P_{B \to S}$ e mostre que $P^T = P_{S \to B}$.

**19.** Sejam $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base canônica de $R^2$ e a base que resulta quando os vetores de $S$ são refletidos em torno da reta que faz um ângulo $\theta$ com o eixo $x$ positivo.

(a) Encontre a matriz de transição $P_{B \to S}$.

(b) Seja $P = P_{B \to S}$ e mostre que $P^T = P_{S \to B}$.

**20.** Se $B_1$, $B_2$ e $B_3$ forem bases de $R^2$ e se

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_{B_2 \to B_3} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

então $P_{B_3 \to B_1} =$ ____________.

**21.** Se $P$ for a matriz de transição de uma base $B'$ para uma base $B$ e $Q$ a matriz de transição de $B$ para uma base $C$, qual é a matriz de transição de $B'$ para $C$? Qual é a matriz de transição de $C$ para $B'$?

**22.** Para escrever o vetor de coordenadas de um vetor, é necessário especificar um ordenamento dos vetores das bases. Se $P$ for a matriz de transição de uma base $B'$ para uma base $B$, qual é o efeito sobre $P$ de uma inversão da ordem dos vetores de $B$ de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ para $\mathbf{v}_n, \ldots, \mathbf{v}_1$? Qual é o efeito sobre $P$ se invertermos a ordem dos vetores de $B'$ e de $B$?

**23.** Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $P$ é a matriz de transição de qual base $B$ para a base canônica $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $R^3$?

(b) $P$ é a matriz de transição da base canônica $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ para qual base $B$ de $R^3$?

**24.** A matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de transição de qual base $B$ para a base $R^3$ de $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$?

**25.** Seja $B$ uma base de $R^n$. Prove que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ formam um conjunto linearmente independente de $R^n$ se, e só se, os vetores $[\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \ldots, [\mathbf{v}_k]_B$ formam um conjunto linearmente independente de $R^n$.

**26.** Seja $B$ uma base de $R^n$. Prove que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ geram $R^n$ se, e só se, os vetores $[\mathbf{v}_1]_B, [\mathbf{v}_2]_B, \ldots, [\mathbf{v}_k]_B$ geram $R^n$.

**27.** Se valer $[\mathbf{w}]_B = \mathbf{w}$ com qualquer vetor $\mathbf{w}$ de $R^n$, o que pode ser dito sobre a base $B$?

## Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $B_1$ e $B_2$ forem bases de um espaço vetorial $V$, então existe uma matriz de transição de $B_1$ para $B_2$.

(b) Matrizes de transição são invertíveis.

(c) Se $B$ for uma base do espaço vetorial $R^n$, então $P_{B \to B}$ é a matriz identidade.

(d) Se $P_{B_1 \to B_2}$ for uma matriz diagonal, então cada vetor em $B_2$ é um múltiplo escalar de algum vetor em $B_1$.

(e) Se cada vetor em $B_2$ for um múltiplo escalar de algum vetor em $B_1$, então $P_{B_1 \to B_2}$ é uma matriz diagonal.

(f) Se $A$ for uma matriz quadrada, então $A = P_{B_1 \to B_2}$, usando certas bases $B_1$ e $B_2$ de $R^n$.

***Passo 5.*** Obtemos um conjunto de equações de dependência expressando cada vetor coluna de $R$ que não tem pivô como uma combinação linear de vetores coluna precedentes que contenham pivôs.

***Passo 6.*** Substituímos os vetores coluna de $R$ que aparecem nas equações de dependência pelos vetores coluna de $A$ correspondentes.

Isso completa a segunda parte do problema.

### Revisão de conceitos

- Vetores linha
- Vetores coluna
- Espaço linha
- Espaço coluna
- Espaço nulo
- Solução geral
- Solução particular
- Relações entre sistemas lineares e espaços linha, coluna e nulos
- Relações entre os espaços linha, coluna e nulo de uma matriz
- Equações de dependência

### Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um dado vetor está no espaço coluna de uma matriz.
- Encontrar uma base do espaço nulo de uma matriz.
- Encontrar uma base do espaço linha de uma matriz.
- Encontrar uma base do espaço coluna de uma matriz.
- Encontrar uma base do espaço gerado por um conjunto de vetores em $R^n$.

## Conjunto de exercícios 4.7

**1.** Identifique os vetores linha e os vetores coluna da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

**2.** Em cada parte, expresse o produto $A\mathbf{x}$ como uma combinação linear dos vetores coluna de $A$.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

**3.** Em cada parte, determine se $\mathbf{b}$ está no espaço coluna de $A$ e, se estiver, expresse $\mathbf{b}$ como combinação linear dos vetores coluna de $A$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

**4.** Suponha que $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = -3$ seja uma solução de um sistema linear não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e que o conjunto solução do sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja dado pelas fórmulas

$$x_1 = -3r + 4s, \quad x_2 = r - s, \quad x_3 = r, \quad x_4 = s$$

(a) Encontre a forma vetorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Encontre a forma vetorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

**5.** Em cada parte, encontre a forma vetorial da solução geral do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado e depois use o resultado obtido para encontrar a forma vetorial da solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 6x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 \phantom{+ x_2} + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= -3 \end{aligned}$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 7x_2 \qquad - 5x_4 &= -5 \end{aligned}$$

**6.** Em cada parte, encontre uma base do espaço nulo de $A$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

**7.** Em cada parte é dada uma matriz em forma escalonada por linhas. Por inspeção, encontre bases dos espaço linha e coluna de $A$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**8.** Para as matrizes do Exercício 6, encontre uma base do espaço linha de $A$ reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

**9.** Em cada parte, encontre uma base do espaço linha e uma base do espaço coluna da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**10.** Para as matrizes do Exercício 6, encontre uma base do espaço linha de $A$ consistindo totalmente em vetores linha de $A$.

**11.** Em cada parte, encontre uma base do subespaço de $R^4$ gerado pelos vetores dados.

(a) $(1, 1, -4, -3), (2, 0, 2, -2), (2, -1, 3, 2)$

(b) $(-1, 1, -2, 0), (3, 3, 6, 0), (9, 0, 0, 3)$

(c) $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-2, 0, 2, 2), (0, -3, 0, 3)$

**12.** Encontre um subconjunto dos vetores dados que forma uma base do espaço gerado pelos vetores; em seguida, expresse cada vetor que não está na base como uma combinação linear dos vetores da base.

(a) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, 3, 7, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 3, 9, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (-5, 3, 5, -1)$

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 0, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, -1, 2, 3)$

(c) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 5, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -5, 9, 4)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 4, 2, -3)$, $\mathbf{v}_5 = (-7, 18, 2, -8)$

**13.** Prove que os vetores linha de uma matriz invertível $A$ de tamanho $n \times n$ formam uma base de $R^n$.

**14.** Construa uma matriz cujo espaço nulo consista em todas as combinações lineares dos vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**15.** (a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que, em relação a um sistema de coordenadas retangulares $xyz$ no espaço tridimensional, o espaço nulo de $A$ consiste em todos os pontos no eixo $z$, e que o espaço coluna consiste em todos os pontos no plano $xy$ (ver figura).

(b) Encontre uma matriz $3 \times 3$ cujo espaço nulo seja o eixo $x$ e cujo espaço coluna seja o plano $yz$.

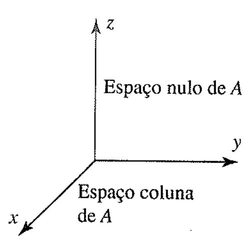



Figura Ex-15

**16.** Encontre uma matriz $3 \times 3$ cujo espaço nulo seja

(a) um ponto. (b) uma reta. (c) um plano.

**17.** (a) Encontre todas as matrizes $2 \times 2$ cujo espaço nulo seja a reta $3x - 5y = 0$.

**(b)** Esboce o espaço nulo das matrizes dadas.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

**18.** A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ pode ser vista como um sistema linear de uma equação em três incógnitas. Expresse a solução geral como uma solução particular mais uma solução geral do sistema homogêneo correspondente. [*Sugestão*: escreva os vetores na forma de colunas.]

**19.** Suponha que $A$ e $B$ sejam matrizes $n \times n$ e que $A$ seja invertível. Invente e prove um teorema que descreve como estão relacionados os espaços linha de $AB$ e de $B$.

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O gerado de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ é o espaço coluna da matriz cujos vetores coluna são $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

(b) O espaço coluna de uma matriz $A$ é o conjunto de soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Se $R$ for a forma escalonada reduzida de $A$, então aqueles vetores coluna de $R$ que contêm pivôs formam uma base do espaço coluna de $A$.

(d) O conjunto de vetores linha não nulos de uma matriz $A$ é uma base do espaço linha de $A$.

(e) Se $A$ e $B$ forem matrizes $n \times n$ que têm o mesmo espaço linha, então $A$ e $B$ têm o mesmo espaço coluna.

(f) Se $E$ for uma matriz elementar $m \times m$ e $A$ uma matriz $m \times n$, então o espaço nulo de $EA$ é igual ao espaço nulo de $A$.

(g) Se $E$ for uma matriz elementar $m \times m$ e $A$ uma matriz $m \times n$, então o espaço linha de $EA$ é igual ao espaço linha de $A$.

(h) Se $E$ for uma matriz elementar $m \times m$ e $A$ uma matriz $m \times n$, então o espaço coluna de $EA$ é igual ao espaço coluna de $A$.

(i) O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é inconsistente se, e só se, $\mathbf{b}$ não está no espaço coluna de $A$.

(j) Existem uma matriz invertível $A$ e uma matriz singular $B$ tais que os espaços linha de $A$ e $B$ são iguais.

## 4.8 Posto, nulidade e os espaços matriciais fundamentais

Na seção anterior, investigamos as relações entre um sistema de equações lineares e os espaços linha, coluna e nulo de sua matriz de coeficientes. Nesta seção, tratamos das dimensões desses espaços. Os resultados que obteremos nos fornecerão uma visão aprofundada das relações entre um sistema linear e sua matriz de coeficientes.

*Os espaços linha e coluna dimensões iguais*

Nos Exemplos 6 e 7 da Seção 4.7, vimos que ambos os espaços linha e coluna da matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4\\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2\\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7\\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4\end{bmatrix}$$

têm três vetores de base e, portanto, ambos são tridimensionais. O fato de esses espaços terem a mesma dimensão não é acidental, mas sim uma consequência do teorema seguinte.

**TEOREMA 4.8.1** *Os espaços linha e coluna de uma matriz têm a mesma dimensão.*

***Prova*** Seja $R$ uma forma escalonada de uma matriz $A$. Segue dos Teoremas 4.7.4 e 4.7.6*b* que

$$\begin{aligned}\dim(\text{espaço linha de } A) &= \dim(\text{espaço linha de } R)\\ \dim(\text{espaço coluna de } A) &= \dim(\text{espaço coluna de } R)\end{aligned}$$

## Conjunto de exercícios 4.8

1. Verifique que pos($A$) = pos($A^T$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Em cada parte, encontre o posto e a nulidade da matriz; em seguida, verifique que os valores obtidos satisfazem a Fórmula (4) no teorema da dimensão.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte do Exercício 2, use os resultados obtidos para encontrar, sem resolver o sistema, o número de variáveis líderes e o número de parâmetros na solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

4. Em cada parte, use a informação na tabela para encontrar as dimensões do espaço linha de $A$, do espaço coluna de $A$, do espaço nulo de $A$ e do espaço nulo de $A^T$.

| | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) | (g) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tamanho de $A$ | $3 \times 3$ | $3 \times 3$ | $3 \times 3$ | $5 \times 9$ | $9 \times 5$ | $4 \times 4$ | $6 \times 2$ |
| Posto de $A$ | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 |

5. Em cada parte, encontre o maior valor possível para o posto de $A$ e o menor valor possível para a nulidade de $A$.

(a) $A$ é $4 \times 4$ (b) $A$ é $3 \times 5$ (c) $A$ é $5 \times 3$

6. Se $A$ for uma matriz $m \times n$, qual é o maior valor possível para seu posto e o menor valor possível para sua nulidade?

7. Em cada parte, use a informação na tabela para determinar se o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente. Se for, dê o número de parâmetros em sua solução geral.

| | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) | (g) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tamanho de $A$ | $3 \times 3$ | $3 \times 3$ | $3 \times 3$ | $5 \times 9$ | $5 \times 9$ | $4 \times 4$ | $6 \times 2$ |
| Posto de($A$) | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| Posto de[$A$ \| $\mathbf{b}$] | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 0 | 2 |

8. Para cada uma das matrizes do Exercício 7, encontre a nulidade de $A$ e determine o número de parâmetros na solução geral do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

9. Quais condições devem ser satisfeitas por $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ e $b_5$ e para que o sistema linear sobredeterminado

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= b_1 \\ x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \\ x_1 - 4x_2 &= b_4 \\ x_1 + 5x_2 &= b_5 \end{aligned}$$

seja consistente?

10. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Mostre que $A$ tem posto 2 se, e só se, um ou mais dos determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

é não nulo.

11. Suponha que $A$ seja uma matriz $3 \times 3$ cujo espaço nulo é uma reta pela origem no espaço tridimensional. O espaço linha ou o espaço coluna também podem ser uma reta pela origem? Explique.

12. Em cada parte, discuta como o posto de $A$ varia com $t$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{bmatrix}$

13. Existem valores de $r$ e $s$ com os quais o posto de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

é um ou dois? Se existirem, encontre esses valores.

14. Use o resultado no Exercício 10 para mostrar que o conjunto de pontos $(x, y, z)$ em $R^3$ com os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & y \end{bmatrix}$$

tem posto 1 é a curva de equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

15. Prove: se $k \neq 0$, então $A$ e $kA$ têm o mesmo posto.

16. (a) Dê um exemplo de uma matriz $3 \times 3$ cujo espaço coluna seja um plano pela origem no espaço tridimensional.

(b) Que espécie de objeto geométrico é o espaço nulo da matriz encontrada no item (a)?

(c) Que espécie de objeto geométrico é o espaço linha da matriz encontrada no item (a)?

**17.** (a) Se $A$ for uma matriz $3 \times 5$, então o número de pivôs na forma escalonada reduzida por linhas de $A$ é, no máximo, _____. Por quê?

(b) Se $A$ for uma matriz $3 \times 5$, então o número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é, no máximo, _____. Por quê?

(c) Se $A$ for uma matriz $3 \times 5$, então o número de pivôs na forma escalonada reduzida por linhas de $A$ é, no máximo, _____. Por quê?

(d) Se $A$ for uma matriz $5 \times 3$, então o número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é, no máximo, _____. Por quê?

**18.** (a) Se $A$ for uma matriz $3 \times 5$, então o posto de $A$ é, no máximo, _____. Por quê?

(b) Se $A$ for uma matriz $3 \times 5$, então a nulidade de $A$ é, no máximo, _____. Por quê?

(c) Se $A$ for uma matriz $3 \times 5$, então o posto de $A^T$ é, no máximo, _____. Por quê?

(d) Se $A$ for uma matriz $3 \times 5$, então a nulidade de $A^T$ é, no máximo, _____. Por quê?

**19.** Encontre matrizes $A$ e $B$ tais que $\text{pos}(A) = \text{pos}(B)$, mas $\text{pos}(A^2) \neq \text{pos}(B^2)$.

**20.** Prove: se uma matriz $A$ não for quadrada, então ou os vetores linha ou os vetores coluna de $A$ são linearmente dependentes.

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Ou os vetores linha ou os vetores coluna de uma matriz quadrada são linearmente independentes.

(b) Uma matriz com os vetores linha linearmente independentes e os vetores coluna linearmente independentes é quadrada.

(c) A nulidade de uma matriz não nula $m \times n$ é, no máximo, $m$.

(d) Adicionar uma coluna a mais a uma matriz aumenta seu posto por um.

(e) A nulidade de uma matriz quadrada com linhas linearmente independentes é, no mínimo, um.

(f) Se $A$ for uma matriz quadrada e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for inconsistente com algum vetor $\mathbf{b}$, então a nulidade de $A$ é zero.

(g) Se uma matriz $A$ tiver mais linhas do que colunas, então a dimensão do espaço linha é maior do que a dimensão do espaço coluna.

(h) Se $\text{pos}(A^T) = \text{pos}(A)$, então $A$ é quadrada.

(i) Não existe matriz $3 \times 3$ alguma cujos espaços linha e nulo são retas no espaço tridimensional.

(j) Se $V$ for um subespaço de $R^n$ e $W$ for um subespaço de $V$, então $W^\perp$ é um subespaço de $V^\perp$.

# 4.9 Transformações matriciais de $R^n$ em $R^m$

Nesta seção, estudamos funções da forma $\mathbf{w} = F(\mathbf{x})$, em que a variável independente $\mathbf{x}$ é um vetor em $R^n$, e a variável dependente $\mathbf{w}$ é um vetor em $R^m$. Vamos nos concentrar numa classe especial dessas funções, denominada "transformações matriciais". Essas transformações são fundamentais no estudo da Álgebra Linear e têm aplicações importantes na Física, nas Engenharias, nas Ciências Sociais e em várias áreas da Matemática.

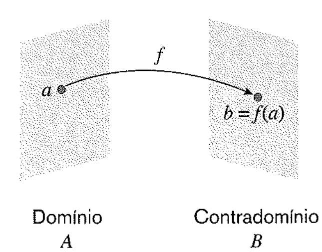
*Funções e transformações*

Lembre que uma ***função*** é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto $A$ um, e exatamente um, elemento de um conjunto $B$. Se $f$ associa o elemento $b$ ao elemento $a$, então escrevemos

$$b = f(a)$$

e dizemos que $b$ é a ***imagem*** de $a$ por $f$ ou que $f(a)$ é o ***valor*** de $f$ em $a$. O conjunto $A$ é denominado ***domínio*** de $f$ e o conjunto $B$, ***contradomínio*** de $f$ (Figura 4.9.1). A ***imagem*** de $f$ é o subconjunto do contradomínio consistindo em todas as imagens de pontos no domínio.

O domínio e o contradomínio de muitas funções comuns são conjuntos de números reais, mas, neste texto, estamos interessados em funções cujo domínio e contradomínio são espaços vetoriais.




▲ **Figura 4.9.1**

### ▶ EXEMPLO 7 Reflexão numa reta pela origem

Encontre a reflexão do vetor $\mathbf{x} = (1, 5)$ na reta pela origem que faz um ângulo de $\pi/6$ (= 30°) com o eixo $x$ positivo.

***Solução*** Como $\text{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$, segue de (18) que a matriz canônica deixae como está reflexão é

$$H_{\pi/6} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \text{sen}(\pi/3) \\ \text{sen}(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$H_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-5}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4{,}83 \\ -1{,}63 \end{bmatrix}$$

ou, em notação com vírgulas, $H_{\pi/6}(1, 5) \approx (4{,}83; -1{,}63)$. ◀

Observe que as matrizes canônicas nas Tabelas 1 e 3 são casos especiais de (18) e (16).

### Revisão de conceitos

- Função
- Imagem
- Valor
- Domínio
- Contradomínio
- Transformação
- Operador
- Transformação matricial
- Operador matricial
- Matriz canônica
- Propriedades de transformações matriciais
- Transformação nula
- Operador identidade
- Reflexão
- Projeção
- Rotação
- Matriz de rotação
- Equações de rotação
- Eixo de rotação no espaço
- Ângulo de rotação no espaço
- Expansão
- Compressão
- Cisalhamento
- Dilatação
- Contração

### Aptidões desenvolvidas

- Encontrar o domínio e o contradomínio de uma transformação e determinar se a transformação é linear.
- Encontrar a matriz canônica de uma transformação matricial.
- Descrever o efeito de um operador matricial na base canônica de $R^n$.

## Conjunto de exercícios 4.9

▶ Nos Exercícios 1–2, em cada parte, encontre o domínio e o contradomínio da transformação $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. ◀

**1.** (a) $A$ tem tamanho $3 \times 2$. (b) $A$ tem tamanho $2 \times 3$.
(c) $A$ tem tamanho $3 \times 3$. (d) $A$ tem tamanho $1 \times 6$.

**2.** (a) $A$ tem tamanho $4 \times 5$. (b) $A$ tem tamanho $5 \times 4$.
(c) $A$ tem tamanho $4 \times 4$. (d) $A$ tem tamanho $3 \times 1$.

**3.** Se $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_2, 3x_1)$, então o domínio de $T$ é ______, o contradomínio de $T$ é ______ e a imagem de $\mathbf{x} = (1, -2)$ por $T$ é ______________.

**4.** Se $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2)$, então o domínio de $T$ é ______, o contradomínio de $T$ é ______ e a imagem de $x = (0, -1, 4)$ por $T$ é ________________.

**5.** Em cada parte, encontre o domínio e o contradomínio da transformação definida pelas equações e determine se a transformação é linear.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= 5x_1 - 8x_2 + x_3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1x_2 - x_2 \\ w_2 &= x_1 + 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= 5x_1 - x_2 + x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + 7x_3 \\ w_3 &= 2x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ w_2 &= 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4 \end{aligned}$

**6.** Em cada parte, determine se $T$ é uma transformação matricial.

(a) $T(x, y) = (2x, y)$ (b) $T(x, y) = (-y, x)$

(c) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

(d) $T(x, y) = (x^2, y)$ (e) $T(x, y) = (x, y + 1)$

**7.** Em cada parte, determine se $T$ é uma transformação matricial.

(a) $T(x, y, z) = (0, 0)$ (b) $T(x, y, z) = (1, 1)$

(c) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$

(d) $T(x, y, z) = (y^2, z)$ (e) $T(x, y, z) = (y - 1, x)$

**8.** Em cada parte, encontre a matriz canônica da transformação definida pelas equações.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_4 \\ w_2 &= 3x_1 + 5x_2 - x_4 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} w_1 &= 7x_1 + 2x_2 - 8x_3 \\ w_2 &= \quad\;\; - \;\; x_2 + 5x_3 \\ w_3 &= 4x_1 + 7x_2 - \;\; x_3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + \;\; x_2 \\ w_2 &= \;\; 3x_1 - 2x_2 \\ w_2 &= \;\; 5x_1 - 7x_2 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 \\ w_2 &= x_1 + x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ w_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$

**9.** Encontre a matriz canônica do operador $T : R^3 \to R^3$ definido por

$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ w_2 &= 4x_1 - \;\; x_2 + x_3 \\ w_3 &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

e depois calcule $T(-1, 2, 4)$ por substituição direta nas equações e também por multiplicação matricial.

**10.** Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador $T$ definido pela fórmula.

(a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

(b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$

(d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

**11.** Em cada parte, encontre a matriz canônica da transformação $T$ definida pela fórmula.

(a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$

(d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

**12.** Em cada parte, encontre $T(x)$ e expresse a resposta em forma matricial.

(a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(b) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $[T] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(d) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

**13.** Em cada parte, use a matriz canônica de $T$ para encontrar $T(\mathbf{x})$ e depois confira o resultado calculando $T(\mathbf{x})$ diretamente.

(a) $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$; $\mathbf{x} = (-1, 4)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0)$; $\mathbf{x} = (2, 1, -3)$

**14.** Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de $(-1, 2)$

(a) no eixo $x$

(b) no eixo $y$

(c) na reta $y = x$

**15.** Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de $(2, -5, 3)$ no

(a) plano $xy$

(b) plano $xz$

(c) plano $yz$

**16.** Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de $(2, -5)$ sobre o

(a) eixo $x$

(b) eixo $y$

**17.** Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre o

(a) plano $xy$

(b) plano $xz$

(c) plano $yz$

**18.** Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(3, -4)$ se for girado por um ângulo de

(a) $\theta = 30°$. (b) $\theta = -60°$.

(c) $\theta = 45°$. (d) $\theta = 90°$.

**19.** Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(-2, 1, 2)$ se for girado por

(a) 30° em torno do eixo $x$

(b) 45° em torno do eixo $y$

(c) 90° em torno do eixo $z$

**20.** Encontre a matriz canônica do operador que efetua a rotação de um vetor em $R^3$ por um ângulo de $-60°$ em torno do

(a) eixo $x$

(b) eixo $y$

(c) eixo $z$

**21.** Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(-2, 1, 2)$ se for girado por

(a) $-30°$ em torno do eixo $x$

(b) $-45°$ em torno do eixo $y$

(c) $-90°$ em torno do eixo $z$

**22.** Definimos as ***projeções ortogonais*** de $R^3$ sobre os eixos $x$, $y$ e $z$, respectivamente, por

$$T_1(x, y, z) = (x, 0, 0), \quad T_2(x, y, z) = (0, y, 0), \quad T_3(x, y, z) = (0, 0, z)$$

(a) Mostre que as projeções ortogonais sobre os eixos coordenados são operadores matriciais e encontre suas matrizes canônicas.

(b) Mostre que se $T: R^3 \rightarrow R^3$ for uma projeção ortogonal sobre um dos eixos coordenados, então, dado qualquer vetor em $R^3$, os vetores $T(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ são ortogonais.

(c) Faça um esboço indicando $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ no caso em que $T$ é a projeção ortogonal sobre o eixo $x$.

**23.** A partir da Fórmula (15), obtenha as matrizes canônicas das rotações em torno dos eixos $x$, $y$ e $z$ de $R^3$.

**24.** Use a Fórmula (15) para encontrar a matriz canônica de uma rotação de $\pi/2$ radianos em torno do eixo determinado pelo vetor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. [*Observação*: a Fórmula (15) exige que o vetor que define o eixo de rotação tenha comprimento 1.]

**25.** Use a Fórmula (15) para encontrar a matriz canônica de uma rotação de 180° em torno do eixo determinado pelo vetor $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$. [*Observação*: a Fórmula (15) exige que o vetor que define o eixo de rotação tenha comprimento 1.]

**26.** Pode ser provado que se $A$ for uma matriz $2 \times 2$ de vetores coluna ortonormais e com $\det(A) = 1$, então a multiplicação por $A$ é uma rotação por algum ângulo $\theta$. Verifique que

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

satisfaz as condições enunciadas, e encontre o ângulo de rotação.

**27.** O resultado enunciado no Exercício 26 pode ser estendido ao $R^3$, isto é, pode ser provado que se $A$ for uma matriz $3 \times 3$ de vetores coluna ortonormais e se $\det(A) = 1$, então a multiplicação por $A$ é uma rotação em torno de algum eixo por algum ângulo $\theta$. Use a Fórmula (15) para mostrar que esse ângulo de rotação satisfaz a equação

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}(A) - 1}{2}$$

**28.** Seja $A$ uma matriz $3 \times 3$ (diferente da matriz identidade) que satisfaça as condições enunciadas no Exercício 27. Pode ser mostrado que se $\mathbf{x}$ for um vetor não nulo qualquer em $R^3$, então o vetor $\mathbf{u} = A\mathbf{x} + A^T\mathbf{x} + [1 - \operatorname{tr}(A)]\mathbf{x}$ determina um eixo de rotação quando $\mathbf{u}$ for posicionado com seu ponto inicial na origem. [Ver o artigo *The Axis of Rotation: Analysis, Algebra, Geometry*, por Dan Kalman, em *Mathematics Magazine*, Vol. 62, Nº 4, outubro de 1989.]

(a) Mostre que a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

é uma rotação.

(b) Encontre um vetor de comprimento 1 que define um eixo da rotação.

(c) Encontre todas as soluções da equação do Exercício 27 que pertençam ao intervalo $[0, 2\pi]$ e, substituindo essas soluções na fórmula (15), encontre um ângulo de rotação em torno do eixo da parte (b) que resulta da multiplicação pela matriz $A$ da parte (a).

**29.** Em cada caso, descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz $A$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

**30.** Em cada caso, descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz $A$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

**31.** Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

**32.** Se a multiplicação por $A$ gira um vetor $\mathbf{x}$ do plano $xy$ por um ângulo $\theta$, qual é o efeito de multiplicar $\mathbf{x}$ por $A^T$? Explique seu raciocínio.

**33.** Seja $\mathbf{x}_0$ um vetor coluna não nulo em $R^2$ e suponha que $T: R^2 \rightarrow R^2$ seja a transformação definida pela fórmula $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + R_\theta\mathbf{x}$, em que $R_\theta$ é a matriz canônica da rotação de $R^2$ em torno da origem pelo ângulo $\theta$. Dê uma descrição geométrica dessa transformação. Será uma transformação matricial? Explique.

**34.** É costume dizer que uma função da forma $f(x) = mx + b$ é uma "função linear" porque o gráfico de $y = mx + b$ é uma reta. $f$ será uma transformação matricial em $R$?

**35.** Sejam $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ uma reta em $R^n$ e $T: R^n \rightarrow R^n$ um operador matricial de $R^n$. Que tipo de objeto geométrico é a imagem dessa reta pelo operador $T$? Explique seu raciocínio.

## Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $A$ for uma matriz $2 \times 3$, então o domínio da transformação $T_A$ é $R^2$.

(b) Se $A$ for uma matriz $m \times n$, então o contradomínio da transformação $T_A$ é $R^n$.

(c) Se $T: R^n \rightarrow R^m$ e $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então $T$ é uma transformação matricial.

(d) Se $T: R^n \rightarrow R^m$ e $T(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1T(\mathbf{x}) + c_2T(\mathbf{y})$ com quaisquer escalares $c_1$ e $c_2$ e quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $R^n$, então $T$ é uma transformação matricial.

(e) Só existe uma única transformação matricial $T: R^n \rightarrow R^m$ tal que $T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})$ com qualquer vetor $\mathbf{x}$ em $R^n$.

(f) Só existe uma única transformação matricial $T: R^n \rightarrow R^m$ tal que $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ com quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $R^n$.

(g) Se $\mathbf{b}$ for um vetor não nulo em $R^n$, então $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ define um operador matricial de $R^n$.

(h) A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é a matriz canônica de alguma rotação.

(i) As matrizes canônicas das reflexões nos eixos coordenados do espaço bidimensional têm o formato $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, com $a = \pm 1$.

### Revisão de conceitos

- Composição de transformações matriciais
- Reflexão na origem
- Transformação injetora
- Inversa de operador matricial
- Condições de linearidade
- Transformação linear
- Caracterizações equivalentes de invertibilidade de matrizes

### Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a matriz canônica de uma composta de transformações matriciais.
- Determinar se um operador matricial é injetor e, se for, encontrar o operador inverso.
- Determinar se uma transformação é linear.

## Conjunto de exercícios 4.10

Nos Exercícios **1–2**, considere os operadores matriciais $T_A \circ T_B$ das matrizes dadas. Encontre a matriz canônica de $T_A \circ T_B$.

**1.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

**2.** $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

**3.** Sejam $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ e $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$.
- (a) Encontre as matrizes canônicas de $T_1$ e $T_2$.
- (b) Encontre as matrizes canônicas de $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$.
- (c) Use as matrizes encontradas na parte (b) para encontrar fórmulas para $T_1(T_2(x_1, x_2))$ e $T_2(T_1(x_1, x_2))$.

**4.** Sejam $T_1(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, -2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2)$ e $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_3, 4x_1 - x_3)$.
- (a) Encontre as matrizes canônicas de $T_1$ e $T_2$.
- (b) Encontre as matrizes canônicas de $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$.
- (c) Use as matrizes encontradas na parte (b) para encontrar fórmulas para $T_1(T_2(x_1, x_2, x_3))$ e $T_2(T_1(x_1, x_2, x_3))$.

**5.** Encontre a matriz canônica para a composição dada em $R^2$.
- (a) Uma rotação de 90° seguida de uma reflexão na reta $y = x$.
- (b) Uma projeção ortogonal sobre o eixo $y$ seguida de uma contração de fator $k = \frac{1}{2}$.
- (c) Uma reflexão em torno do eixo $x$ seguida de uma dilatação de fator $k = 3$.

**6.** Encontre a matriz canônica para a composição dada em $R^2$.
- (a) Uma rotação de 60°, seguida de uma projeção ortogonal sobre o eixo $x$, seguida de uma reflexão na reta $y = x$.
- (b) Uma dilatação de fator $k = 2$, seguida de uma rotação de 45°, seguida de uma reflexão no eixo $y$.
- (c) Uma rotação de 15°, seguida de uma rotação de 105°, seguida de uma rotação de 60°.

**7.** Encontre a matriz canônica para a composição dada em $R^3$.
- (a) Uma reflexão no plano $yz$, seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano $xz$.
- (b) Uma rotação de 45° em torno do eixo $y$, seguida de uma dilatação de fator $k = \sqrt{2}$.
- (c) Uma projeção ortogonal sobre o plano $xy$, seguida de uma reflexão no plano $yz$.

**8.** Encontre a matriz canônica para a composição dada em $R^3$.
- (a) Uma rotação de 30° em torno do eixo $x$, seguida de uma rotação de 30° em torno do eixo $z$, seguida de uma contração de fator $k = \frac{1}{4}$.
- (b) Uma reflexão em torno do plano $xy$, seguida de uma reflexão em torno do plano $xz$, seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano $yz$.
- (c) Uma rotação de 270° em torno do eixo $x$, seguida de uma rotação de 90° em torno do eixo $y$, seguida de uma rotação de 180° em torno do eixo $z$.

**9.** Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.
- (a) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo $x$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo $y$.
- (b) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo $\theta$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo $\theta_2$.
- (c) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo $x$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo $\theta$.

**10.** Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.
- (a) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a dilatação de fator $k$ e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo $z$ por um ângulo $\theta$.
- (b) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo $x$ por um ângulo $\theta_1$ e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo $z$ por um ângulo $\theta_2$.

**11.** Em cada parte, determine por inspeção se o operador matricial é injetor.

(a) Uma projeção ortogonal sobre o eixo $x$ em $R^2$.

(b) Uma reflexão no eixo $y$ em $R^2$.

(c) Uma reflexão na reta $y = x$ em $R^2$.

(d) Uma contração de fator $k > 0$ em $R^2$.

(e) Uma rotação em torno do eixo $z$ em $R^3$.

(f) Uma reflexão no plano $xy$ em $R^3$.

(g) Uma dilatação de fator $k > 0$ em $R^3$.

**12.** Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial definido pelas equações e use o Teorema 4.10.4 para determinar se o operador é injetor.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 8x_1 + 4x_2 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$  (b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ w_2 &= 5x_1 + x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 \phantom{+3x_2} + 4x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 \end{aligned}$  (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ w_3 &= x_1 \phantom{+5x_2} + 8x_3 \end{aligned}$

**13.** Em cada parte, determine se o operador matricial $T: R^2 \to R^2$ definido pelas equações é injetor e, se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre $T^{-1}(w_1, w_2)$.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$  (b) $\begin{aligned} w_1 &= 4x_1 - 6x_2 \\ w_2 &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_2 \\ w_2 &= -x_1 \end{aligned}$  (d) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 \\ w_1 &= -5x_1 \end{aligned}$

**14.** Em cada parte, determine se o operador matricial $T: R^3 \to R^3$ definido pelas equações é injetor e, se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre $T^{-1}(w_1, w_2, w_3)$.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$  (b) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= \phantom{x_1} - 2x_2 + 5x_3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 4x_2 - x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 7x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$  (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ w_2 &= -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ w_3 &= 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 \end{aligned}$

**15.** Em cada parte, determine por inspeção a inversa do operador matricial injetor dado.

(a) A reflexão no eixo $x$ em $R^2$.

(b) A rotação por um ângulo $\pi/4$ em $R^2$.

(c) A dilatação de fator 3 em $R^2$.

(d) A reflexão no plano $xy$ em $R^3$.

(e) A contração de fator $\frac{1}{5}$ em $R^3$.

Nos Exercícios **16–17**, em cada parte, use o Teorema 4.10.2 para determinar se $T: R^2 \to R^2$ é um operador matricial.

**16.** (a) $T(x, y) = (2x, y)$  (b) $T(x, y) = (x^2, y)$

(c) $T(x, y) = (-y, x)$  (d) $T(x, y) = (x, 0)$

**17.** (a) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

(b) $T(x, y) = (x + 1, y)$  (c) $T(x, y) = (y, y)$

(d) $T(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

Nos Exercícios **18–19**, em cada parte, use o Teorema 4.10.2 para determinar se $T: R^3 \to R^2$ é uma transformação matricial.

**18.** (a) $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$

(b) $T(x, y, z) = (1, 1)$

**19.** (a) $T(x, y, z) = (0, 0)$

(b) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$

**20.** Em cada parte, use o Teorema 4.10.3 para encontrar a matriz canônica do operador matricial a partir das imagens dos vetores da base canônica.

(a) As reflexões em $R^2$ da Tabela 1 da Seção 4.9.

(b) As reflexões em $R^3$ da Tabela 2 da Seção 4.9.

(c) As projeções em $R^2$ da Tabela 3 da Seção 4.9.

(d) As projeções em $R^3$ da Tabela 4 da Seção 4.9.

(e) As rotações em $R^2$ da Tabela 5 da Seção 4.9.

(f) As dilatações e contrações em $R^3$ da Tabela 8 da Seção 4.9.

**21.** Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial dado.

(a) $T: R^2 \to R^2$ projeta cada vetor ortogonalmente sobre o eixo $x$ e, em seguida, reflete esse vetor no eixo $y$.

(b) $T: R^2 \to R^2$ reflete cada vetor na reta $y = x$ e, em seguida, reflete esse vetor no eixo $x$.

(c) $T: R^2 \to R^2$ dilata cada vetor pelo fator 3, em seguida, reflete esse vetor na reta $y = x$ e, finalmente, projeta esse vetor ortogonalmente sobre o eixo $y$.

**22.** Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial dado.

(a) $T: R^3 \to R^3$ reflete cada vetor no plano $xz$ e, em seguida, contrai esse vetor pelo fator $\frac{1}{5}$.

(b) $T: R^3 \to R^3$ projeta cada vetor ortogonalmente sobre o plano $xz$ e, em seguida, projeta esse vetor ortogonalmente sobre o plano $xy$.

(c) $T: R^3 \to R^3$ reflete cada vetor no plano $xy$, em seguida, reflete esse vetor no plano $xz$ e, finalmente, reflete esse vetores no plano $yz$.

**23.** Seja $T_A: R^3 \to R^3$ a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

e sejam $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ os vetores da base canônica de $R^3$. Em cada parte, encontre o vetor por inspeção.

(a) $T_A(\mathbf{e}_1)$, $T_A(\mathbf{e}_2)$ e $T_A(\mathbf{e}_3)$

(b) $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$  (c) $T_A(7\mathbf{e}_3)$

**24.** Em cada parte, determine se a multiplicação por $A$ é uma transformação matricial injetora.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

**25.** (a) Será injetora a composta de transformações matriciais injetoras? Justifique sua resposta.

(b) Pode ser injetora a composta de uma transformação matricial injetora com uma transformação matricial que não é injetora? Considere ambas ordens de composição e justifique sua resposta.

**26.** Mostre que $T(x, y) = (0, 0)$ define um operador matricial em $R^2$, mas $T(x, y) = (1, 1)$ não.

**27.** (a) Prove que se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ou seja, $T$ transforma o vetor nulo de $R^n$ no vetor nulo de $R^m$.

(b) A recíproca de (a) não é verdadeira. Dê um exemplo de uma transformação $T$ tal que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, mas tal que $T$ não é uma transformação matricial.

**28.** Prove: uma matriz $A$ de tamanho $n \times n$ é invertível se, e só se, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem exatamente uma solução com qualquer vetor $\mathbf{w}$ em $R^n$ tal que o sistema seja consistente.

**29.** Sejam $A$ uma matriz $n \times n$ tal que $\det(A) = 0$ e $T: R^n \to R^n$ a multiplicação por $A$.

(a) O que pode ser dito sobre a imagem do operador matricial $T$? Dê um exemplo que ilustre sua conclusão.

(b) O que pode ser dito sobre o número de vetores que $T$ aplica em $\mathbf{0}$?

**30.** Prove: se a transformação matricial $T_A: R^n \to R^n$ for injetora, então $A$ é invertível.

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então $T$ é uma transformação matricial.

(b) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1T(\mathbf{x}) + c_2T(\mathbf{y})$ com quaisquer escalares $c_1$ e $c_2$ e quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $R^n$, então $T$ é uma transformação matricial.

(c) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial injetora, então não existem vetores distintos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ com os quais $T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

(d) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m > n$, então $T$ é injetora.

(e) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m = n$, então $T$ é injetora.

(f) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m < n$, então $T$ é injetora.

## 4.11 A geometria de operadores matriciais de $R^2$

Nesta seção opcional, discutimos mais detalhadamente os operadores matriciais de $R^2$. As ideias aqui desenvolvidas têm aplicações importantes na Computação Gráfica.

*Transformação de regiões*

Na Seção 4.9, enfocamos o efeito que um operador matricial tem sobre vetores individuais em $R^2$ e $R^3$. No entanto, também é importante entender como esses operadores afetam os formatos de regiões. Por exemplo, a Figura 4.11.1 mostra uma fotografia famosa de Albert Einstein e três modificações dessa fotografia geradas por computador, que são o resultado de operadores matriciais de $R^2$. A figura original foi escaneada e, em seguida, digitalizada para decompô-la num arranjo retangular de pixels. Esses pixels foram então transformados como segue.

- Foi utilizado o programa MATLAB para associar coordenadas e um nível de cinza a cada pixel.
- As coordenadas dos pixels foram transformadas por multiplicação matricial.
- Os níveis originais de cinza foram então associados aos pixels para produzir a figura transformada.

Muitas vezes, o efeito geral de um operador matricial de $R^2$ pode ser entendido olhando para as imagens dos vértices (0, 0), (1, 0), (0, 1) e (1, 1) do quadrado unitário (Figura 4.11.2).

**11.** Em cada parte, descreva o efeito geométrico da multiplicação por $A$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**12.** Em cada parte, expresse a matriz como um produto de matrizes elementares e descreva o efeito da multiplicação por $A$ em termos de compressões, expansões, reflexões e cisalhamentos.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

**13.** Em cada parte, encontre uma única matriz $2 \times 2$ que efetue a sucessão de operações indicadas.

(a) A compressão de fator $\frac{1}{2}$ na direção $x$ seguida da expansão de fator 5 na direção $y$.

(b) A expansão de fator 5 na direção $y$ seguida do cisalhamento de fator 2 na direção $y$.

(c) A reflexão na reta $y = x$ seguida da rotação pelo ângulo de 180° em torno da origem.

**14.** Em cada parte, encontre uma única matriz $2 \times 2$ que efetue a sucessão de operações indicadas.

(a) A reflexão no eixo $y$, seguida da expansão de fator 5 na direção $x$, seguida pela reflexão na reta $y = x$.

(b) A rotação pelo ângulo de 30° em torno da origem, seguida pelo cisalhamento de fator $-2$ na direção $y$, seguido pela expansão de fator 3 na direção $y$.

**15.** Em cada parte, use inversão matricial para mostrar a afirmação.

(a) A transformação inversa da reflexão na reta $y = x$ é a reflexão na reta $y = x$.

(b) A transformação inversa de uma compressão na direção de um eixo é uma expansão na direção daquele eixo.

(c) A transformação inversa da reflexão num eixo coordenado é a reflexão naquele eixo.

(d) A transformação inversa de um cisalhamento na direção de um eixo coordenado é um cisalhamento na direção daquele eixo.

**16.** Encontre a equação da imagem da reta $y = -4x + 3$ pela multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

**17.** Em cada parte, encontre a equação da imagem da reta $y = 2x$ pelo operador.

(a) O cisalhamento de fator $k = 3$ na direção $x$.

(b) A compressão de fator $\frac{1}{2}$ na direção $y$.

(c) A reflexão no eixo $y = x$.

(d) A reflexão no eixo $y$.

(e) A rotação de 60° em torno da origem.

**18.** Encontre a matriz de um cisalhamento na direção $x$ que transforma o triângulo de vértices (0, 0), (2, 1) e (3, 0) num triângulo retângulo com o ângulo reto na origem.

**19.** (a) Mostre que a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

aplica cada ponto no plano sobre a reta $y = 2x$.

(b) Segue da parte (a) que os pontos não colineares (1, 0), (0, 1) e (−1, 0) são transformados em pontos de uma reta. Isso contradiz a parte (*e*) do Teorema 4.11.3?

**20.** Prove a parte (*a*) do Teorema 4.11.3. [*Sugestão*: uma reta no plano tem uma equação da forma $Ax + By + C = 0$, com $A$ e $B$ não ambos zero. Use o método do Exemplo 6 para mostrar que a imagem dessa reta pela multiplicação pela matriz invertível

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tem a equação $A'x + B'y + C = 0$, com

$$A' = (dA - cB)/(ad - bc)$$

e

$$B' = (-bA + aB)/(ad - bc)$$

Em seguida, mostre que $A'$ e $B'$ não são ambos nulos para concluir que a imagem é uma reta.]

**21.** Use a sugestão do Exercício 20 para provar as partes (*b*) e (*c*) do Teorema 4.11.3.

**22.** Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial descrito pela figura.

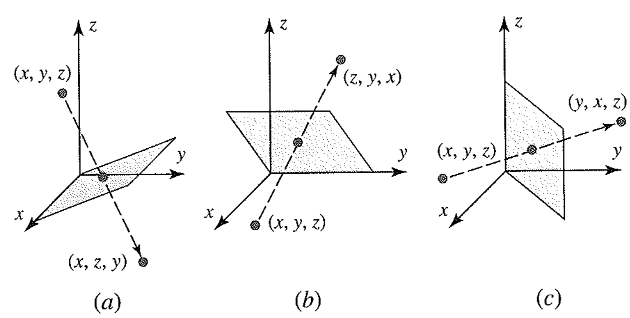



Figura Ex-22

**23.** Em $R^3$, o ***cisalhamento de fator k na direção xy*** é a transformação matricial que aplica cada ponto $(x, y, z)$ paralelamente ao plano $xy$ no novo ponto $(x + kz, y + kz, z)$. (Ver figura.)

(a) Encontre a matriz canônica do cisalhamento de fator $k$ na direção $xy$.

de modo que

$$\begin{aligned} x &= \phantom{-2}x' - y' \\ y &= -2x' + 3y' \end{aligned}$$

Substituindo em $y = 2x + 1$, obtemos

$$-2x' + 3y' = 2(x' - y') + 1 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y' = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{1}{5}$$

Assim, $(x', y')$ satisfaz

$$y = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{1}{5}$$

que é a equação procurada. ◀

### Revisão de conceitos

- Efeito de um operador matricial no quadrado unitário
- Geometria de operadores matriciais invertíveis
- Imagens de retas por operadores matriciais

### Aptidões desenvolvidas

- Encontrar as matrizes canônicas de transformações geométricas de $R^2$.
- Descrever o efeito geométrico de um operador matricial invertível.
- Encontrar a imagem do quadrado unitário por um operador matricial.
- Encontrar a imagem de uma reta por um operador matricial.

## Conjunto de exercícios 4.11

**1.** Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador $T : R^2 \to R^2$ que transforma cada ponto $(x, y)$ na sua

(a) reflexão na reta $y = -x$.

(b) reflexão na origem.

(c) projeção ortogonal sobre o eixo $x$.

(d) projeção ortogonal sobre o eixo $y$.

**2.** Em cada parte do Exercício 1, use a matriz obtida para calcular $T(2, 1)$. Confira suas respostas geometricamente esboçando os pontos $(2, 1)$ e $T(2, 1)$.

**3.** Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador $T : R^3 \to R^3$ que transforma cada ponto $(x, y, z)$ na sua

(a) reflexão no plano $xy$.

(b) reflexão no plano $xz$.

(c) reflexão no plano $yz$.

**4.** Em cada parte do Exercício 3, use a matriz obtida para calcular $T(1, 1, 1)$. Confira suas respostas geometricamente esboçando os vetores $(1, 1, 1)$ e $T(1, 1, 1)$.

**5.** Encontre a matriz canônica do operador $T : R^3 \to R^3$ que efetua a

(a) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo $z$ (olhando ao longo do eixo $z$ positivo para a origem).

(b) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo $x$ (olhando ao longo do eixo $x$ positivo para a origem).

(c) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo $y$ (olhando ao longo do eixo $y$ positivo para a origem).

**6.** Esboce a imagem do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$

(a) pela reflexão no eixo $x$.

(b) pela reflexão no eixo $y$.

(c) pela compressão na direção $y$ de fator $\frac{1}{4}$.

(d) pela expansão na direção $x$ de fator $k = 2$.

(e) pelo cisalhamento de fator $k = 3$ na direção $x$.

(f) pelo cisalhamento de fator $k = 2$ na direção $y$.

**7.** Esboce a imagem do quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ pela multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**8.** Em cada parte, encontre a matriz que faz a rotação de cada ponto $(x, y)$ em torno da origem por

(a) 45° (b) 90° (c) 180° (d) 270° (e) −30°

**9.** Em cada parte, encontre a matriz $2 \times 2$ que efetua um cisalhamento

(a) de fator $k = 4$ na direção $y$.

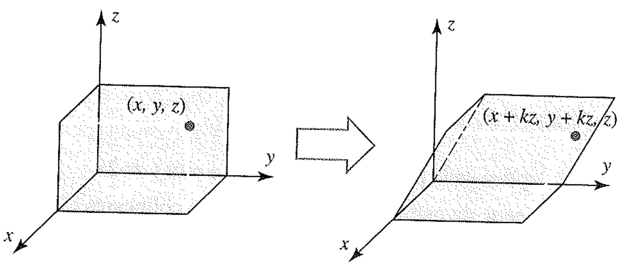
(b) de fator $k = -2$ na direção $x$.

**10.** Em cada parte, encontre a matriz $2 \times 2$ que comprime ou expande

(a) por um fator $\frac{1}{3}$ na direção $y$.

(b) por um fator 6 na direção $x$.

(b) Como você definiria o cisalhamento de fator $k$ na direção $xz$ e o cisalhamento de fator $k$ na direção $yz$? Encontre as matrizes canônicas dessas transformações matriciais.




▲ Figura Ex-23

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A imagem do quadrado unitário por um operador matricial injetor é um quadrado.

(b) Um operador matricial $2 \times 2$ invertível tem o efeito geométrico de uma sucessão de cisalhamentos, compressões, expansões e reflexões.

(c) A imagem de uma reta por um operador matricial injetor é uma reta.

(d) Toda reflexão de $R^2$ é sua própria inversa.

(e) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ representa uma reflexão numa reta.

(f) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ representa um cisalhamento.

(g) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ representa uma expansão.

## 4.12 Sistemas dinâmicos e cadeias de Markov

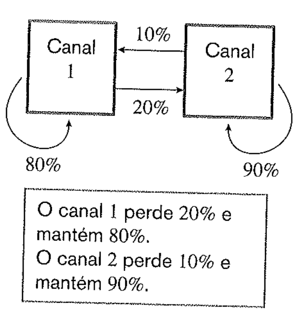
Nesta seção opcional, mostraremos como os métodos matriciais podem ser usados para analisar o comportamento de sistemas físicos que evolvem com o passar do tempo. Os métodos que estudamos aqui têm sido aplicados a problemas de Administração, de Ecologia, de Demografia, de Sociologia e da maioria das ciências físicas.

*Sistemas dinâmicos*

Um ***sistema dinâmico*** é um conjunto finito de variáveis cujos valores mudam com o passar do tempo. O valor de uma variável num dado instante de tempo é denominado o ***estado da variável*** naquele instante de tempo, e o vetor formado pelos estados é denominado o ***estado do sistema dinâmico*** naquele instante de tempo. Nosso principal objetivo nesta seção é analisar como o estado de um sistema dinâmico evolui com o tempo. Comecemos com um exemplo.

### ▶ EXEMPLO 1 Índice de audiência como um sistema dinâmico

Suponha que cada um de dois canais de televisão concorrentes, os canais 1 e 2, tenha 50% da audiência num dado instante de tempo inicial. Suponha que ao longo de cada período de um ano, o canal 1 atraia 10% da audiência do canal 2 e o canal 2 capture 20% da audiência do canal 1 (ver Figura 4.12.1). Qual é a audiência de cada canal ao final de um ano?




▲ Figura 4.12.1

***Solução*** Comecemos introduzindo as variáveis

$$x_1(t) = \text{fração de audiência do canal 1 no instante de tempo } t$$
$$x_2(t) = \text{fração de audiência do canal 2 no instante de tempo } t$$

que dependem do tempo e o vetor coluna

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \textbf{Fração de audiência do canal 1 no instante de tempo } t \\ \leftarrow \textbf{Fração de audiência do canal 2 no instante de tempo } t \end{array}$$

As variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ formam um sistema dinâmico cujo estado no instante de tempo $t$ é o vetor $\mathbf{x}(t)$. Tomando $t = 0$ como o ponto inicial no qual ambos canais têm 50% da audiência, temos que o estado do sistema naquele instante de tempo é

(Convertemos tudo para frações para evitar erros de arredondamento neste exemplo ilustrativo). Deixamos para o leitor confirmar que a forma escalonada reduzida por linhas da matriz de coeficientes é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{15}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{27}{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e que a solução geral de (14) é

$$q_1 = \tfrac{15}{8}s, \quad q_2 = \tfrac{27}{32}s, \quad q_3 = s \tag{15}$$

Para $\mathbf{q}$ ser um vetor probabilidade, precisamos ter $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, do que segue que $s = \frac{32}{119}$ (verifique). Substituindo esse valor em (15), obtemos o vetor de estado estacionário

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{60}{119} \\ \frac{27}{119} \\ \frac{32}{119} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}5042 \\ 0{,}2269 \\ 0{,}2689 \end{bmatrix}$$

(verifique), o que é consistente com os resultados obtidos no Exemplo 4. ◀

### Revisão de conceitos

- Sistema dinâmico
- Estado de uma variável
- Estado de um sistema dinâmico
- Processo estocástico
- Probabilidade
- Vetor probabilidade
- Matriz estocástica
- Cadeia de Markov
- Matriz de transição
- Matriz estocástica regular
- Cadeia de Markov regular
- Vetor de estado estacionário

### Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma matriz é estocástica.
- Calcular os vetores de estado a partir da matriz de transição e um estado inicial.
- Determinar se uma matriz estocástica é regular.
- Determinar se uma cadeia de Markov é regular.
- Encontrar o vetor de estado estacionário de uma matriz de transição regular.

## Conjunto de exercícios 4.12

▶ Nos Exercícios 1–2, em cada parte determine se $A$ é uma matriz estocástica. Se $A$ não for estocástica, explique por que não é. ◀

**1.** (a) $A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}7 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

**2.** (a) $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{8}{9} & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 3–4, use as Fórmulas (11) e (12) para calcular o vetor de estado $\mathbf{x}_4$ de duas maneiras diferentes. ◀

**3.** $P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$

**4.** $P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

▶ Nos Exercícios 5–6, em cada parte, determine se $P$ é uma matriz estocástica regular. ◀

**5.** (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$ (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}$ (c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}$

**6.** (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (c) $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7–10, verifique que $P$ é uma matriz estocástica regular e encontre o vetor de estado estacionário da cadeia de Markov associada.

**7.** $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

**8.** $P = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix}$

**9.** $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

**10.** $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

**11.** Considere um processo de Markov com matriz de transição

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \textbf{Estado 1} & \textbf{Estado 2} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textbf{Estado 1} \\ \textbf{Estado 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) O que representa a entrada 0,2?

(b) O que representa a entrada 0,1?

(c) Se inicialmente o sistema estiver no estado 1, com qual probabilidade ele estará no estado 2 na próxima observação?

(d) Se o sistema tiver uma chance de 50% de estar inicialmente no estado 1, com qual probabilidade ele estará no estado 2 na próxima observação?

**12.** Considere um processo de Markov com matriz de transição

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \textbf{Estado 1} & \textbf{Estado 2} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textbf{Estado 1} \\ \textbf{Estado 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) O que representa a entrada $\frac{6}{7}$?

(b) O que representa a entrada 0?

(c) Se inicialmente o sistema estiver no estado 1, com qual probabilidade ele estará no estado 1 na próxima observação?

(d) Se o sistema tiver uma chance de 50% de estar inicialmente no estado 1, com qual probabilidade ele estará no estado 2 na próxima observação?

**13.** Num dado dia, a qualidade do ar numa certa cidade é boa ou má. Os registros mostram que quando a qualidade do ar é boa num dado dia, então existe uma chance de 95% de que venha a ser boa no próximo dia; e quando a qualidade do ar é má num dado dia, então existe uma chance de 45% de que venha ser má no próximo dia.

(a) Encontre uma matriz de transição para esse fenômeno.

(b) Se hoje a qualidade do ar for boa, com qual probabilidade também será boa daqui a dois dias?

(c) Se hoje a qualidade do ar for má, com qual probabilidade também será má daqui a três dias?

(d) Se a qualidade do ar tem uma chance de 20% de ser boa hoje, com qual probabilidade também será boa amanhã?

**14.** Um rato num experimento de laboratório pode escolher um entre dois tipos de comida a cada dia: o tipo I ou o tipo II. Os registros mostram que se o rato escolhe o tipo I num certo dia, então a chance de escolher o tipo I no dia seguinte é de 75%; e se o rato escolhe o tipo II num certo dia, então a chance de escolher o tipo II no dia seguinte é de 50%.

(a) Encontre uma matriz de transição para esse fenômeno.

(b) Se hoje o rato escolher o tipo I, com qual probabilidade escolherá o tipo I daqui a dois dias?

(c) Se hoje o rato escolher o tipo II, com qual probabilidade escolherá o tipo II daqui a três dias?

(d) Se o tipo I tem uma chance de 10% de ser escolhido hoje, com qual probabilidade também será escolhido amanhã?

**15.** Num certo instante de tempo inicial, havia 100.000 habitantes numa certa cidade e 25.000 habitantes nos arredores da cidade. A Comissão de Planejamento Regional detectou que, a cada ano, 5% da população da cidade muda para os arredores e 3% da população dos arredores muda para a cidade.

(a) Supondo que a população total permaneça constante, faça uma tabela mostrando a população da cidade e dos arredores ao longo de um período de cinco anos (arredonde para o inteiro mais próximo).

(b) A longo prazo, qual será a distribuição da população entre a cidade e os arredores?

**16.** Num certo instante de tempo inicial, cada um de dois canais de televisão concorrentes, os canais 1 e 2, tem 50% da audiência. A cada período de um ano, o canal 1 atrai 5% da audiência do canal 2 e o canal 2 captura 10% da audiência do canal 1.

(a) Faça uma tabela mostrando a participação na audiência dos dois canais ao longo de um período de cinco anos.

(b) A longo prazo, qual será a participação na audiência dos dois canais?

**17.** Uma locadora de automóveis possui três agências, numeradas 1, 2 e 3. Um cliente pode alugar um carro de qualquer uma das três agências e retorná-lo a qualquer uma das três agências. Os registros da locadora mostram que os carros são retirados e devolvidos de acordo com as probabilidades seguintes.

| | | **Alugados da agência** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** |
| **Retornados à agência** | **1** | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| | **2** | $\frac{4}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ |
| | **3** | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ |

(a) Se um carro for alugado na agência 1, com qual probabilidade será retornado à agência 1 depois de duas locações?

(b) Supondo que esse sistema dinâmico possa ser modelado como uma cadeia de Markov, encontre seu vetor estacionário.

(c) Se a locadora possui uma frota de 120 carros, qual deveria ser a quantidade de vagas de estacionamento em cada agência para haver garantia razoável de ter suficiente espaço para os carros a longo prazo? Explique seu raciocínio.

**18.** Os traços físicos são determinados pelos genes que um descendente recebe de seus dois ascendentes. No caso mais simples, um traço no descendente é determinado por um par de genes, um de cada um dos dois ascendentes. Em geral, cada gene num par pode tomar uma de duas formas, denotadas por $A$ e $a$, que são os ***alelos***. Isso leva a três pareamentos possíveis, a saber,

$$AA, \quad Aa, \quad aa$$

denominados ***genótipos*** (os pares $Aa$ e $aA$ determinam o mesmo traço e são, portanto, indistinguíveis). Mostra-se, no estudo da hereditariedade, que se um dos ascendentes tiver genótipo conhecido e o outro ascendente for de genótipo aleatório, então o descendente terá a probabilidade de genótipo dada na próxima tabela, que pode ser vista como uma matriz de transição de um processo de Markov.

| | | **Genótipo de ascendente** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ***AA*** | ***Aa*** | ***aa*** |
| **Genótipo de descendente** | ***AA*** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| | ***Aa*** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | ***aa*** | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

Assim, por exemplo, o descendente de um ascendente de genótipo $AA$ e de outro escolhido aleatoriamente e de genótipo desconhecido tem uma chance de 50% de ser $AA$, 50% de ser $Aa$ e nenhuma chance de ser $aa$.

(a) Mostre que a matriz de transição é regular.

(b) Encontre o vetor estacionário e discuta sua interpretação física.

**19.** Encontre as entradas que faltam na matriz estocástica

$$P = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & * & \frac{1}{5} \\ * & \frac{3}{10} & * \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

e encontre seu vetor de estado estacionário.

**20.** Se $P$ for uma matriz estocástica $n \times n$ e se $M$ for uma matriz $1 \times n$ cujas entradas são todas iguais a 1, então $MP =$ _____.

**21.** Se $P$ for uma matriz estocástica regular com vetor de estado estacionário $\mathbf{q}$, o que pode ser dito sobre a sequência de produtos

$$P\mathbf{q}, \quad P^2\mathbf{q}, \quad P^3\mathbf{q}, \ldots, \quad P^k\mathbf{q}, \ldots$$

quando $k \to \infty$?

**22.** (a) Se $P$ for uma matriz estocástica regular $n \times n$ com vetor de estado estacionário $\mathbf{q}$ e se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ forem os vetores unitários canônicos em forma de coluna, o que pode ser dito sobre o comportamento da sequência

$$P\mathbf{e}_i, \quad P^2\mathbf{e}_i, \quad P^3ei, \ldots, \quad P^k\mathbf{e}_i, \ldots$$

quando $k \to \infty$, com $i = 1, 2, \ldots, n$?

(b) O que isso diz sobre o comportamento dos vetores coluna de $P^k$ quando $k \to \infty$?

**23.** Prove que o produto de duas matrizes estocásticas é uma matriz estocástica. [*Sugestão*: escreva cada coluna do produto como uma combinação linear das colunas do primeiro fator.]

**24.** Prove que se $P$ for uma matriz estocástica cujas entradas são todas maiores do que ou iguais a $\rho$, então as entradas de $P^2$ serão maiores do que ou iguais a $\rho$.

### Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O vetor $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ é um vetor probabilidade.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 0{,}8 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz estocástica regular.

(c) Os vetores coluna de uma matriz de transição são vetores probabilidade.

(d) O vetor de estado estacionário de uma cadeia de Markov com matriz de transição $P$ é qualquer solução do sistema linear $(I - P)\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

(e) O quadrado de qualquer matriz estocástica regular é estocástica.

## Capítulo 4 Exercícios suplementares

**1.** Seja $V$ o conjunto de todos os ternos ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \quad a\mathbf{u} = (au_1, 0, 0)$$

(a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$ com $\mathbf{u} = (3, -2, 4)$, $\mathbf{v} = (1, 5, -2)$ e $a = -1$.

(b) Explique em palavras por que $V$ é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

(c) Como a adição em $V$ é a operação de adição padrão de $R^3$, alguns axiomas de espaço vetorial valem em $V$ porque é sabido que valem em $R^3$. Quais axiomas da Definição 1 da Seção 4.1 são esses?

(d) Mostre que valem os Axiomas 7, 8 e 9.

(e) Mostre que o Axioma 10 falha com as operações dadas.

**2.** Em cada parte, o espaço solução do sistema é um subespaço de $R^3$ e, portanto, deve ser uma reta pela origem, um plano pela origem, todo o $R^3$ ou só a origem. Para cada sistema, determine qual é o caso. Se o subespaço for um plano, encontre uma equação desse plano; e se for uma reta, obtenha equações paramétricas.

(a) $0x + 0y + 0z = 0$

(b)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 6x - 9y + 3z &= 0 \\ -4x + 6y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x - 2y + 7z &= 0 \\ -4x + 8y + 5z &= 0 \\ 2x - 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + 4y + 8z &= 0 \\ 2x + 5y + 6z &= 0 \\ 3x + y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

**3.** Com quais valores de $s$ é o espaço solução de

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + sx_3 &= 0 \\ x_1 + sx_2 + x_3 &= 0 \\ sx_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

uma reta pela origem, um plano pela origem, a origem ou todo o $R^3$?

**4.** (a) Expresse $(4a, a - b, a + 2b)$ como uma combinação linear de $(4, 1, 1)$ e $(0, -1, 2)$.

(b) Expresse $(3a + b + 3c, -a + 4b - c, 2a + b + 2c)$ como uma combinação linear de $(3, -1, 2)$ e $(1, 4, 1)$.

(c) Expresse $(2a - b + 4c, 3a - c, 4b + c)$ como uma combinação linear de três vetores não nulos.

**5.** Seja $W$ o espaço gerado por $\mathbf{f} = \operatorname{sen} x$ e $\mathbf{g} = \cos x$.

(a) Mostre que dado qualquer valor de $\theta$, $\mathbf{f}_1 = \operatorname{sen}(x + \theta)$ e $\mathbf{g}_1 = \cos(x + \theta)$ são vetores em $W$.

(b) Mostre que $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{g}_1$ formam uma base de $W$.

**6.** (a) Expresse $\mathbf{v} = (1, 1)$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 1)$ de duas maneiras distintas.

(b) Explique por que isso não contradiz o Teorema 4.4.1.

**7.** Seja $A$ uma matriz $n \times n$ e sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores linearmente independentes em $R^n$ expressos como matrizes $n \times 1$. Para ter $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n$ linearmente independentes, o que $A$ deve satisfazer?

**8.** Uma base de $P_n$ necessariamente contém algum polinômio de grau $k$ com qualquer $k = 0, 1, 2, \ldots, n$? Justifique sua resposta.

**9.** Para uso neste exercício, definimos uma "matriz tabuleiro" como sendo uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ for par} \\ 0 & \text{se } i + j \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Em cada caso, encontre o posto e a nulidade da matriz tabuleiro dada.

(a) A matriz tabuleiro $3 \times 3$.

(b) A matriz tabuleiro $4 \times 4$.

(c) A matriz tabuleiro $n \times n$.

**10.** Para uso neste exercício, definimos uma "matriz X" como sendo uma matriz quadrada com um número ímpar de linhas e colunas que tem 0 em cada entrada, exceto nas diagonais principal e secundária, onde tem todas entradas iguais a 1. Encontre o posto e a nulidade das matrizes X a seguir.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) A matriz X de tamanho $(2n + 1) \times (2n + 1)$.

**11.** Em cada parte, mostre que o conjunto de polinômios é um subespaço de $P_n$ e encontre uma base desse subespaço.

(a) Todos os polinômios em $P_n$ tais que $p(-x) = p(x)$.

(b) Todos os polinômios em $P_n$ tais que $p(0) = 0$.

**12.** (***Requer Cálculo***) Mostre que o conjunto de todos os polinômios em $P_n$ que têm uma tangente horizontal em $x = 0$ é um subespaço de $P_n$. Encontre uma base desse subespaço.

**13.** (a) Encontre uma base do espaço vetorial de todas as matrizes $3 \times 3$ simétricas.

(b) Encontre uma base do espaço vetorial de todas as matrizes $3 \times 3$ antissimétricas.

**14.** Em Álgebra Linear avançada, prova-se o critério de posto seguinte usando determinantes. *O posto de uma matriz $A$ é $r$ se, e só se, $A$ tem alguma submatriz $r \times r$ de determinante não nulo e todas as submatrizes de tamanho maior têm determinante nulo.* [*Observação*: uma submatriz de $A$ é qualquer matriz obtida de $A$ por eliminação de linhas ou colunas de $A$. A própria matriz $A$ também é considerada uma submatriz de $A$.] Em cada parte, use esse critério para encontrar o posto da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

**15.** Use o resultado do Exercício 14 para encontrar os postos possíveis das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{bmatrix}$$

**16.** Prove: se $S$ for uma base de um espaço vetorial $V$, então valem as relações seguintes com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e qualquer escalar $k$.

(a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_S = (\mathbf{u})_S + (\mathbf{v})_S$

(b) $(k\mathbf{v})_S = k(\mathbf{v})_S$