Notações alternativas para vetores

Até aqui, temos escrito vetores em R^n usando a notação

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \tag{15}$$

Dizemos que essa é a forma ***de ênupla***. Contudo, como um vetor em R^n é simplesmente uma lista de n componentes ordenados de uma maneira específica, qualquer notação que exiba esses componentes em sua ordem correta é uma maneira válida de representar o vetor. Por exemplo, o vetor em (15) pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \tag{16}$$

que é denominada forma ***matriz linha***, ou como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

que é denominada forma ***matriz coluna***. A escolha de notação é, muitas vezes, uma questão de gosto ou conveniência, mas, às vezes, a natureza de um problema sugere uma notação específica. As três notações (15), (16) e (17) serão utilizadas em vários lugares do texto.

Revisão de conceitos

- Vetor geométrico
- Direção e sentido
- Comprimento
- Ponto inicial
- Ponto final
- Vetores equivalentes
- Vetor zero
- Adição vetorial, regra do paralelogramo e regra do triângulo
- Subtração vetorial
- Negativo de um vetor
- Multiplicação por escalar
- Vetores colineares (ou seja, paralelos)
- Componentes de um vetor
- Coordenadas de um ponto
- Ênupla
- Espaço de dimensão n
- Operações vetoriais no espaço de dimensão n: adição, subtração e multiplicação por escalar.
- Combinação linear de vetores

Aptidões desenvolvidas

- Efetuar operações geométricas com vetores: adição, subtração e multiplicação por escalar.
- Efetuar operações algébricas com vetores: adição, subtração e multiplicação por escalar.
- Determinar se dois vetores são equivalentes.
- Determinar se dois vetores são colineares.
- Esboçar vetores cujos pontos inicial e terminal sejam dados.
- Encontrar componentes de um vetor cujos pontos inicial e terminal sejam dados.
- Provar as propriedades algébricas básicas de vetores (Teoremas 3.1.1 e 3.1.2).

Conjunto de exercícios 3.1

Nos Exercícios 1–2, desenhe um sistema de coordenadas (como na Figura 3.1.10) e marque, em cada parte, o ponto cujas coordenadas são dadas.

1. (a) $(3, 4, 5)$ (b) $(-3, 4, 5)$ (c) $(3, -4, 5)$
(d) $(3, 4, -5)$ (e) $(-3, -4, 5)$ (f) $(-3, 4, -5)$

2. (a) $(0, 3, -3)$ (b) $(3, -3, 0)$ (c) $(-3, 0, 0)$
(d) $(3, 0, 3)$ (e) $(0, 0, -3)$ (f) $(0, 3, 0)$

Nos Exercícios 3–4, em cada parte esboce o vetor dado com ponto inicial na origem.

3. (a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (3, 4, 5)$
(e) $\mathbf{v}_5 = (3, 3, 0)$ (f) $\mathbf{v}_6 = (-1, 0, 2)$

4. (a) $\mathbf{v}_1 = (5, -4)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$
(c) $\mathbf{v}_3 = (0, -7)$ (d) $\mathbf{v}_4 = (0, 0, -3)$
(e) $\mathbf{v}_5 = (0, 4, -1)$ (f) $\mathbf{v}_6 = (2, 2, 2)$

Nos Exercícios 5–6, em cada parte esboce, com ponto inicial na origem, o vetor determinado pelos dois pontos dados.

5. (a) $P_1(4, 8), P_2(3, 7)$
(b) $P_1(3, -5), P_2(-4, -7)$
(c) $P_1(3, -7, 2), P_2(-2, 5, -4)$

6. (a) $P_1(-5, 0), P_2(-3, 1)$
(b) $P_1(0, 0), P_2(3, 4)$
(c) $P_1(-1, 0, 2), P_2(0, -1, 0)$
(d) $P_1(2, 2, 2), P_2(0, 0, 0)$

Nos Exercícios 7–8, em cada parte encontre os componentes do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

7. (a) $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$
(b) $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$

8. (a) $P_1(-6, 2), P_2(-4, -1)$
(b) $P_1(0, 0, 0), P_2(-1, 6, 1)$

9. (a) Encontre o ponto final do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 2)$ e cujo ponto inicial é $A(1, 1)$.
(b) Encontre o ponto inicial do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ e cujo ponto final é $B(-1, -1, 2)$.

10. (a) Encontre o ponto inicial do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 2)$ e cujo ponto final é $B(2, 0)$.
(b) Encontre o ponto final do vetor que é equivalente a $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ e cujo ponto inicial é $A(0, 2, 0)$.

11. Encontre um ponto inicial P de um vetor não nulo $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ com ponto final $Q(3, 0, -5)$ tal que
(a) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$.
(b) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção, mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$.

12. Encontre um ponto final Q de um vetor não nulo $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ de ponto inicial $P(-1, 3, -5)$ tal que
(a) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$.
(b) $\mathbf{u}$ tem a mesma direção, mas sentido oposto ao de $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$.

13. Sejam $\mathbf{u} = (4, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 5)$ e $\mathbf{w} = (-3, -3)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$
(c) $2(\mathbf{u} - 5\mathbf{w})$ (d) $3\mathbf{v} - 2(\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$
(e) $-3(\mathbf{w} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v})$ (f) $(-2\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 5(\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$

14. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$ e $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$
(c) $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$ (d) $5(\mathbf{v} - 4\mathbf{u})$
(e) $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$ (f) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

15. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (4, 7, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (5, -2, 8, 1)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $2\mathbf{u} + 7\mathbf{v}$
(c) $-\mathbf{u} + (\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$ (d) $6(\mathbf{u} - 3\mathbf{v})$
(e) $-\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (f) $(6\mathbf{v} - \mathbf{w}) - (4\mathbf{u} + \mathbf{v})$

16. Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ os vetores do Exercício 15. Encontre o vetor $\mathbf{x}$ que satisfaz $5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$.

17. Sejam $\mathbf{u} = (5, -1, 0, 3, -3)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 7, 2, 0)$ e $\mathbf{w} = (-4, 2, -3, -5, 2)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ (b) $2\mathbf{v} + 3\mathbf{u}$
(c) $-\mathbf{w} + 3(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ (d) $5(-\mathbf{v} + 4\mathbf{u} - \mathbf{w})$
(e) $-2(3\mathbf{w} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{u} + \mathbf{w})$ (f) $\frac{1}{2}(\mathbf{w} - 5\mathbf{v} + 2\mathbf{u}) + \mathbf{v}$

18. Sejam $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 5, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -1, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (7, 1, -4, -2, 3)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (b) $3(2\mathbf{u} - \mathbf{v})$
(c) $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (2\mathbf{u} + 4\mathbf{w})$

19. Sejam $\mathbf{u} = (-3, 1, 2, 4, 4)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (6, -1, -4, 3, -5)$. Encontre os componentes de
(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$
(c) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

20. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ os vetores do Exercício 18. Encontre os componentes do vetor $\mathbf{x}$ que satisfazem a equação $3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} = 3\mathbf{x} + 2\mathbf{w}$.

21. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ os vetores do Exercício 19. Encontre os componentes do vetor $\mathbf{x}$ que satisfazem a equação $2\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.

22. Com qual(is) valor(es) de t, se houver, o vetor dado é paralelo a $\mathbf{u} = (4, -1)$?
(a) $(8t, -2)$ (b) $(8t, 2t)$ (c) $(1, t^2)$

23. Qual(is) dos vetores em R^6 dados é(são) paralelo(s) a $\mathbf{u} = (-2, 1, 0, 3, 5, 1)$?
(a) $(4, 2, 0, 6, 10, 2)$
(b) $(4, -2, 0, -6, -10, -2)$
(c) $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$

24. Sejam $\mathbf{u} = (2, 1, 0, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Encontre escalares a e b tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (-8, 8, 3, -1, 7)$.

25. Sejam $\mathbf{u} = (1, -1, 3, 5)$ e $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -3)$. Encontre escalares a e b tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (1, -4, 9, 18)$.

26. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(1, 2, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

27. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(1, -1, 0) + c_2(3, 2, 1) + c_3(0, 1, 4) = (-1, 1, 19)$$

28. Encontre todos os escalares c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(-1, 0, 2) + c_2(2, 2, -2) + c_3(1, -2, 1) = (-6, 12, 4)$$

29. Sejam $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$ e $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$. Encontre escalares a_1, a_2, a_3 e a_4 tais que $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3 + a_4\mathbf{u}_4 = (0, 5, 6, -3)$.

30. Mostre que não existem escalares c_1, c_2, e c_3 tais que

$$c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1, 0, -2, 1) + c_3(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$$

31. Mostre que não existem escalares c_1, c_2, e c_3 tais que

$$c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$$

32. Considere a Figura 3.1.12. Discuta uma interpretação geométrica do vetor

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_1} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$$

33. Sejam P o ponto $(2, 3, -2)$ e Q o ponto $(7, -4, 1)$.

(a) Encontre o ponto médio do segmento de reta que liga P a Q.

(b) Encontre o ponto no segmento de reta que liga P a Q que está a $\frac{3}{4}$ do caminho de P a Q.

34. Seja P o ponto $(1, 3, 7)$. Se o ponto $(4, 0, -6)$ for o ponto médio do segmento de reta que liga P e Q, quem é Q?

35. Prove as partes (*a*), (*c*) e (*d*) do Teorema 3.1.1.

36. Prove as partes (*e*)-(*h*) do Teorema 3.1.1.

37. Prove as partes (*a*)-(*c*) do Teorema 3.1.2.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Dois vetores equivalentes sempre têm o mesmo ponto inicial.

(b) Os vetores (a, b) e $(a, b, 0)$ são equivalentes.

(c) Se k for um escalar e $\mathbf{v}$, um vetor, então $\mathbf{v}$ e $k\mathbf{v}$ são paralelos se, e só se, $k \geq 0$.

(d) Os vetores $\mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$ e $(\mathbf{w} + \mathbf{v}) + \mathbf{u}$ são iguais.

(e) Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(f) Se a e b forem escalares tais que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores paralelos.

(g) Vetores colineares de mesmo tamanho são iguais.

(h) Se $(a, b, c) + (x, y, z) = (x, y, z)$, então (a, b, c) necessariamente é o vetor nulo.

(i) Se a e b forem escalares e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores, então

$$(a + b)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$$

(j) Dados vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, a equação vetorial

$$3(2\mathbf{v} - \mathbf{x}) = 5\mathbf{x} - 4\mathbf{w} + \mathbf{v}$$

pode ser resolvida para $\mathbf{x}$.

(k) As combinações lineares $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ e $b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2$ só podem ser iguais se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

3.2 Norma, produto escalar e distância em R^n

Nesta seção, vamos tratar das noções de comprimento e distância em relação a vetores. Começamos discutindo essas ideias em R^2 e R^3 e depois as estendemos algebricamente ao R^n.

Norma de um vetor

Neste texto, denotamos o comprimento de um vetor $\mathbf{v}$ pelo símbolo $\|\mathbf{v}\|$ e dizemos que este é a *norma*, o *comprimento* ou a *magnitude* de $\mathbf{v}$ (sendo que o termo "norma" é um sinônimo matemático comum para comprimento). Como sugere a Figura 3.2.1*a*, segue pelo Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor (v_1, v_2) de R^2 é

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{1}$$

Analogamente, para um vetor (v_1, v_2, v_3) em R^3, segue da Figura 3.2.1*b* e duas aplicações do Teorema de Pitágoras que

$$\|\mathbf{v}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

de modo que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{2}$$

Motivados pelo padrão das Fórmulas (1) e (2), apresentamos a seguinte definição.

Uma aplicação do produto escalar ao números do ISBN

Embora o sistema tenha sido alterado recentemente, a maioria dos livros publicados nos últimos 25 anos possui um indicativo numérico utilizado internacionalmente para a identificação de livros, que consiste em dez dígitos, denominado ISBN (das iniciais em inglês, ***International Standard Book Number***). Os nove primeiros dígitos desse número estão divididos em três grupos: o primeiro grupo representa o país ou grupo de países no qual se originou o livro, o segundo identifica a editora que o publicou, e o terceiro identifica o título do próprio livro. O décimo e último dígito, denominado ***dígito de verificação***, é calculado a partir dos nove primeiros e é utilizado para garantir que não haja erro numa transmissão eletrônica do ISBN, digamos, pela Internet.

Para explicar como isso é feito, considere os nove primeiros dígitos do ISBN como um vetor $\mathbf{b}$ de R^9 e seja $\mathbf{a}$ o vetor

$$\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

Então o dígito de verificação c é calculado pelo procedimento seguinte.

1. Calcule o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
2. Divida $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ por 11, produzindo um resto c, que é um inteiro entre 0 e 10, inclusive. O dígito de verificação é tomado como sendo c, com a ressalva de trocar 10 por X para evitar mais de um dígito.

Por exemplo, o ISBN do Novo Aurélio Século XXI é

85-209-1010-6

com um dígito de verificação igual a 6. Isso é consistente com os nove primeiros dígitos do ISBN, pois

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \cdot (8, 5, 2, 0, 9, 1, 0, 1, 0) = 83$$

Dividindo 83 por 11, obtemos um quociente de 7 e um resto de 6, de modo que o dígito de verificação é $c = 6$. Se uma loja de uma rede de livrarias encomendar o Aurélio por meio de um pedido transmitido eletronicamente ao depósito, então o depósito pode usar esse procedimento para verificar se o dígito de verificação é consistente com os nove primeiros dígitos transmitidos e, assim, reduzir a possibilidade de erro na remessa.

Revisão de conceitos

- Norma (ou comprimento ou magnitude) de um vetor
- Vetor unitário
- Vetor normalizado
- Vetores unitários canônicos
- Distância entre pontos em R^n
- Ângulo entre dos vetores em R^n
- Produto escalar (ou produto interno euclidiano) de dois vetores em R^n
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz
- Desigualdade triangular
- Identidade do paralelogramo de vetores

Aptidões desenvolvidas

- Calcular a norma de um vetor em R^n.
- Determinar se um dado vetor em R^n é unitário.
- Normalizar um vetor não nulo.
- Determinar a distância entre dois vetores em R^n.
- Calcular o produto escalar de dois vetores em R^n.
- Calcular o ângulo entre dois vetores não nulos em R^n.
- Provar as propriedades básicas relativas a normas e produtos escalares (Teoremas 3.2.1–3.2.3 e 3.2.5–3.2.7).

Conjunto de exercícios 3.2

Nos Exercícios 1–2, encontre a norma de $\mathbf{v}$, um vetor unitário de mesma direção e sentido de $\mathbf{v}$ e um vetor unitário de mesma direção e sentido oposto de $\mathbf{v}$.

1. (a) $\mathbf{v} = (4, -3)$ (b) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$
(c) $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 1, 3)$

2. (a) $\mathbf{v} = (-5, 12)$ (b) $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$
(c) $\mathbf{v} = (-2, 3, 3, -1)$

Nos Exercícios 3–4, calcule a expressão dada com $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ e $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$.

3. (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
(c) $\|-2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\|$ (d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

4. (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (b) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
(c) $\|3\mathbf{v} - 3\mathbf{v}\|$ (d) $\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

Nos Exercícios 5–6, calcule a expressão dada com $\mathbf{u} = (-2, -1, 4, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -5, 7)$ e $\mathbf{w} = (-6, 2, 1, 1)$.

5. (a) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (b) $\|3\mathbf{u}\| - 5\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$
(c) $\|-\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}\|$

6. (a) $\|\mathbf{u}\| - 2\|\mathbf{v}\| - 3\|\mathbf{w}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|-2\mathbf{v}\| + \|-3\mathbf{w}\|$
(c) $\|\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|\mathbf{w}\|$

7. Seja $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$. Encontre todos os escalares k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 5$.

8. Seja $\mathbf{v} = (1, 1, 2, -3, 1)$. Encontre todos os escalares k tais que $\|k\mathbf{v}\| = 4$.

Nos Exercícios **9–10**, encontre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

9. (a) $\mathbf{u} = (3, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 2, -4)$
(b) $\mathbf{u} = (1, 1, 4, 6)$, $\mathbf{v} = (2, -2, 3, -2)$

10. (a) $\mathbf{u} = (1, 1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 5, 1)$
(b) $\mathbf{u} = (2, -1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 2, 2, 1)$

Nos Exercícios **11–12**, encontre a distância euclidiana entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

11. (a) $\mathbf{u} = (3, 3, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 4)$
(b) $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$
(c) $\mathbf{u} = (3, -3, -2, 0, -3, 13, 5)$,
$\mathbf{v} = (-4, 1, -1, 5, 0, -11, 4)$

12. (a) $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 0)$, $\mathbf{v} = (5, 1, 2, -2)$
(b) $\mathbf{u} = (2, -1, -4, 1, 0, 6, -3, 1)$,
$\mathbf{v} = (-2, -1, 0, 3, 7, 2, -5, 1)$
(c) $\mathbf{u} = (0, 1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -1, 3)$

13. Encontre o cosseno do ângulo entre os vetores de cada parte do Exercício 11 e decida se o ângulo encontrado é agudo, obtuso ou reto.

14. Encontre o cosseno do ângulo entre os vetores de cada parte do Exercício 12 e decida se o ângulo encontrado é agudo, obtuso ou reto.

15. Suponha que um vetor $\mathbf{a}$ do plano xy tenha um comprimento de 9 unidades e aponte na direção que faz um ângulo de 120° no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo e que um vetor $\mathbf{b}$ daquele plano tenha um comprimento de 5 unidades e aponte na direção e sentido do eixo y positivo. Encontre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

16. Suponha que um vetor $\mathbf{a}$ do plano xy aponte na direção que faz um ângulo de 47° no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo e que um vetor $\mathbf{b}$ daquele plano aponte na direção que faz um ângulo de 43° no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo. O que pode ser dito sobre o valor de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$?

Nos Exercícios **17–18**, determine se a expressão faz sentido matemático. Se não fizer, explique.

17. (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(c) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$ (d) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \|\mathbf{u}\|$

18. (a) $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ (b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{w}$
(c) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - k$ (d) $k \cdot \mathbf{u}$

19. Em cada parte, encontre um vetor de mesma direção e sentido do vetor.
(a) $(-4, -3)$ (b) $(1, 7)$
(c) $(-3, 2, \sqrt{3})$ (d) $(1, 2, 3, 4, 5)$

20. Em cada parte, encontre um vetor unitário de mesma direção e sentido oposto ao do vetor.
(a) $(-12, -5)$ (b) $(3, -3, -3)$
(c) $(-6, 8)$ (d) $(-3, 1, \sqrt{6}, 3)$

21. Enuncie um procedimento para encontrar um vetor de um comprimento especificado m que aponte na mesma direção e sentido de um vetor $\mathbf{v}$ dado.

22. Se $\|\mathbf{v}\| = 2$ e $\|\mathbf{w}\| = 3$, quais são os maiores e menores valores possíveis de $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$? Interprete seu resultado geometricamente.

23. Em cada parte, encontre o cosseno do ângulo θ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
(a) $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\mathbf{v} = (5, -7)$
(b) $\mathbf{u} = (-6, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 0)$
(c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$
(d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$

24. Em cada parte, encontre a medida em radianos do ângulo θ (com $0 \leq \theta \leq \pi$) entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
(a) $(1, -7)$ e $(21, 3)$ (b) $(0, 2)$ e $(3, -3)$
(c) $(-1, 1, 0)$ e $(0, -1, 1)$ (d) $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, 0)$

Nos Exercícios **25–26**, verifique a validade da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

25. (a) $\mathbf{u} = (3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$
(b) $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$
(c) $\mathbf{u} = (0, 2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$

26. (a) $\mathbf{u} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$
(b) $\mathbf{u} = (1, 2, 1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1, 5, -2)$
(c) $\mathbf{u} = (1, 3, 5, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 4, 1, 3, 5)$

27. Sejam $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{p} = (x, y, z)$. Descreva o conjunto de todos os pontos (x, y, z) para os quais $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$.

28. (a) Mostre que os componentes do vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ na Figura Ex-28*a* são $v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos\theta$ e $v_2 = \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$.
(b) Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os vetores na Figura Ex-28*b*. Use o resultado da parte (a) para encontrar os componentes de $4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$.

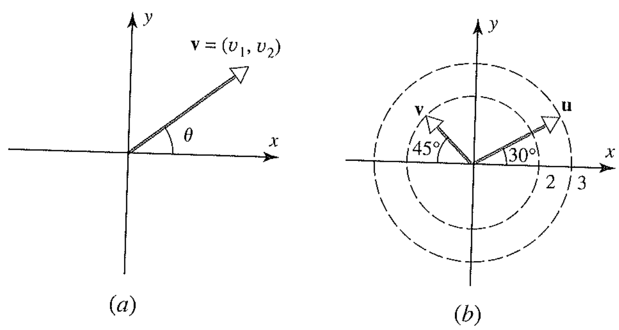


Figura Ex-28

29. Prove as partes (*a*) e (*b*) do Teorema 3.2.1.

30. Prove as partes (*a*) e (*c*) do Teorema 3.2.3.

31. Prove as partes (*d*) e (*e*) do Teorema 3.2.3.

32. A desigualdade triangular (Teorema 3.2.5*a*) é uma igualdade sob quais condições? Explique sua resposta geometricamente.

33. O que pode ser dito sobre dois vetores não nulos **u** e **v** que satisfazem a equação $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$?

34. (a) Qual relação deve ser verificada para que o ponto $\mathbf{p} = (a, b, c)$ esteja equidistante da origem e do plano xz? Garanta que a relação enunciada seja válida para valores positivos e negativos de a, b e c.

(b) Qual relação deve ser verificada para que o ponto $\mathbf{p} = (a, b, c)$ esteja mais distante da origem do que do plano xz? Garanta que a relação enunciada seja válida para valores positivos e negativos de a, b e c.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se cada componente de um vetor em R^3 for duplicado, a norma desse vetor é duplicada.

(b) Em R^2, os vetores de norma 5 cujo ponto inicial esteja na origem têm ponto final num círculo de raio 5 centrado na origem.

(c) Cada vetor em R^n tem norma positiva.

(d) Se **v** for um vetor não nulo em R^n, existem exatamente dois vetores unitários paralelos a **v**.

(e) Se $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$, então o ângulo entre **u** e **v** mede $\pi/3$ radianos.

(f) Ambas expressões $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ fazem sentido e são iguais.

(g) Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

(h) Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{u} = 0$.

(i) Em R^2, se **u** estiver no primeiro quadrante e **v** no terceiro quadrante, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ não pode ser positivo.

(j) Dados quaisquer vetores **u**, **v** e **w** em R^n, temos

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

3.3 Ortogonalidade

Na seção anterior, definimos a noção de "ângulo" entre vetores em R^n. Nesta seção, tratamos da noção de "perpendicularidade". Os vetores perpendiculares em R^n desempenham um papel importante numa grande variedade de aplicações.

Vetores ortogonais

Lembre que, na Fórmula (20) da seção anterior, definimos o ângulo θ entre dois vetores *não nulos* **u** e **v** em R^n pela fórmula

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Segue disso que $\theta = \pi/2$ se, e só se, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Assim, obtemos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que dois vetores não nulos **u** e **v** em R^n são ***ortogonais*** (ou ***perpendiculares***) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em R^n é ortogonal a *cada* vetor em R^n. Um conjunto não vazio de vetores em R^n é denominado ***ortogonal*** se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ***ortonormal***.

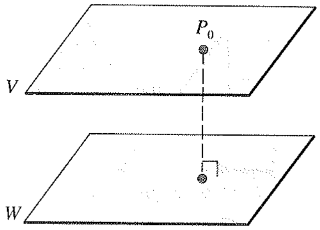
▶ EXEMPLO 1 Vetores ortogonais

(a) Mostre que $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ são vetores ortogonais em R^4.

(b) Mostre que o conjunto $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dos vetores unitários canônicos é um conjunto ortogonal em R^3.

Solução (a) Os vetores são ortogonais pois

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$



▲ **Figura 3.3.7** A distância entre os planos paralelos V e W é igual à distância entre P_0 e W.

O terceiro problema de distância proposto é encontrar a distância entre dois planos paralelos em R^3. Conforme sugerido na Figura 3.3.7, a distância entre um plano V e um plano W pode ser obtida encontrando um ponto P_0 qualquer em um dos planos e calculando a distância entre esse ponto e o outro plano. Vejamos um exemplo.

▶ EXEMPLO 8 Distância entre planos paralelos

Os planos

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{e} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

são paralelos porque suas normais, $(1, 2, -2)$ e $(2, 4, -4)$, são vetores paralelos. Encontre a distância entre esse planos

Solução Para encontrar a distância D entre os planos, podemos selecionar um ponto arbitrário em um dos planos e calcular sua distância ao outro plano. Tomando $y = z = 0$ na equação $x + 2y - 2z = 3$, obtemos o ponto $P_0(3, 0, 0)$ nesse plano. Usando (16), a distância entre P_0 e o plano $2x + 4y - 4z = 7$ é

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6} \quad ◀$$

Revisão de conceitos

- Vetores ortogonais (perpendiculares)
- Conjunto ortogonal de vetores
- Conjunto ortonormal de vetores
- Normal a uma reta
- Normal a um plano
- Equações ponto-normal
- Forma vetorial de uma reta
- Forma vetorial de um plano
- Projeção ortogonal de **u** sobre **a**
- Componente vetorial de **u** ao longo de **a**
- Componente vetorial de **u** ortogonal a **a**
- Teorema de Pitágoras

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se dois vetores são ortogonais.
- Determinar se um dado conjunto de vetores forma um conjunto ortogonal.
- Encontrar equações de retas (ou planos) usando um vetor normal e um ponto da reta (ou plano).
- Encontrar a forma vetorial de uma reta ou plano pela origem.
- Calcular o componente vetorial de **u** ao longo de **a** e ortogonal a **a**.
- Encontrar a distância entre um ponto e uma reta em R^2 ou R^3.
- Encontrar a distância entre dois planos paralelos em R^3.
- Encontrar a distância entre um ponto e um plano.

Conjunto de exercícios 3.3

Nos Exercícios 1–2, determine se **u** e **v** são vetores ortogonais.

1. (a) $\mathbf{u} = (6, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$
(b) $\mathbf{u} = (0, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
(c) $\mathbf{u} = (-6, 0, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$
(d) $\mathbf{u} = (2, 4, -8)$, $\mathbf{v} = (5, 3, 7)$

2. (a) $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\mathbf{v} = (5, -7)$
(b) $\mathbf{u} = (-6, -2)$, $\mathbf{v} = (4, 0)$
(c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$
(d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, -4)$

Nos Exercícios 3–4, determine se os vetores formam um conjunto ortogonal.

3. (a) $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 2)$
(b) $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$
(c) $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, -5, 1)$
(d) $\mathbf{v}_1 = (-3, 4, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 5)$, $\mathbf{v}_3 = (4, -3, 0)$

4. (a) $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, 2)$
(b) $\mathbf{v}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)$
(c) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1)$
(d) $\mathbf{v}_1 = (2, -2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 2)$

5. Encontre um vetor unitário que seja ortogonal tanto a $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ quanto a $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

6. (a) Mostre que $\mathbf{v} = (a, b)$ e $\mathbf{w} = (-b, a)$ são vetores ortogonais.
(b) Use o resultado na parte (a) para encontrar vetores que sejam ortogonais a $\mathbf{v} = (2, -3)$.
(c) Encontre dois vetores unitários ortogonais a $(-3, 4)$.

7. Verifique se os pontos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, 3)$ e $C(-3, -1, 1)$ formam os vértices de um triângulo retângulo. Explique sua resposta.

8. Repita o Exercício 7 com os pontos $A(3, 0, 2)$, $B(4, 3, 0)$ e $C(8, 1, -1)$.

Nos Exercícios **9–12**, encontre uma forma ponto-normal da equação do plano que passa por P e tem $\mathbf{n}$ como normal.

9. $P(-1, 3, -2)$; $\mathbf{n} = (-2, 1, -1)$

10. $P(1, 1, 4)$; $\mathbf{n} = (1, 9, 8)$ **11.** $P(2, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$

12. $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$

Nos Exercícios **13–16**, determine se os planos dados são paralelos.

13. $4x - y + 2z = 5$ e $7x - 3y + 4z = 8$

14. $x - 4y - 3z - 2 = 0$ e $3x - 12y - 9z - 7 = 0$

15. $2y = 8x - 4z + 5$ e $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$

16. $(-4, 1, 2) \cdot (x, y, z) = 0$ e $(8, -2, -4) \cdot (x, y, z) = 0$

Nos Exercícios **17–18**, determine se os planos são perpendiculares.

17. $3x - y + z - 4 = 0$, $x + 2z = -1$

18. $x - 2y + 3z = 4$, $-2x + 5y + 4z = -1$

Nos Exercícios **19–20**, encontre $\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}\|$.

19. (a) $\mathbf{u} = (1, -2)$, $\mathbf{a} = (-4, -3)$
(b) $\mathbf{u} = (3, 0, 4)$, $\mathbf{a} = (2, 3, 3)$

20. (a) $\mathbf{u} = (5, 6)$, $\mathbf{a} = (2, -1)$
(b) $\mathbf{u} = (3, -2, 6)$, $\mathbf{a} = (1, 2, -7)$

Nos Exercícios **21–28**, encontre os componentes vetoriais de $\mathbf{u}$ ao longo de e ortogonal a $\mathbf{a}$.

21. $\mathbf{u} = (6, 2)$, $\mathbf{a} = (3, -9)$ 22. $\mathbf{u} = (-1, -2)$, $\mathbf{a} = (-2, 3)$

23. $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$

24. $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$

25. $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a} = (0, 2, -1)$

26. $\mathbf{u} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$

27. $\mathbf{u} = (2, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a} = (4, -4, 2, -2)$

28. $\mathbf{u} = (5, 0, -3, 7)$, $\mathbf{a} = (2, 1, -1, -1)$

Nos Exercícios **29–32**, encontre a distância entre o ponto e a reta.

29. $4x + 3y + 4 = 0$; $(-3, 1)$

30. $x - 3y + 2 = 0$; $(-1, 4)$

31. $y = -4x + 2$; $(2, -5)$

32. $3x + y = 5$; $(1, 8)$

Nos Exercícios **33–36**, encontre a distância entre o ponto e o plano.

33. $(3, 1, -2)$; $x + 2y - 2z = 4$

34. $(-1, -1, 2)$; $2x + 5y - 6z = 4$

35. $(-1, 2, 1)$; $2x + 3y - 4z = 1$

36. $(0, 3, -2)$; $x - y - z = 3$

Nos Exercícios **37–40**, encontre a distância entre os planos paralelos.

37. $2x - y - z = 5$ e $-4x + 2y + 2z = 12$

38. $3x - 4y + z = 1$ e $6x - 8y + 2z = 3$

39. $-4x + y - 3z = 0$ e $8x - 2y + 6z = 0$

40. $2x - y + z = 1$ e $2x - y + z = -1$

41. Sejam **i**, **j** e **k** os vetores unitários ao longo dos eixos x, y e z positivos de um sistema de coordenadas retangulares no espaço tridimensional. Se $\mathbf{v} = (a, b, c)$ é um vetor não nulo, então os ângulos α, β e γ entre $\mathbf{v}$ e os vetores **i**, **j** e **k**, respectivamente, são denominados ***ângulos diretores*** de **v** (Figura Ex-41), e os números α, γ e β são os ***cossenos diretores*** de **v**.
(a) Mostre que $\cos\alpha = a/\|\mathbf{v}\|$.
(b) Encontre $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.
(c) Mostre que $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
(d) Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

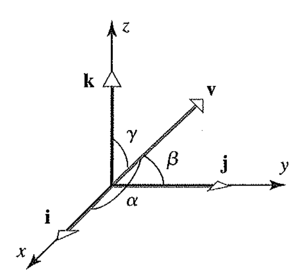


Figura Ex-41

42. Use o resultado do Exercício 41 para estimar, até o grau mais próximo, os ângulos que a diagonal de uma caixa de 10 cm × 15 cm × 25 cm faz com as arestas da caixa.

43. Mostre que se $\mathbf{v}$ for perpendicular a ambos $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, então $\mathbf{v}$ é ortogonal a $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$, com quaisquer escalares k_1 e k_2.

44. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não nulos no espaço bi ou tridimensional e sejam $k = \|\mathbf{u}\|$ e $l = \|\mathbf{v}\|$. Mostre que o vetor $\mathbf{w} = l\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ bissecta o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

45. Prove a parte (*a*) do Teorema 3.3.4.

46. É possível ter

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{a}?$$

Explique seu raciocínio.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Os vetores $(3, -1, 2)$ e $(0, 0, 0)$ são ortogonais.

(b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores ortogonais, então dados quaisquer escalares não nulos r e s, os vetores $r\mathbf{u}$ e $s\mathbf{v}$ são ortogonais.

(c) A projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{a}$ é perpendicular ao componente vetorial de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{a}$.

(d) Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ forem vetores ortogonais, então dado qualquer vetor não nulo $\mathbf{u}$, temos

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}(\text{proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$$

(e) Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{u}$ forem vetores não nulos, temos

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}(\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})) = \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$$

(f) Se a relação

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{v}$$

for válida com algum vetor não nulo $\mathbf{a}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(g) Dados vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ quaisquer, vale

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

3.4 A geometria de sistemas lineares

Nesta seção, utilizamos métodos paramétricos e vetoriais para estudar sistemas gerais de equações lineares. Nosso trabalho nos permitirá interpretar conjuntos de soluções de sistemas lineares em n incógnitas como objetos geométricos em R^n, da mesma forma que interpretamos conjuntos de soluções de sistemas lineares em duas e três incógnitas com pontos, retas e planos em R^2 e R^3.

Equações paramétricas e vetoriais de retas em R^2 e R^3

Na seção anterior, deduzimos as equações de retas e planos determinados por um ponto e um vetor normal. Contudo, há outras maneiras úteis de especificar retas e planos. Por exemplo, uma reta em R^2 ou R^3 é determinada de maneira única por um ponto $\mathbf{x}_0$ na reta e um vetor não nulo $\mathbf{v}$ paralelo à reta, e um plano em R^3 é determinado de maneira única por um ponto $\mathbf{x}_0$ no plano e dois vetores não nulos $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ paralelos ao plano. A melhor maneira de visualizar isso é transladar os vetores de tal modo que seus pontos iniciais sejam $\mathbf{x}_0$ (Figura 3.4.1).

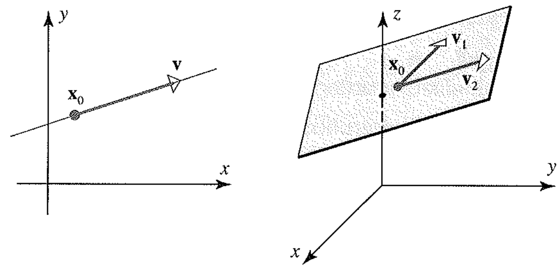


Figura 3.4.1

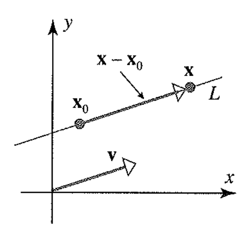


Figura 3.4.2

Comecemos com a dedução de uma equação para a reta L que contém o ponto $\mathbf{x}_0$ e é paralela a $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{x}$ for um ponto qualquer dessa reta, então, conforme ilustrado na Figura 3.4.2, o vetor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ será algum múltiplo escalar de $\mathbf{v}$, digamos,

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\mathbf{v} \quad \text{ou, equivalentemente, } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

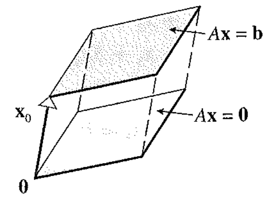
À medida que a variável t (denominada ***parâmetro***) varia de $-\infty$ a ∞, o ponto $\mathbf{x}$ percorre toda a reta L. Dessa forma, obtemos o resultado seguinte.

Reciprocamente, seja $\mathbf{x}$ uma solução qualquer de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para mostrar que $\mathbf{x}$ está no conjunto $\mathbf{x}_0 + W$, devemos mostrar que $\mathbf{x}$ pode ser escrito da forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{w} \tag{22}$$

em que $\mathbf{w}$ está em W (ou seja, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Isso pode ser feito tomando $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Esse vetor obviamente satisfaz (22) e está em W, pois

$$A\mathbf{w} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$



▲ **Figura 3.4.7** O conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é a translação do espaço das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Observação O Teorema 3.4.4 tem uma interpretação geométrica útil ilustrada na Figura 3.4.7. Interpretando a adição vetorial como uma translação, como na Seção 3.1, o teorema afirma que se $\mathbf{x}_0$ for qualquer solução específica de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então *todo* o conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser obtido transladando o conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pelo vetor $\mathbf{x}_0$.

Revisão de conceitos

- Parâmetros
- Equações paramétricas de retas
- Equações paramétricas de planos
- Equações vetoriais de dois pontos de uma reta
- Equações vetoriais de uma reta
- Equações vetoriais de um plano

Aptidões desenvolvidas

- Expressar as equações de retas em R^2 e R^3 usando equações vetoriais ou paramétricas.
- Expressar as equações de planos em R^n usando equações vetoriais ou paramétricas.
- Expressar a equação de uma reta contendo dois pontos em R^2 ou R^3 usando equações vetoriais ou paramétricas.
- Encontrar as equações de uma reta ou segmento de reta.
- Verificar a ortogonalidade dos vetores linha de um sistema de equações lineares e um vetor solução.
- Usar uma solução específica do sistema não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e a solução geral do correspondente sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para obter a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Conjunto de exercícios 3.4

Nos Exercícios **1–4**, encontre equações vetoriais e paramétricas da reta contendo o ponto e paralela ao vetor.

1. Ponto: $(-4, 1)$; vetor: $\mathbf{v} = (0,-8)$

2. Ponto: $(2, -1)$; vetor: $\mathbf{v} = (-4, -2)$

3. Ponto: $(0, 0, 0)$; vetor: $\mathbf{v} = (-3, 0, 1)$

4. Ponto: $(-9, 3, 4)$; vetor: $\mathbf{v} = (-1, 6, 0)$

Nos Exercícios **5–8**, use a equação da reta dada para encontrar um ponto na reta e um vetor paralelo à reta.

5. $\mathbf{x} = (3 - 5t, -6 - t)$ **6.** $(x, y, z) = (4t, 7, 4 + 3t)$

7. $\mathbf{x} = (1 - t)(4, 6) + t(-2, 0)$

8. $\mathbf{x} = (1 - t)(0, -5, 1)$

Nos Exercícios **9–12**, encontre equações vetoriais e paramétricas do plano contendo o ponto e paralelo aos vetores.

9. Ponto: $(-3, 1, 0)$; vetores: $\mathbf{v}_1 = (0, -3, 6)$ e $\mathbf{v}_2 = (-5, 1, 2)$

10. Ponto: $(0, 6, -2)$; vetores: $\mathbf{v}_1 = (0, 9, -1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, -3, 0)$

11. Ponto: $(-1, 1, 4)$; vetores: $\mathbf{v}_1 = (6, -1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, 3, 1)$

12. Ponto: $(0, 5, -4)$; vetores: $\mathbf{v}_1 = (0, 0, -5)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -3, -2)$

Nos Exercícios **13–14**, encontre equações vetoriais e paramétricas da reta em R^2 que passa pela origem e é ortogonal a $\mathbf{v}$.

13. $\mathbf{v} = (-2, 3)$ **14.** $\mathbf{v} = (1, -4)$

Nos Exercícios **15–16**, encontre equações vetoriais e paramétricas do plano em R^3 que passa pela origem e é ortogonal a $\mathbf{v}$.

15. $\mathbf{v} = (4, 0, -5)$ [*Sugestão*: construa dois vetores não paralelos ortogonais a $\mathbf{v}$ em R^3.]

16. $\mathbf{v} = (3, 1, -6)$

Nos Exercícios **17–20**, encontre a solução geral do sistema linear e confirme que os vetores linha da matriz de coeficientes são ortogonais aos vetores solução.

17. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

21. (a) A equação $x + y + z = 1$ pode ser vista como um sistema linear de uma equação em três incógnitas. Expresse uma solução geral dessa equação como uma solução particular somada com uma solução geral do sistema homogêneo associado.

(b) Dê uma interpretação geométrica do resultado da parte (a).

22. (a) A equação $x + y = 1$ pode ser vista como um sistema linear de uma equação em duas incógnitas. Expresse uma solução geral dessa equação como uma solução particular somada com uma solução geral do sistema homogêneo associado.

(b) Dê uma interpretação geométrica do resultado da parte (a).

23. (a) Encontre um sistema linear homogêneo de duas equações em três incógnitas cujo espaço de soluções consista em todos os vetores em R^3 ortogonais a $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{b} = (-2, 3, 0)$.

(b) O espaço das soluções é que tipo de objeto geométrico?

(c) Encontre uma solução geral do sistema obtido na parte (a) e confirme a validade do Teorema 3.4.3.

24. (a) Encontre um sistema linear homogêneo de duas equações em três incógnitas cujo espaço de soluções consista em todos os vetores em R^3 ortogonais a $\mathbf{a} = (-3, 2, -1)$ e $\mathbf{b} = (0, -2, -2)$.

(b) O espaço das soluções é que tipo de objeto geométrico?

(c) Encontre uma solução geral do sistema obtido na parte (a) e confirme a validade do Teorema 3.4.3.

25. Considere os sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre uma solução geral do sistema homogêneo.

(b) Confirme que $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ é uma solução do sistema não homogêneo.

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para encontrar uma solução geral do sistema não homogêneo.

(d) Confira sua resposta na parte (c) resolvendo diretamente o sistema não homogêneo.

26. Considere os sistemas lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre uma solução geral do sistema homogêneo.

(b) Confirme que $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ é uma solução do sistema não homogêneo.

(c) Use os resultados das partes (a) e (b) para encontrar uma solução geral do sistema não homogêneo.

(d) Confira sua resposta na parte (c) resolvendo diretamente o sistema não homogêneo.

Nos Exercícios 27–28, encontre uma solução geral do sistema e use essa solução para encontrar uma solução geral do sistema homogêneo associado e uma solução particular do sistema dado.

27. $$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

28. $$\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A equação vetorial de uma reta pode ser determinada a partir de um ponto qualquer na reta e um vetor não nulo paralelo à reta.

(b) A equação vetorial de um plano pode ser determinada a partir de um ponto qualquer no plano e um vetor não nulo paralelo ao plano.

(c) Todos os pontos de uma reta pela origem em R^2 ou R^3 são múltiplos escalares de qualquer vetor não nulo na reta.

(d) Todos os vetores solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ são ortogonais aos vetores linha da matriz A se, e só se, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

(e) A solução geral do sistema linear não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser obtida somando $\mathbf{b}$ à solução geral do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(f) Se $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são duas soluções do sistema linear não homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ é uma solução do sistema linear homogêneo correspondente.

de volume positivo, decorre de (9) que $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = 0$ se, e só se, os vetores **u**, **v** e **w** estão num mesmo plano. Assim, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 3.5.5 *Se os vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *tiverem o mesmo ponto inicial, então esses vetores são coplanares se, e só se,*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Revisão de conceitos

- Produto vetorial de dois vetores
- Produto vetorial em forma de determinante
- Produto misto

Aptidões desenvolvidas

- Calcular o produto vetorial de dois vetores **u** e **v** em R^3.
- Conhecer as relações geométricas entre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, **u** e **v**.
- Conhecer as propriedades do produto vetorial (listadas no Teorema 3.5.2).
- Calcular o produto misto de três vetores no espaço tridimensional.
- Conhecer a interpretação geométricas do produto misto.
- Calcular as áreas de triângulos e paralelogramos determinados por dois vetores ou três pontos nos espaços bi e tridimensional.
- Usar o produto misto para determinar se três vetores no espaço tridimensional são colineares ou não.

Conjunto de exercícios 3.5

Nos Exercícios 1–2, sejam $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, -3)$. Em cada parte, calcule o vetor indicado.

1. (a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

2. (a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$ (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

Nos Exercícios 3–6, use o produto vetorial para encontrar um vetor que seja ortogonal a **u** e **v**.

3. $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$

4. $\mathbf{u} = (1, 1, -2)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$

5. $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$

6. $\mathbf{u} = (3, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 4, 2)$

Nos Exercícios 7–10, encontre a área do paralelogramo determinado pelos vetores **u** e **v** dados.

7. $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$

8. $\mathbf{u} = (3, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (6, -2, 8)$

9. $\mathbf{u} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, -2)$

10. $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 2, -5)$

Nos Exercícios 11–12, encontre a área do paralelogramo com os vértices dados.

11. $P_1(1, 2), P_2(4, 4), P_3(7, 5), P_4(4, 3)$

12. $P_1(3, 2), P_2(5, 4), P_3(9, 4), P_4(7, 2)$

Nos Exercícios 13–14, encontre a área do triângulo com os vértices dados.

13. $A\,(2, 0), B\,(3, 4), C\,(-1, 2)$

14. $A\,(1, 1), B\,(2, 2), C\,(3, -3)$

Nos Exercícios 15–16, encontre a área do triângulo no espaço tridimensional com os vértices dados.

15. $P_1(2, 6, -1), P_2(1, 1, 1), P_3(4, 6, 2)$

16. $P\,(1, -1, 2), Q\,(0, 3, 4), R\,(6, 1, 8)$

Nos Exercícios 17–18, encontre o volume do paralelepípedo de arestas **u**, **v** e **w**.

17. $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$

18. $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 4)$

Nos Exercícios 19–20, determine se **u**, **v** e **w** são coplanares desde que posicionados com seus pontos iniciais coincidindo.

19. $\mathbf{u} = (-1, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (5, -4, 0)$

20. $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (4, -1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$

Nos Exercícios 21–24, calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

21. $\mathbf{u} = (-2, 0, 6)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 1)$, $\mathbf{w} = (-5, -1, 1)$

22. $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (-1, 2, 5)$

23. $\mathbf{u} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, b, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, c)$

24. $\mathbf{u} = (3, -1, 6)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$, $\mathbf{w} = (5, -1, 2)$

Nos Exercícios 25–26, em cada parte calcule a expressão, supondo que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$.

25. (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

26. (a) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$

27. (a) Obtenha a área do triângulo de vértices $A(1, 0, 1)$, $B(0, 2, 3)$ e $C(2, 0, 1)$.

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a altura do vértice C ao lado AB.

28. Use o produto vetorial para encontrar o seno do ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$ e $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$.

29. Simplifique $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

30. Sejam $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ e $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$. Mostre que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

31. Sejam **u**, **v** e **w** vetores não nulos com o mesmo ponto inicial no espaço tridimensional, mas tais que dois quaisquer não são colineares. Mostre que

(a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está no plano determinado por **v** e **w**.

(b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ está no plano determinado por **u** e **v**.

32. Em cada parte, prove a identidade.

(a) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

33. Prove: Se **a**, **b**, **c** e **d** estão num mesmo plano, então $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$.

34. Prove: Se θ for o ângulo entre **u** e **v** e se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, então $\operatorname{tg} \theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| / (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

35. Mostre que se **u**, **v** e **w** forem vetores em R^3 que não são dois a dois colineares, então $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está no plano determinado por **v** e **w**.

36. É um teorema da Geometria Sólida que o volume de um tetraedro é dado por $\frac{1}{3}$ (área da base) $\cdot$ (altura). Use esse resultado para provar que o volume de um tetraedro cujos lados são os vetores **a**, **b** e **c** é $\frac{1}{6}|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ (ver figura).

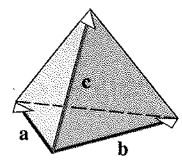


Figura Ex-36

37. Em cada parte, use o resultado do Exercício 36 para encontrar o volume do tetraedro de vértices P, Q, R e S.

(a) $P(-1, 2, 0)$, $Q(2, 1, -3)$, $R(1, 1, 1)$, $S(3, -2, 3)$

(b) $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, -1)$, $R(3, 4, 0)$, $S(-1, -3, 4)$

38. Prove a parte (*d*) do Teorema 3.5.1. [*Sugestão*: prove o resultado primeiro no caso $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$, depois no caso $\mathbf{w} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e, por último, no caso $\mathbf{w} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Finalmente, prove no caso de um vetor arbitrário $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ escrevendo $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$.]

39. Prove a parte (*e*) do Teorema 3.5.1. [*Sugestão*: aplique a parte (*a*) do Teorema 3.5.2 ao resultado da parte (*d*) do Teorema 3.5.1.]

40. Prove

(a) a parte (*b*) do Teorema 3.5.2.

(b) a parte (*c*) do Teorema 3.5.2.

(c) a parte (*d*) do Teorema 3.5.2.

(d) a parte (*e*) do Teorema 3.5.2.

(e) a parte (*f*) do Teorema 3.5.2.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O produto vetorial de dois vetores não nulos **u** e **v** é um vetor não nulo se, e só se, **u** e **v** não forem paralelos.

(b) Um vetor normal a um plano pode ser obtido tomando o produto vetorial de dois vetores não nulos e não colineares que estão no plano.

(c) O produto misto de **u**, **v** e **w** determina um vetor cujo comprimento é igual ao volume do paralelepípedo determinado por **u**, **v** e **w**.

(d) Se **u** e **v** forem vetores do espaço tridimensional, então $\|\mathbf{v} \times \mathbf{u}\|$ é igual à área do paralelogramo determinado por **u** e **v**.

(e) Dados vetores **u**, **v** e **w** quaisquer do espaço tridimensional, os vetores $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ são iguais.

(f) Se **u**, **v** e **w** forem vetores em R^3, com **u** não nulo e $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, então $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Capítulo 3 Exercícios suplementares

1. Sejam $\mathbf{u} = (-2, 0, 4)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 6)$ e $\mathbf{w} = (2, -5, -5)$. Calcule

(a) $3\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$ (b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

(c) a distância ente $-3\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$.

(d) $\text{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}$ (e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(f) $(-5\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w})$

2. Repita o Exercício 1 com os vetores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = -\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

3. Repita as partes (a)–(d) do Exercício 1 com os vetores $\mathbf{u} = (-2, 6, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, 0, 8, 0)$ e $\mathbf{w} = (9, 1, -6, -6)$.

4. Repita as partes (a)–(d) do Exercício 1 com os vetores $\mathbf{u} = (0, 5, 0, -1, -2)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 6, -2, 0)$ e $\mathbf{w} = (-4, -1, 4, 0, 2)$

Nos Exercícios 5–6, determine se o conjunto de vetores dado é ortogonal. Se for, normalize cada vetor para formar um conjunto ortonormal.

5. $(-32, -1, 19)$, $(3, -1, 5)$, $(1, 6, 2)$

6. $(-2, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, -5, 2)$

7. (a) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos os vetores em R^2 ortogonais a um vetor não nulo?

(b) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos os vetores em R^3 ortogonais a um vetor não nulo?

(c) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos os vetores em R^2 ortogonais a dois vetores não colineares?

(d) Que tipo de objeto geométrico é o conjunto de todos os vetores em R^3 ortogonais a dois vetores não colineares?

8. Mostre que $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ são vetores ortonormais e encontre um terceiro vetor $\mathbf{v}_3$ com o qual o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é ortonormal.

9. *Verdadeiro ou falso*: se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem vetores não nulos tais que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.

10. *Verdadeiro ou falso*: se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

11. Considere os pontos $P(3, -1, 4)$, $Q(6, 0, 2)$ e $R(5, 1, 1)$. Encontre o ponto S em R^3 cujo primeiro componente seja -1 e tal que $\overrightarrow{PQ}$ seja paralelo a $\overrightarrow{RS}$.

12. Considere os pontos $P(-3, 1, 0, 6)$, $Q(0, 5, 1, -2)$ e $R(-4, 1, 4, 0)$. Encontre o ponto S em R^4 cujo terceiro componente seja 6 e tal que $\overrightarrow{PQ}$ seja paralelo a $\overrightarrow{RS}$.

13. Usando os pontos do Exercício 11, encontre o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.

14. Usando os pontos do Exercício 12, encontre o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.

15. Encontre a distância entre o ponto $P(-3, 1, 3)$ e o plano $5x + z = 3y - 4$.

16. Mostre que os planos $3x - y + 6z = 7$ e $-6x + 2y - 12z = 1$ são paralelos e encontre a distância entre eles.

Nos Exercícios 17–22, encontre equações vetoriais e paramétricas da reta ou plano dados.

17. O plano em R^3 que contém os pontos $P(-2, 1, 3)$, e $Q(-1, -1, 1)$ e $R(3, 0, -2)$.

18. A reta em R^3 que contém o ponto $P(-1, 6, 0)$ e é ortogonal ao plano $4x - z = 5$.

19. A reta em R^2 que é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (8, -1)$ e contém o ponto $P(0, -3)$.

20. O plano em R^3 que contém o ponto $P(-2, 1, 0)$ e é paralelo ao plano $-8x + 6y - z = 4$.

21. A reta em R^2 de equação $y = 3x - 5$.

22. O plano em R^3 de equação $2x - 6y + 3z = 5$.

Nos Exercícios 23–25, encontre uma equação ponto-normal do plano dado.

23. O plano representado pela equação vetorial $(x, y, z) = (-1, 5, 6) + t_1(0, -1, 3) + t_2(2, -1, 0)$.

24. O plano que contém o ponto $P(-5, 1, 0)$ e é ortogonal à reta de equações paramétricas $x = 3 - 5t$, $y = 2t$ e $z = 7$.

25. O plano que passa pelos pontos $P(9, 0, 4)$, $Q(-1, 4, 3)$ e $R(0, 6, -2)$.

26. Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ sejam dois conjuntos de vetores tais que $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{w}_j$ são ortogonais, com quaisquer i e j. Prove que se a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 são escalares quaisquer, então os vetores $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w} = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2$ são ortogonais.

27. Prove que se dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^2 forem ortogonais a um terceiro vetor não nulo $\mathbf{w}$ em R^2, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são múltiplos escalares um do outro.

28. Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ se, e só se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores paralelos.

29. Se A e B não forem ambos nulos, então a equação $Ax + By = 0$ representa uma reta pela origem em R^2. O que representa essa equação em R^3, se pensarmos nela como sendo $Ax + By + 0z = 0$? Explique.