Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma dada equação é linear.
- Determinar se uma dada ênupla é uma solução de um sistema linear.
- Encontrar a matriz aumentada de um sistema linear.
- Encontrar o sistema linear correspondente a uma dada matriz aumentada.
- Efetuar operações elementares com as linhas de um sistema linear e as correspondentes nas linhas da matriz aumentada.
- Determinar se um sistema linear é consistente ou inconsistente.
- Encontrar o conjunto das soluções de um sistema linear consistente.

Conjunto de exercícios 1.1

1. Em cada parte, determine se a equação é linear em x_1, x_2 e x_3.

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$ (b) $x_1 + 3x^2 + x_1x_3 = 2$

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$ (d) $x_1^{-2} + x^2 + 8x_3 = 5$

(e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$

(f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

2. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 2 \\ 3x - \frac{2}{y} &= 0 \end{aligned}$$ (b) $$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

3. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad - x_4 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x_1 + x_3) &= \sqrt{5} \\ e^{-2x_2-2x_4} &= \frac{1}{x_2} \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3x_4 &= 3 \\ -x_1 + 5x_2 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$ (d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

4. Para cada sistema do Exercício 2 que for linear, determine se é consistente.

5. Para cada sistema do Exercício 3 que for linear, determine se é consistente.

6. Escreva um sistema de equações lineares constituído de três equações em três incógnitas com

(a) nenhuma solução

(b) exatamente uma solução

(c) uma infinidade de soluções

7. Em cada parte, determine se o terno ordenado dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) $(3, 1, 1)$ (b) $(3, -1, 1)$ (c) $(13, 5, 2)$

(d) $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ (e) $(17, 7, 5)$

8. Em cada parte, determine se o terno ordenado dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(a) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$ (b) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right)$ (c) $(5, 8, 1)$

(d) $\left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}\right)$ (e) $\left(\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, 2\right)$

9. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $7x - 5y = 3$

(b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

10. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

(b) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

11. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

12. Em cada parte, encontre um sistema de equações lineares correspondente à matriz aumentada dada.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -6 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & 1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

(a) $\begin{aligned} -2x_1 &= 6 \\ 3x_1 &= 8 \\ 9x_1 &= -3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 6x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_2 \qquad - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad &= -1 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$

(d) $x_1 - x_5 = 7$

14. Em cada parte, encontre a matriz aumentada do sistema de equações lineares dado.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \qquad - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 \qquad &= 1 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$

15. A curva $y = ax^2 + bx + c$ mostrada na figura passa pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3). Mostre que os coeficientes a, b e c são uma solução do sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{bmatrix}$$

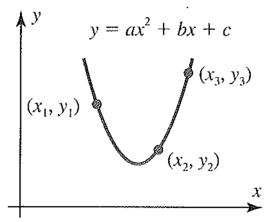


Figura Ex-15

16. Explique por que cada uma das operações elementares com linhas não afeta o conjunto das soluções de um sistema linear.

17. Mostre que se as equações lineares

$$x_1 + kx_2 = c \quad \text{e} \quad x_1 + lx_2 = d$$

têm o mesmo conjunto de soluções, então as duas equações são idênticas (isto é, $k = l$ e $c = d$).

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um sistema linear cujas equações são todas homogêneas deve ser consistente.

(b) Multiplicar uma equação inteira por zero é uma operação elementar com as linhas aceitável.

(c) O sistema linear

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

não pode ter uma única solução, independentemente do valor de k.

(d) Uma equação linear só, com duas ou mais incógnitas, sempre deve ter uma infinidade de soluções.

(e) Se o número de equações de um sistema linear exceder o número de incógnitas, então o sistema deve ser inconsistente.

(f) Se cada equação de um sistema linear consistente for multiplicada por uma constante c, então todas as soluções do novo sistema podem ser obtidas multiplicando as soluções do sistema original por c.

(g) As operações elementares com linhas permitem que uma equação de um sistema linear seja subtraída de uma outra.

(h) O sistema linear de matriz aumentada correspondente

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é consistente.

computadores em geral aproximam os números e, com isso, introduzem erros de ***arredondamento***; esses erros podem se propagar em contas sucessivas e podem acabar corrompendo uma resposta a ponto de torná-la inútil, a menos que sejam tomadas precauções. Os algoritmos (procedimentos) em que isso pode ocorrer são ditos ***instáveis***. Existem várias técnicas para minimizar os erros de arredondamento e a instabilidade. Por exemplo, pode ser mostrado que, para sistemas lineares grandes, a eliminação de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais de operações do que a eliminação gaussiana; por isso, a maioria dos algoritmos de computador tem por base a eliminação gaussiana. Alguns desses tópicos serão considerados no Capítulo 9.

Revisão de conceitos

- Forma escalonada reduzida por linhas
- Forma escalonada por linhas
- Pivô
- Variável líder
- Variável livre
- Solução geral de um sistema linear
- Eliminação gaussiana
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Fase direta, para frente
- Fase inversa, para trás
- Sistema linear homogêneo
- Solução trivial
- Solução não trivial
- Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos
- Retrossubstitução

Aptidões desenvolvidas

- Reconhecer se uma dada matriz está em forma escalonada, forma escalonada reduzida ou nenhuma dessas.
- Construir soluções de sistemas lineares cuja matriz aumentada correspondente está em forma escalonada ou escalonada reduzida.
- Usar a eliminação gaussiana para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Usar a eliminação de Gauss-Jordan para encontrar a solução geral de um sistema linear.
- Analisar sistemas lineares homogêneos usando o teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos.

Conjunto de exercícios 1.2

1. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, em forma escalonada reduzida, ambas ou nenhuma.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 5–8, resolva o sistema linear por eliminação de Gauss-Jordan.

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \qquad\qquad - 3w &= -3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

Nos Exercícios 9–12, resolva o sistema linear por eliminação gaussiana.

9. Exercício 5 **10.** Exercício 6

11. Exercício 7 **12.** Exercício 8

Nos Exercícios 13–16, sem utilizar papel e lápis, determine se o sistema homogêneo tem soluções não triviais.

13. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

Nos Exercícios 17–24, resolva o sistema linear dado por qualquer método.

17. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w \qquad - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \\ - 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 \qquad - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 \qquad - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 \qquad + Z_5 &= 0 \end{aligned}$

Nos Exercícios 25–28, determine os valores de a com os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução ou tem uma infinidade de soluções.

25. $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y - (a^2 - 3)z &= a \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + (a^2 - 5)y &= a - 1 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z &= 3a \end{aligned}$

Nos Exercícios 29–30, resolva o sistema dado, em que a, b e c são constantes.

29.
$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

31. Encontre duas formas escalonadas por linha diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Esse exercício mostra que uma matriz pode ter formas escalonadas distintas.

32. Reduza

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada reduzida sem introduzir frações em estágios intermediários.

33. Mostre que o sistema não linear a seguir tem 18 soluções se $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha + 2\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha + 5\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha - 5\cos\beta + 5\tan\gamma &= 0 \end{aligned}$$

[*Sugestão*: comece com as substituições $x = \operatorname{sen} \alpha$, $y = \cos\beta$, e $z = \tan\gamma$.]

34. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares nos ângulos incógnitos α, β e γ, com $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 4 \operatorname{sen} \alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 2 \\ 6 \operatorname{sen} \alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

35. Resolva o seguinte sistema de equações não lineares para x, y e z.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 &= 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 &= 3 \end{aligned}$$

[*Sugestão*: comece com as substituições $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$.]

36. Resolva o sistema a seguir para x, y e z.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} &= 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 5 \end{aligned}$$

37. Encontre os coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura seja o gráfico da equação $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

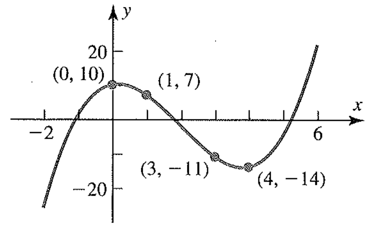


Figura Ex-37

38. Encontre os coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura seja dada pela equação $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.

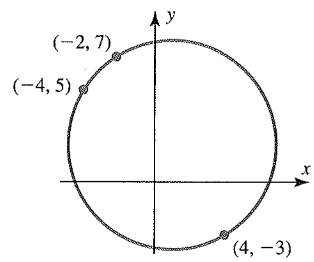


Figura Ex-38

39. Se o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 0 \end{aligned}$$

tiver somente a solução trivial, o que pode ser dito sobre as soluções do sistema a seguir?

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 3 \\ a_2x - b_2y + c_2z &= 7 \\ a_3x + b_3y - c_3z &= 11 \end{aligned}$$

40. (a) Se A for uma matriz com três linhas e cinco colunas, qual é o número máximo possível de pivôs em sua forma escalonada reduzida?

(b) Se B for uma matriz com três linhas e seis colunas, cuja última coluna só tem zeros, qual é o número máximo possível de parâmetros da solução geral do sistema linear cuja matriz aumentada é B?

(c) Se C for uma matriz com cinco linhas e três colunas, qual é o número mínimo possível de linhas inteiras de zeros em qualquer forma escalonada de C?

41. (a) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

tem exatamente uma solução.

42. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

Discuta as posições relativas das retas $ax + by = 0$ e $cx + dy = 0$ e $ex + fy = 0$ se (a) o sistema tiver apenas a solução trivial e (b) o sistema tiver soluções não triviais.

43. Descreva todas as formas escalonadas reduzidas possíveis de

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se uma matriz estiver em forma escalonada reduzida por linhas, então também estará em forma escalonada por linhas.

(b) Se efetuarmos uma operação elementar com as linhas de uma matriz em forma escalonada, a matriz resultante ainda estará em forma escalonada.

(c) Cada matriz tem uma única forma escalonada por linhas.

(d) Um sistema linear homogêneo em n incógnitas cuja matriz aumentada correspondente tem uma forma escalonada reduzida com r pivôs tem $n - r$ variáveis livres.

(e) Todos os pivôs de uma matriz em forma escalonada por linhas devem ocorrer em colunas distintas.

(f) Se cada coluna de uma matriz em forma escalonada por linhas tiver um pivô, então cada entrada que não for um pivô será nula.

(g) Se um sistema linear homogêneo de n equações em n incógnitas tiver uma matriz aumentada correspondente com uma forma escalonada reduzida com n pivôs, então o sistema linear só tem a solução trivial.

(h) Se a forma escalonada reduzida de uma matriz aumentada de um sistema linear tiver uma linha de zeros, então o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

(i) Se um sistema linear tem mais incógnitas do que equações, então o sistema deve ter uma infinidade de soluções.

1.3 Matrizes e operações matriciais

Coleções retangulares de números reais aparecem em muitos contextos, não só como a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Nesta seção, começamos a estudar matrizes como objetos independentes, definindo sobre elas as operações de adição, subtração e multiplicação.

Notação e terminologia matricial

Na Seção 1.2, usamos coleções retangulares de números, denominadas *matrizes aumentadas*, para abreviar a escrita de sistemas de equações lineares. Contudo, essas coleções retangulares de números ocorrem também em outros contextos. Por exemplo, a seguinte coleção retangular de três linhas e sete colunas pode descrever o número de horas que um estudante gastou estudando três matérias numa certa semana.

	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sáb.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

Suprimindo os títulos, ficamos com a seguinte coleção retangular de números com três linhas e sete colunas, denominada "matriz".

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mais geralmente, fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 8 Se A for uma matriz quadrada, então o ***traço de A***, denotado por $\operatorname{tr}(A)$, é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não for uma matriz quadrada.

▶ EXEMPLO 11 Traço de uma matriz

Alguns exemplos de matrizes e seus traços são os seguintes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad \operatorname{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11 \quad ◀$$

Nos exercícios, desenvolvemos alguma prática com as operações de transposição e traço.

Revisão de conceitos

- Matriz
- Entradas
- Vetor coluna (ou matriz coluna)
- Vetor linha (ou matriz linha)
- Matriz quadrada
- Diagonal principal
- Matrizes iguais
- Operações matriciais: soma, diferença, multiplicação por escalar
- Combinação linear de matrizes
- Produto de matrizes (multiplicação matricial)
- Matriz em blocos
- Submatrizes
- Método linha-coluna
- Método das colunas
- Método das linhas
- Matriz de coeficientes de um sistema linear
- Transposta
- Traço

Aptidões desenvolvidas

- Determinar o tamanho de uma dada matriz.
- Identificar os vetores linha e coluna de uma dada matriz.
- Efetuar as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação por escalar e produto de matrizes.
- Determinar se está definido o produto de duas matrizes.
- Calcular um produto matricial usando os métodos linha-coluna, das colunas e das linhas.
- Expressar o produto de uma matriz com um vetor coluna como uma combinação linear das colunas da matriz.
- Expressar um sistema linear como uma equação matricial e identificar a matriz de coeficientes.
- Calcular a transposta de uma matriz.
- Calcular o traço de uma matriz quadrada.

Conjunto de exercícios 1.3

1. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes de tamanhos

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$

(d) $AB + B$ (e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$

(g) E^TA (h) $(A^T + E)D$

2. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes de tamanhos

A	B	C	D	E
(3×1)	(3×6)	(6×2)	(2×6)	(1×3)

Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) EA (b) AB^T (c) $B^T(A + E^T)$
(d) $2A + C$ (e) $(C^T + D)B^T$ (f) $CD + B^T E^T$
(g) $(BD^T)C^T$ (h) $DC + EA$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $D + E$ (b) $D - E$ (c) $5A$
(d) $-7C$ (e) $2B - C$ (f) $4E - 2D$
(g) $-3(D + 2E)$ (h) $A - A$ (i) $\operatorname{tr}(D)$
(j) $\operatorname{tr}(D - 3E)$ (k) $4\operatorname{tr}(7B)$ (l) $\operatorname{tr}(A)$

4. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $2A^T + C$ (b) $D^T - E^T$ (c) $(D - E)^T$
(d) $B^T + 5C^T$ (e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$ (f) $B - B^T$
(g) $2E^T - 3D^T$ (h) $(2E^T - 3D^T)^T$ (i) $(CD)E$
(j) $C(BA)$ (k) $\operatorname{tr}(DE^T)$ (l) $\operatorname{tr}(BC)$

5. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) AB (b) BA (c) $(3E)D$
(d) $(AB)C$ (e) $A(BC)$ (f) CC^T
(g) $(DA)^T$ (h) $(C^TB)A^T$ (i) $\operatorname{tr}(DD^T)$
(j) $\operatorname{tr}(4E^T - D)$ (k) $\operatorname{tr}(C^TA^T + 2E^T)$ (l) $\operatorname{tr}((EC^T)^TA)$

6. Usando as matrizes do Exercício 3, em cada parte, calcule a expressão dada (se possível).

(a) $(2D^T - E)A$ (b) $(4B)C + 2B$
(c) $(-AC)^T + 5D^T$ (d) $(BA^T - 2C)^T$
(e) $B^T(CC^T - A^TA)$ (f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira linha de AB. (b) a terceira linha de AB.
(c) a segunda coluna de AB. (d) a primeira coluna de BA.
(e) a terceira linha de AA. (f) a terceira coluna de AA.

8. Usando as matrizes do Exercício 7, use o método das linhas ou das colunas (como for apropriado) para encontrar

(a) a primeira coluna de AB.
(b) a terceira coluna de BB.
(c) a segunda linha de BB.
(d) a primeira coluna de AA.
(e) a terceira linha de AB.
(f) a primeira linha de BA.

9. Usando as matrizes A e B do Exercício 7,

(a) expresse cada vetor coluna de AA como uma combinação linear dos vetores coluna de A.
(b) expresse cada vetor coluna de BB como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

10. Usando as matrizes A e B do Exercício 7,

(a) expresse cada vetor coluna de AB como uma combinação linear dos vetores coluna de A.
(b) expresse cada vetor coluna de BA como uma combinação linear dos vetores coluna de B.

11. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \qquad - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

12. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e escreva essa equação matricial.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 \qquad &= 0 \\ - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 15–16, encontre todos os valores de k, se houver, que satisfazem a equação.

15. $\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix} = 0$

Nos Exercícios 17–18, resolva a equação matricial em termos de a, b, c e d.

17. $\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d-2c \\ d+2c & -2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

19. Sejam A uma matriz $m \times n$ e 0 a matriz $m \times n$ com todas as entradas nulas. Mostre que se $kA = 0$, então $k = 0$ ou $A = 0$.

20. (a) Mostre que se os produtos AB e BA estiverem ambos definidos, então AB e BA são matrizes quadradas.

(b) Mostre que se A for uma matriz $m \times n$ e $A(BA)$ estiver definida, então B é uma matriz $n \times m$.

21. Prove que se A e B são matrizes $n \times n$, então

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

22. (a) Mostre que se A tem uma linha de zeros e B é uma matriz qualquer para a qual o produto AB está definido, então AB também tem uma linha de zeros.

(b) Encontre um resultado análogo para uma coluna de zeros.

23. Em cada parte, encontre uma matriz $[a_{ij}]$ de tamanho 6×6 que satisfaz a condição dada. Dê respostas tão gerais quanto possível, usando letras em vez de números para entradas não nulas específicas.

(a) $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ se $i > j$

(c) $a_{ij} = 0$ se $i < j$

(d) $a_{ij} = 0$ se $|i - j| > 1$

24. Em cada parte, encontre a matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho 4×4 cujas entradas satisfazem a condição dada.

(a) $a_{ij} = i + j$ (b) $a_{ij} = i^{j-1}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |i-j| > 1 \\ -1 & \text{se} \quad |i-j| \leq 1 \end{cases}$

25. Considere a função $y = f(x)$ definida com matrizes x de tamanho 2×1 por $y = Ax$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esboce $f(x)$ juntamente com x em cada caso dado. Como você descreveria a ação de f?

(a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

26. Seja I a matriz $n \times n$ cuja entrada na linha i e coluna j é

$$\begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Mostre que $AI = IA = A$, com qualquer matriz $n \times n$ A.

27. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{bmatrix}$$

com quaisquer escolhas de x, y e z?

28. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com quaisquer escolhas de x, y e z?

29. Dizemos que uma matriz B é uma ***raiz quadrada*** de uma matriz A se $BB = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Quantas raízes quadradas distintas você consegue encontrar de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?

(c) Você acha que qualquer matriz 2×2 tem pelo menos uma raiz quadrada? Explique seu raciocínio.

30. Seja 0 a matriz 2×2 com todas as entradas nulas.

(a) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $AA = 0$? Justifique sua resposta.

(b) Existe alguma matriz A de tamanho 2×2 tal que $A \neq 0$ e $AA = A$? Justifique sua resposta.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(o), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ não tem diagonal principal.

(b) Uma matriz $m \times n$ tem m vetores coluna e n vetores linha.

(c) Se A e B forem matrizes 2×2, então $AB = BA$.

(d) O i-ésimo vetor linha de um produto matricial AB pode ser calculado multiplicando A pelo i-ésimo vetor linha de B.

(e) Dada qualquer matriz A, vale $(A^T)^T = A$.

(f) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

(g) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $(AB)^T = A^T B^T$.

(h) Dada qualquer matriz quadrada A, vale $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$.

(i) Se A for uma matriz 6×4 e B uma matriz $m \times n$ tal que $B^T A^T$ é uma matriz 2×6, então $m = 4$ e $n = 2$.

(j) Se A for uma matriz $n \times n$ e c um escalar, então $\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr}(A)$.

(k) Se A, B e C forem matrizes de mesmo tamanho tais que $A - C = B - C$, então $A = B$.

(l) Se A, B e C forem matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AC = BC$, então $A = B$.

(m) Se a soma de matrizes $AB + BA$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas de mesmo tamanho.

(n) Se B tiver uma coluna de zeros, então, sempre que o produto estiver definido, AB também tem.

(o) Se B tiver uma coluna de zeros, então, sempre que o produto estiver definido, BA também tem.

1.4 Inversas; propriedades algébricas das matrizes

Nesta seção, discutimos algumas das propriedades algébricas das operações matriciais. Veremos que muitas das regras básicas da aritmética de números reais também valem para matrizes, mas também que algumas não valem.

Propriedades das adição matricial e multiplicação por escalar

O teorema seguinte lista as propriedades algébricas básicas das operações matriciais.

TEOREMA 1.4.1 Propriedades da aritmética matricial

Supondo que os tamanhos das matrizes sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(*a*) $A + B = B + A$ **[Lei da comutatividade da adição]**

(*b*) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **[Lei da associatividade da adição]**

(*c*) $A(BC) = (AB)C$ **[Lei da associatividade da multiplicação]**

(*d*) $A(B + C) = AB + AC$ **[Lei da distributividade à esquerda]**

(*e*) $(A + B)C = AC + BC$ **[Lei da distributividade à direita]**

(*f*) $A(B - C) = AB - AC$

(*g*) $(B - C)A = BA - CA$

(*h*) $a(B + C) = aB + aC$

(*i*) $a(B - C) = aB - aC$

(*j*) $(a + b)C = aC + bC$

(*k*) $(a - b)C = aC - bC$

(*l*) $a(bC) = (ab)C$

(*m*) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Para provar qualquer uma das igualdades nesse teorema, devemos mostrar que a matriz do lado esquerdo tem o mesmo tamanho que a matriz do lado direito e que as entradas correspondentes dos dois lados são iguais. A maioria das provas segue o mesmo padrão geral, portanto, provamos a parte (d) como amostra. A prova da lei da

Conjunto de exercícios 1. 4

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Mostre que

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $(AB)C = A(BC)$ (c) $(a + b)C = aC + bC$

(d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

(b) $A(B - C) = AB - AC$ (c) $(B + C)A = BA + CA$

(d) $a(bC) = (ab)C$

3. Usando as matrizes e escalares do Exercício 1, verifique que

(a) $(A^T)^T = A$ (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $(aC)^T = aC^T$ (d) $(AB)^T = B^TA^T$

Nos Exercícios 4–7, use o Teorema 1.4.5 para calcular a inversa da matriz dada.

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **5.** $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

6. $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

9. Encontre a inversa de

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

10. Use a matriz A do Exercício 4 para verificar que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

11. Use a matriz B do Exercício 5 para verificar que $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

12. Use as matrizes A e B dos Exercícios 4 e 5 para verificar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

13. Use as matrizes A, B e C dos Exercícios 4 a 6 para verificar que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Nos Exercícios 14–17, use a informação dada para encontrar A.

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **15.** $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

16. $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **17.** $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

18. Seja A a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Em cada parte, calcule a quantidade dada.

(a) A^3 (b) A^{-3} (c) $A^2 - 2A + I$

(d) $p(A)$, onde $p(x) = x - 2$

(e) $p(A)$, onde $p(x) = 2x^2 + x + 1$

(f) $p(A)$, onde $p(x) = x^3 - 2x + 4$

19. Repita o Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Repita as partes (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) e (*f*) do Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

21. Repita as partes (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) e (*f*) do Exercício 18 com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios 22–24, sejam $p_1(x) = x^2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ e $p_3(x) = x - 3$. Mostre que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$, com a matriz dada.

22. A matriz A do Exercício 18.

23. A matriz A do Exercício 21.

24. Uma matriz quadrada A arbitrária.

25. Mostre que se $p(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

26. Mostre que se $p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ae + be - cd)x - a(be - cd)$ e

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{bmatrix}$$

então $p(A) = 0$.

27. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

em que $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Mostre que A é invertível e encontre sua inversa.

28. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfizer $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.

29. (a) Mostre que uma matriz com uma linha de zeros não pode ter uma inversa.

(b) Mostre que uma matriz com uma coluna de zeros não pode ter uma inversa.

30. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$ABC^TDBA^TC = AB^T$$

31. Supondo que todas as matrizes sejam $n \times n$ e invertíveis, resolva para D.

$$C^TB^{-1}A^2BAC^{-1}DA^{-2}B^TC^{-2} = C^T$$

32. Se A for uma matriz quadrada e n um inteiro positivo, será verdade que $(A^n)^T = (A^T)^n$? Justifique sua resposta.

33. Simplifique

$$(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$$

34. Simplifique

$$(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$$

Nos Exercícios 35–37, determine se A é invertível e, se for, encontre sua inversa. [*Sugestão*: resolva $AX = I$ para X igualando entradas correspondentes de ambos lados.]

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **37.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

38. Prove o Teorema 1.4.2.

Nos Exercícios 39–42, use o método do Exemplo 8 para encontrar a única solução do sistema linear dado.

39. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$ **40.** $\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -x_1 - 3x_2 &= 1 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$ **42.** $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned}$

43. Prove a parte (*a*) do Teorema 1.4.1.

44. Prove a parte (*c*) do Teorema 1.4.1.

45. Prove a parte (*f*) do Teorema 1.4.1.

46. Prove a parte (*b*) do Teorema 1.4.2.

47. Prove a parte (*c*) do Teorema 1.4.2.

48. Verifique a Fórmula (4) do texto calculando diretamente.

49. Prove a parte (*d*) do Teorema 1.4.8.

50. Prove a parte (*e*) do Teorema 1.4.8.

51. (a) Mostre que se A for invertível e $AB = AC$, então $B = C$.

(b) Explique por que a parte (a) e o Exemplo 3 não são contraditórios.

52. Mostre que se A for invertível e k um escalar não nulo qualquer, então $(kA)^n = k^nA^n$, com qualquer valor inteiro de n.

53. (a) Mostre que se A, B e $A + B$ forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então

$$A(A^{-1} + B^{-1})B(A + B)^{-1} = I$$

(b) O que o resultado da parte (a) nos diz sobre a matriz $A^{-1} + B^{-1}$?

54. Dizemos que uma matriz A é ***idempotente*** se $A^2 = A$.

(a) Mostre que se A for idempotente, então $I - A$ também é.

(b) Mostre que se A for idempotente, então $2A - I$ é invertível e sua própria inversa.

55. Mostre que se A for uma matriz quadrada tal que $A^k = 0$, com algum inteiro positivo k, então a matriz $I - A$ é invertível e

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(k), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Duas matrizes A e B de tamanho $n \times n$ são inversas uma da outra se, e só se, $AB = BA = 0$.

(b) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(c) Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesmo tamanho, vale $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

(d) Se A e B forem matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e vale $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(e) Se A e B forem matrizes tais que o produto AB está definido, então vale $(AB)^T = A^TB^T$.

(f) A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e só se, $ad - bc \neq 0$

(g) Se A e B forem matrizes de mesmo tamanho e k uma constante, então $(kA + B)^T = kA^T + B^T$.

(h) Se A for uma matriz invertível, então A^T também é invertível.

(i) Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ e I for uma matriz identidade, então $p(I) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.

(j) Uma matriz quadrada com uma linha ou coluna de zeros não pode se invertível.

(k) A soma de duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho sempre é invertível.

Conjunto de exercícios 1.5

1. Em cada parte, decida se a matriz é elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada parte, decida se a matriz é elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, encontre uma operação com linhas e a matriz elementar correspondente que retorna a matriz elementar dada à matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma matriz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, o resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

6. Em cada parte, são dadas uma matriz elementar E e uma matriz A. Escreva as operações elementares com linhas correspondentes a E e mostre que, aplicando essas operações a A, resultado é o produto EA.

(a) $E = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

(b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7–8, use as matrizes a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -6 & 21 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EA = B$ (b) $EB = A$

(c) $EA = C$ (d) $EC = A$

8. Encontre uma matriz elementar E que satisfaça a equação.

(a) $EB = D$ (b) $ED = B$

(c) $EB = F$ (d) $EF = B$

Nos Exercícios 9–24, use o algoritmo de inversão para encontrar a inversa da matriz dada, se essa inversa existir.

9. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 25–26, em cada parte, encontre a inversa da matriz 4×4 dada, em que k_1, k_2, k_3, k_4 e k são todos não nulos.

25. (a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 27–28, encontre todos os valores de c, se houver, com os quais a matriz dada é invertível.

27. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 29–32, escreva a matriz dada como um produto de matrizes elementares.

29. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 33–36, escreva a *inversa* da matriz dada como um produto de matrizes elementares.

33. A matriz do Exercício 29.

34. A matriz do Exercício 30.

35. A matriz do Exercício 31.

36. A matriz do Exercício 32.

Nos Exercícios 37–38, mostre que as matrizes A e B dadas são equivalentes por linhas, e encontre uma sequência de operações elementares com linhas que produza B a partir de A.

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

39. Mostre que, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

for uma matriz elementar, então pelo menos uma das entradas da terceira linha deve ser nula.

40. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível, com qualquer valor das entradas.

41. Prove que se A e B forem matrizes $m \times n$, então A e B são equivalentes por linhas se, e só se, A e B têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.

42. Prove que se A for uma matriz invertível e B for equivalente por linhas a A, então B também é invertível.

43. Mostre que se B for obtida de A por meio de uma sequência de operações elementares com linhas, então existe uma segunda sequência de operações elementares com linhas que, aplicada a B, produz A.

▶ EXEMPLO 4 Determinando consistência por eliminação

Quais condições devem satisfazer b_1, b_2 e b_3 para garantir que o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

seja consistente?

Solução A matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{bmatrix}$$

Reduzindo essa matriz à forma escalonada reduzida por linhas, obtemos (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40b_1 + 16b_2 + 9b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 13b_1 - 5b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 5b_1 - 2b_2 - b_3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Nesse caso, não há restrições sobre b_1, b_2 e b_3, de modo que o sistema tem a única solução

$$x_1 = -40b_1 + 16b_2 + 9b_3, \quad x_2 = 13b_1 - 5b_2 - 3b_3, \quad x_3 = 5b_1 - 2b_2 - b_3 \qquad (3)$$

com quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3. ◀

O que o resultado do Exemplo 4 nos diz sobre a matriz de coeficientes do sistema?

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se um sistema de equações lineares não tem solução, tem exatamente uma solução ou uma infinidade de soluções.
- Resolver sistemas lineares invertendo a matriz de coeficientes.
- Resolver simultaneamente sistemas lineares múltiplos com a mesma matriz de coeficientes.
- Conhecer as condições adicionais de invertibilidade enunciadas no Teorema de Equivalência.

Conjunto de exercícios 1.6

▶ Nos Exercícios 1–8, resolva o sistema invertendo a matriz de coeficientes e usando o Teorema 1.6.2. ◀

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} - x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

▶ Nos Exercícios 9–12, resolva simultaneamente os sistemas lineares reduzindo a matriz aumentada apropriada. ◀

9. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 1, \; b_2 = 4$ (ii) $b_1 = -2, \; b_2 = 5$

10. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 0, \; b_2 = 1, \; b_3 = 0$
(ii) $b_1 = -3, \; b_2 = 4, \; b_3 = -5$

11. $\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

(i) $b_1 = 0, \; b_2 = 1$ (ii) $b_1 = -4, \; b_2 = 6$
(iii) $b_1 = -1, \; b_2 = 3$ (iv) $b_1 = -5, \; b_2 = 1$

12.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

(i) $b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = -1$
(ii) $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1$
(iii) $b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 0$

Nos Exercícios 13–17, determine, se houver, as condições que as constantes b devem satisfazer para garantir a consistência do sistema linear dado.

13.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 6x_1 - 4x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

18. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pode ser reescrita como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e use esse resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$.

(b) Resolva $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

Nos Exercícios 19–20, resolva a equação matricial dada para X.

19.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

20.
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

21. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogêneo de n equações lineares em n incógnitas cuja única solução é a trivial. Mostre que se k for um inteiro positivo qualquer, então o sistema $A^k\mathbf{x} = 0$ também só tem a solução trivial.

22. Sejam $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogêneo de n equações lineares em n incógnitas e Q uma matriz invertível $n \times n$. Mostre que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial se, e só se, $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

23. Sejam $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de equações lineares consistente arbitrário e $\mathbf{x}_1$ uma solução fixada. Mostre que qualquer solução do sistema pode ser escrita na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, em que $\mathbf{x}_0$ é a solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Mostre, também, que qualquer matriz dessa forma é uma solução.

24. Use a parte (a) do Teorema 1.6.3 para provar a parte (b).

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) É impossível que um sistema de equações lineares tenha exatamente duas soluções.

(b) Se A é uma matriz quadrada, e se o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução, então o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ também tem uma única solução.

(c) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $AB = I_n$, então $BA = I_n$.

(d) Se A e B são matrizes equivalentes por linhas, então os sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ têm o mesmo conjunto de soluções.

(e) Sejam A uma matriz $n \times n$ e S uma matriz $n \times n$ invertível. Se $\mathbf{x}$ for uma solução do sistema linear $(S^{-1}AS)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então $S\mathbf{x}$ será uma solução do sistema linear $A\mathbf{y} = S\mathbf{b}$.

(f) Seja A uma matriz $n \times n$. O sistema linear $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ tem uma solução única se, e só se, $A - 4I$ for uma matriz invertível.

(g) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se A ou B (ou ambas) não for invertível, então tampouco AB será invertível.

1.7 Matrizes diagonais, triangulares e simétricas

Nesta seção, discutimos matrizes que têm vários formatos especiais. Essas matrizes surgem numa grande variedade de aplicações e desempenham um papel importante no nosso trabalho subsequente.

Matrizes diagonais

Uma matriz quadrada em que todas as entradas fora da diagonal principal são zero é denominada ***matriz diagonal***. Aqui temos alguns exemplos.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 6 O produto de uma matriz e sua transposta é uma matriz simétrica

Seja A a matriz 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observe que A^TA e AA^T são simétricas, como se esperava. ◀

Adiante, neste texto, obteremos condições gerais sobre A sob as quais AA^T e A^TA são invertíveis. Contudo, no caso especial em que A é *quadrada*, temos o seguinte resultado.

TEOREMA 1.7.5 *Se A for uma matriz invertível, então AA^T e A^TA também serão invertíveis.*

Prova Como A é invertível, também A^T é invertível, pelo Teorema 1.4.9. Assim, AA^T e A^TA são invertíveis, por serem produtos de matrizes invertíveis. ◀

Revisão de conceitos

- Matriz diagonal
- Matriz triangular inferior
- Matriz triangular superior
- Matriz triangular
- Matriz simétrica

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma matriz diagonal é invertível sem fazer contas.
- Calcular mentalmente produtos matriciais envolvendo matrizes diagonais.
- Determinar se uma matriz é triangular.
- Entender como a transposição afeta matrizes diagonais e triangulares.
- Entender como a inversão afeta matrizes diagonais e triangulares.
- Determinar se uma matriz é simétrica.

Conjunto de exercícios 1.7

Nos Exercícios 1–4, determine se a matriz dada é invertível.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 5–8, determine o produto por inspeção.

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 9–12, encontre por inspeção A^2, A^{-2} e A^{-k} (sendo k um inteiro qualquer).

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 13–19, decida se a matriz é simétrica.

13. $\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 20–22, decida por inspeção se a matriz é invertível.

20. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 23–24, encontre todos os valores das constantes desconhecidas que tornam a matriz A simétrica.

23. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 25–26, encontre todos os valores de x que tornam a matriz A invertível.

25. $A = \begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ x & x-\frac{1}{3} & 0 \\ x^2 & x^3 & x+\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 27–28, encontre uma matriz diagonal A que satisfaz a condição dada.

27. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

28. $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. Verifique o Teorema 1.7.1(*b*) para o produto AB, com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

30. Verifique o Teorema 1.7.1(*d*) para as matrizes A e B do Exercício 29.

31. Em cada parte, verifique o Teorema 1.7.4 para a matriz dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

32. Seja A uma matriz simétrica $n \times n$.

(a) Mostre que A^2 é simétrica.

(b) Mostre que $2A^2 - 3A + I$ é simétrica.

33. Prove que se $A^TA = A$, então A é simétrica e $A = A^2$.

34. Encontre todas as matrizes diagonais A de tamanho 3×3 que satisfazem $A^2 - 3A - 4I = 0$.

35. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Em cada caso, determine se A é simétrica.

(a) $a_{ij} = i^2 + j^2$ (b) $a_{ij} = i^2 - j^2$

(c) $a_{ij} = 2i + 2j$ (d) $a_{ij} = 2i^2 + 2j^3$

36. Usando sua experiência com o Exercício 35, projete um teste geral que possa ser aplicado a uma fórmula para a_{ij} para determinar se $A = [a_{ij}]$ é simétrica.

37. Dizemos que uma matriz quadrada A é ***antissimétrica*** se $A^T = -A$. Prove cada afirmação dada.

(a) Se A for uma matriz antissimétrica invertível, então A^{-1} é antissimétrica.

(b) Se A e B são antissimétricas, então também o são A^T, $A + B$, $A - B$ e kA, com qualquer escalar k.

(c) Toda matriz quadrada A pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica. [*Sugestão*: observe a identidade $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.]

Nos Exercícios 38–39, preencha as entradas marcadas com um × para produzir uma matriz antissimétrica.

38. $A = \begin{bmatrix} \times & \times & 4 \\ 0 & \times & \times \\ \times & -1 & \times \end{bmatrix}$ **39.** $A = \begin{bmatrix} \times & 0 & \times \\ \times & \times & -4 \\ 8 & \times & \times \end{bmatrix}$

40. Encontre todos os valores de a, b, c e d com os quais A é antissimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2a-3b+c & 3a-5b+5c \\ -2 & 0 & 5a-8b+6c \\ -3 & -5 & d \end{bmatrix}$$

41. Mostramos no Teorema 1.7.3 que o produto de matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e só se, as matrizes comutam. Será o produto de matrizes antissimétricas que comutam uma matriz antissimétrica? Explique. [*Observação*: ver Exercício 37 para a definição de antissimétrica.]

42. Se a matriz A de tamanho $n \times n$ pode ser expressa como $A = LU$, em que L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser expresso como $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e pode ser, portanto, resolvido em dois passos, como segue.

Passo 1. Seja $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, de modo que $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser escrito como $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Resolva esse sistema.

Passo 2. Resolva o sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ em $\mathbf{x}$.

Em cada parte, use esse método de dois passos para resolver o sistema dado.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

43. Encontre uma matriz triangular superior que satisfaça

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(m), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A transposta de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal.

(b) A transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular superior.

(c) A soma de uma matriz triangular superior e uma triangular inferior é uma matriz diagonal.

(d) Todas as entradas de uma matriz simétrica são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

(e) Todas as entradas de uma matriz triangular superior são determinadas pelas entradas que ocorrem na diagonal principal e acima dela.

(f) A inversa de uma matriz triangular inferior invertível é uma matriz triangular superior.

(g) Uma matriz diagonal é invertível se, e só se, todas as entradas diagonais são positivas.

(h) A soma de uma matriz diagonal e uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular inferior.

(i) Uma matriz simétrica e triangular superior é diagonal.

(j) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é simétrica, então A e B são simétricas.

(k) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $A + B$ é triangular superior, então A e B são triangulares superiores.

(l) Se A^2 for simétrica, então A será uma matriz simétrica.

(m) Se kA for uma matriz simétrica com algum $k \neq 0$, então A será uma matriz simétrica.

1.8 Aplicações de sistemas lineares

Nesta seção, discutiremos resumidamente algumas aplicações de sistemas lineares. Essa é apenas uma pequena amostragem da ampla variedade de problemas do mundo real aos quais é aplicável nosso estudo de sistemas lineares.

Análise de redes

O conceito de *rede* aparece numa variedade de aplicações. Em termos gerais, uma ***rede*** é um conjunto de ***ramos*** através dos quais "flui" algum meio. Os ramos, por exemplo, podem ser fios elétricos através dos quais flui corrente elétrica, canos através dos quais flui água ou petróleo, ruas de uma cidade pelas quais fluem veículos, ou conexões financeiras pelas quais flui dinheiro, para citar apenas alguns.

Os ramos da maioria das redes se encontram em pontos denominados ***nós*** ou ***vértices***, nos quais o fluxo divide. Por exemplo, numa rede elétrica, os nós ocorrem onde três ou

Conjunto de exercícios 1.8

1. A figura dada mostra uma rede na qual são conhecidos a taxa de fluxo e o sentido do fluxo em alguns ramos. Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo nos demais ramos.

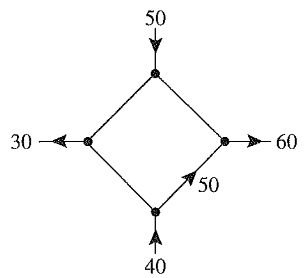


Figura Ex-1

2. A figura dada mostra algumas taxas de fluxo de hidrocarbonetos para dentro e para fora de uma rede de canos de uma refinaria de petróleo.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo se $x_4 = 50$ e $x_6 = 0$.

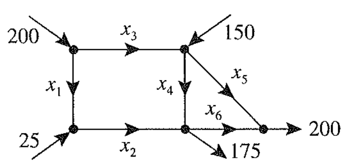


Figura Ex-2

3. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Se o fluxo ao longo da rua de A para B precisar ser reduzido em virtude de uma obra, qual será o fluxo mínimo necessário para manter o tráfego fluindo em todas as ruas?

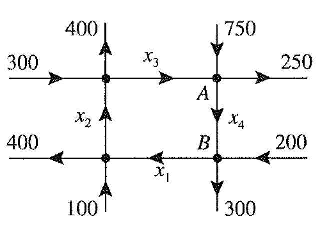


Figura Ex-3

4. A figura dada mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) É possível fechar a rua de A para B em virtude de uma obra e manter o tráfego fluindo em todas as outras ruas? Explique.

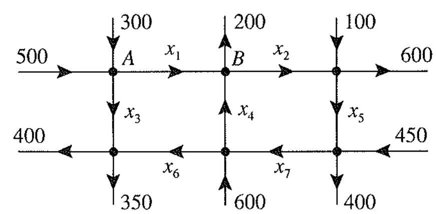
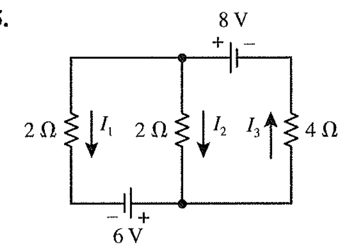


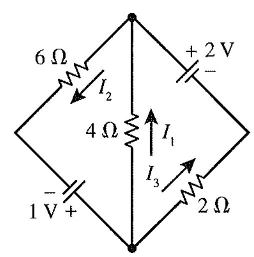
Figura Ex-4

Nos Exercícios 5–8, analise os circuitos elétricos dados encontrando as correntes desconhecidas.

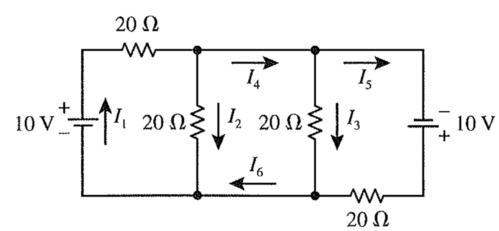
5.



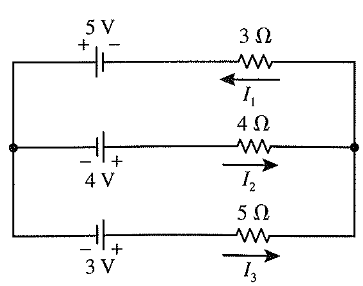
6.



7.



8.



Nos Exercícios 9–12, escreva uma equação equilibrada para a reação química dada.

9. $C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ (queima de propano)

10. $C_6H_{12}O_6 \rightarrow CO_2 + C_2H_5OH$ (fermentação do açúcar)

11. $CH_3COF + H_2O \rightarrow CH_3COOH + HF$

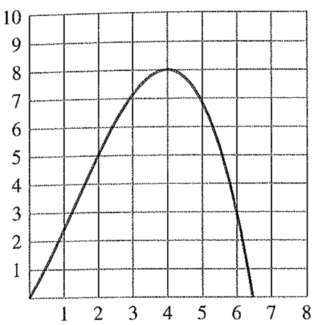
12. $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (fotossíntese)

13. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (1, 1), (2, 2) e (3, 5).

14. Encontre o polinômio quadrático cujo gráfico passa pelos pontos (0, 0), $(-1, 1)$ e (1, 1).

15. Encontre o polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos $(-1, -1)$, (0, 1), (1, 3), $(4, -1)$.

16. A figura dada mostra o gráfico de um polinômio cúbico. Encontre o polinômio.



◀ Figura Ex-16

17. (a) Encontre uma equação que represente a família de todos os polinômios de grau dois que passam pelos pontos (0, 1) e (1, 2). [*Sugestão*: a equação deve incluir um parâmetro arbitrário que produza os membros da família quando variar.]

(b) Esboce quatro curvas da família obtida a mão ou com a ajuda de uma ferramenta gráfica.

18. Nesta seção, selecionamos apenas algumas poucas aplicações de sistemas lineares. Usando uma ferramenta de busca na Internet, tente encontrar mais algumas aplicações desses sistemas ao mundo real. Selecione alguma de seu interesse e redija um parágrafo a respeito.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Numa rede qualquer, a soma dos fluxo para fora de algum nó deve ser igual à soma dos fluxos para dentro do nó.

(b) Quando uma corrente passa por um resistor, ocorre um aumento da tensão elétrica no circuito.

(c) A lei das correntes de Kirchhoff afirma que a soma das correntes fluindo para dentro de qualquer nó é igual à soma das correntes fluindo para fora do nó.

(d) Uma equação química está equilibrada se o número total de átomos em cada lado da equação for o mesmo.

(e) Dados n pontos do plano xy, existe um único polinômio de grau $n - 1$ ou inferior cujo gráfico passa por esses pontos.

1.9 Modelos econômicos de Leontief

Em 1973, o economista Wassily Leontief foi agraciado com o Prêmio Nobel pelo seu trabalho em modelagem econômica, no qual utilizou métodos matriciais para estudar as relações entre diferentes setores de uma economia. Nesta seção, discutiremos algumas das ideias desenvolvidas por Leontief.

Insumo e produto numa economia

Uma maneira de analisar uma economia é dividi-la em ***setores*** e estudar como os setores interagem entre si. Por exemplo, uma economia simples pode estar dividida em três setores: manufatura, agricultura e serviços. Tipicamente, um setor produz certos ***produtos***, mas requer ***insumos*** dos outros setores e de si mesmo. Por exemplo, o setor agrícola pode produzir trigo como produto, mas requer insumo de máquinas agrícolas do setor manufatureiro, energia elétrica do setor de serviços e alimento de seu próprio setor para alimentar seus trabalhadores. Assim, podemos imaginar uma economia como uma rede na qual fluem os insumos e os produtos entre os setores; o estudo desses fluxos é denominado ***análise de insumo-produto***. Os insumos e os produtos em geral são medidos em unidades monetárias (dólares, ou milhões de dólares, por exemplo, que denotamos simplesmente pelo cifrão \$), mas também são possíveis outras medidas.

Os fluxos entre os setores de uma economia real não são sempre óbvios. Por exemplo, na Segunda Guerra Mundial, os Estados Unidos da América tiveram uma demanda por 50.000 novos aviões, que exigiu a construção de muitas novas fábricas de alumínio. Isso produziu uma demanda inesperadamente grande por certos componentes elétricos à base de cobre que, por sua vez, produziu uma escassez de cobre. O problema acabou sendo resolvido utilizando prata como substituto de cobre, sendo a prata tomada emprestada das

8. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Se o setor aberto demanda o mesmo valor em unidades monetárias de cada setor produtivo, qual desses setores deve produzir o maior valor monetário para atender a demanda da economia?

9. Considere uma economia aberta com matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que a equação de Leontief $\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ tem uma solução única com cada vetor demanda $\mathbf{d}$ se $c_{21}c_{12} < 1 - c_{11}$.

10. (a) Considere uma economia aberta com matriz de consumo C cujas somas das entradas de coluna são menores do que 1 e seja $\mathbf{x}$ o vetor de produção que satisfaz a demanda externa $\mathbf{d}$, ou seja, $(I - C)^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{x}$. Seja $\mathbf{d}_j$ o vetor demanda que é obtido aumentando a j-ésima entrada de $\mathbf{d}$ por 1 unidade e deixando as outras entradas fixas. Prove que o vetor de produção $\mathbf{x}_j$ que atende essa demanda é

$$\mathbf{x}_j + j\text{-ésimo vetor coluna de } (I - C)^{-1}$$

(b) Em palavras, qual é o significado econômico do j-ésimo vetor coluna de $(I - C)^{-1}$? [*Sugestão*: observe o vetor $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}$.]

11. Prove que se C for uma matriz $n \times n$ cujas entradas são não negativas e cujas somas das entradas de linhas são menores do que 1, então $I - C$ é invertível e tem entradas não negativas. [*Sugestão*: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ para uma matriz invertível qualquer A.]

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Os setores produtores da economia são denominados setores abertos.

(b) Uma economia fechada é uma que não tem setores abertos.

(c) As linhas de uma matriz de consumo representam os produtos de um setor da economia.

(d) Se a soma das entradas das colunas da matriz de consumo são menores do que 1, então a matriz de Leontief é invertível.

(e) A equação de Leontief relaciona o vetor de produção de uma economia com o vetor demanda externa.

Capítulo 1 Exercícios suplementares

Nos Exercícios 1–4, a matriz dada representa uma matriz aumentada de um sistema linear. Escreva o conjunto de equações lineares correspondentes do sistema e use eliminação gaussiana para resolver o sistema linear. Introduza parâmetros livres se necessário.

1. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & 2 \\ 3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

6. Use eliminação de Gauss-Jordan para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

7. Encontre inteiros positivos que satisfaçam

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x + 5y + 10z &= 44 \end{aligned}$$

8. Uma caixa contendo moedas de 1, 5 e 10 centavos tem 13 moedas totalizando 83 centavos. Quantas moedas de cada tipo há na caixa?

9. Seja

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$$

a matriz aumentada de um sistema linear. Encontre os valores de a e b com os quais o sistema tem

(a) uma única solução.

(b) uma solução a um parâmetro.

(c) uma solução a dois parâmetros.

(d) nenhuma solução.

10. Para qual(is) valor(es) de a o sistema a seguir tem zero, uma ou uma infinidade de soluções?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 2 \\ (a^2 - 4)x_3 &= a - 2 \end{aligned}$$

11. Encontre uma matriz K tal que $AKB = C$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

12. Como deveriam ser escolhidos os coeficientes a, b e c para que o sistema

$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

tenha a solução $x = 1, y = -1$ e $z = 2$?

13. Em cada parte, resolva a equação matricial para X.

(a) $X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

14. Seja A uma matriz quadrada.

(a) Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ se $A^4 = 0$.

(b) Mostre que

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$$

se $A^{n+1} = 0$.

15. Encontre valores de a, b, e c tais que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ e $(2, 3)$.

16. (***Requer Cálculo***) Encontre valores de a, b, e c tais que o gráfico do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(-1, 0)$ e tem uma tangente horizontal em $(2, -9)$.

17. Seja J_n a matriz $n \times n$ com todas as entradas iguais a 1. Mostre que se $n > 1$, então

$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1} J_n$$

18. Mostre que se uma matriz quadrada A satisfaz a equação

$$A^3 + 4A^2 - 2A + 7I = 0$$

então A^T também satisfaz essa equação.

19. Prove: se B for invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$ se, e só se, $AB = BA$.

20. Prove: se A for invertível, então $A + B$ e $I + BA^{-1}$ são ambas invertíveis ou ambas não invertíveis.

21. Prove: se A for uma matriz $m \times n$ e B, a matriz $n \times 1$ com todas as entradas iguais a $1/n$, então

$$AB = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$$

em que $\bar{r}_i$ é a média das entradas na i-ésima linha de A.

22. (***Requer Cálculo***) Se as entradas da matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots & c_{1n}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots & c_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(x) & c_{m2}(x) & \cdots & c_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

são funções deriváveis de x, então definimos

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) & \cdots & c'_{1n}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) & \cdots & c'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c'_{m1}(x) & c'_{m2}(x) & \cdots & c'_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

Mostre que, se as entradas de A e B forem funções deriváveis de x e os tamanhos das matrizes forem tais que as operações estão definidas, então

(a) $\dfrac{d}{dx}(kA) = k\dfrac{dA}{dx}$

(b) $\dfrac{d}{dx}(A + B) = \dfrac{dA}{dx} + \dfrac{dB}{dx}$

(c) $\dfrac{d}{dx}(AB) = \dfrac{dA}{dx}B + A\dfrac{dB}{dx}$

23. (***Requer Cálculo***) Use a parte (c) do Exercício 22 para mostrar que

$$\frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

Enuncie todas as hipóteses necessárias para obter essa fórmula.

24. Supondo que as inversas envolvidas existam, prove as igualdades a seguir.

(a) $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C + D)^{-1}D$

(b) $(I + CD)^{-1}C = C(I + DC)^{-1}$

(c) $(C + DD^T)^{-1}D = C^{-1}D(I + D^TC^{-1}D)-^1$

ADVERTÊNCIA A técnica de setas só funciona com determinantes de matrizes 2×2 e 3×3.

direita e subtraindo os produtos das entradas nas setas para a esquerda. Esse procedimento executa as seguintes contas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

que estão de acordo com a expansão em cofatores ao longo da primeira linha.

▶ EXEMPLO 7 Uma técnica para calcular determinantes 2 × 2 e 3 × 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

$$= [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240 \blacktriangleleft$$

Revisão de conceitos

- Determinante
- Menor
- Cofator
- Expansão em cofatores

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os menores e cofatores de uma matriz quadrada.
- Usar a expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz quadrada.
- Usar a técnica de setas calcular o determinante de uma matriz 2×2 ou 3×3.
- Usar o determinante de uma matriz invertível 2×2 para encontrar a inversa dessa matriz.
- Encontrar mentalmente o determinante de uma matriz triangular superior, inferior ou diagonal.

Conjunto de exercícios 2.1

Nos Exercícios 1–2, encontre todos os menores e cofatores da matriz A.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{13} e C_{13}.
(b) M_{23} e C_{23}.
(c) M_{22} e C_{22}.
(d) M_{21} e C_{21}.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Encontre

(a) M_{32} e C_{32}. (b) M_{44} e C_{44}.

(c) M_{41} e C_{41}. (d) M_{24} e C_{24}.

Nos Exercícios **5–8**, calcule o determinante da matriz. Se a matriz for invertível, use a Equação (2) pra encontrar a inversa.

5. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **9–14**, use a técnica de setas para calcular o determinante da matriz.

9. $\begin{bmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **15–18**, encontre todos os valores de λ com os quais $(A) = 0$.

15. $A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ **16.** $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$ **18.** $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 4 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}$

19. Calcule o determinante da matriz do Exercício 13 usando uma expansão em cofatores ao longo

(a) da primeira linha (b) da primeira coluna

(c) da segunda linha (d) da segunda coluna

(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

20. Calcule o determinante da matriz do Exercício 12 usando uma expansão em cofatores ao longo

(a) da primeira linha (b) da primeira coluna

(c) da segunda linha (d) da segunda coluna

(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

Nos Exercícios **21–26**, calcule $\det(A)$ com uma expansão em cofatores ao longo de uma linha ou coluna de sua escolha.

21. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **22.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **27–32**, obtenha por inspeção o determinante da matriz dada.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$

33. Mostre que o valor do determinante independe de θ.

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta)-\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

34. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e só se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

35. Sem fazer contas, descubra uma relação entre os determinantes

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a+\lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

36. Mostre que

$$\det(A) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}$$

para qualquer matriz A de tamanho 2×2.

37. O que pode ser dito sobre um determinante de enésima ordem com todas as entradas iguais a 1? Explique seu raciocínio.

38. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 3×3 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.

39. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 4×4 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.

40. Prove que os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares se, e só se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

41. Prove: a equação da reta que passa pelos pontos distintos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

42. Prove que se A for uma matriz triangular superior e se B_{ij} for a matriz que resulta quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, então B_{ij} é triangular superior se $i < j$.

Exercícios Verdadeiro/Falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de tamanho 2×2 é $ad + bc$.

(b) Duas matrizes quadradas A e B podem ter o mesmo determinante se, e só se, forem de mesmo tamanho.

(c) O menor M_{ij} é igual ao cofator C_{ij} se, e só se, $i + j$ for par.

(d) Se A for uma matriz simétrica de tamanho 3×3, então $C_{ij} = C_{ji}$, com quaisquer i e j.

(e) O valor da expansão em cofatores de uma matriz A é independente da linha ou coluna escolhida para a expansão.

(f) O determinante de uma matriz triangular inferior é a soma das entradas ao longo de sua diagonal principal.

(g) Dados uma matriz quadrada A e um escalar c quaisquer, temos $\det(cA) = c\det(A)$.

(h) Dadas quaisquer matrizes quadradas A e B, temos $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(i) Dada qualquer matriz A de tamanho 2×2, temos $\det(A^2) = (\det(A))^2$.

2.2 Calculando determinantes por meio de redução por linhas

Nesta seção, mostramos como calcular um determinante por meio da redução da matriz associada à forma escalonada por linhas. Em geral, esse método requer menos cálculos que a expansão em cofatores e é, portanto, o método preferido para matrizes grandes.

Um teorema básico

Começamos com um teorema fundamental que nos leva a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer tamanho.

TEOREMA 2.2.1 *Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então* $\det(A) = 0$.

Prova Como o determinante de A pode ser obtido por uma coleção de expansões em cofatores ao longo de qualquer linha ou coluna, podemos usar a linha ou coluna de zeros.

Conjunto de exercícios 2.2

Nos Exercícios 1–4, verifique que $\det(A) = \det(A^T)$.

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ **4.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 5–9, calcule por inspeção o determinante da matriz elementar dada.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 10–17, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

10. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

18. Repita os Exercícios 10–13 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

19. Repita os Exercícios 14–17 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

Nos Exercícios 20–27, calcule o determinante, sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

20. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ **21.** $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ **22.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ **24.** $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **26.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

28. Mostre que

(a) $\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

(b) $\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

29. Use redução por linhas para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Nos Exercícios 30–33, confirme as identidades sem calcular o determinante diretamente.

30. $\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ta_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2+ta_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3+ta_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

34. Encontre o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios **35–36**, mostre que $\det(A) = 0$ sem calcular o determinante diretamente.

35. $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz 4×4 e B a matriz que resulta se trocarmos entre si as duas primeiras linhas de A e depois trocarmos entre si as duas últimas linhas de A, então $\det(B) = \det(A)$.

(b) Se A for uma matriz 3×3 e B a matriz que resulta se multiplicarmos a primeira coluna por 4 e a terceira coluna por $\frac{3}{4}$, então $\det(B) = 3\det(A)$.

(c) Se A for uma matriz 3×3 e B a matriz que resulta se somarmos 5 vezes a primeira linha à segunda e à terceira linhas de A, então $\det(B) = 25\det(A)$.

(d) Se A for uma matriz $n \times n$ e B a matriz que resulta se multiplicarmos cada linha de A pelo índice dessa linha, então

$$\det(B) = \frac{n(n+1)}{2}\det(A)$$

(e) Se A for uma matriz quadrada com duas colunas idênticas, então $\det(A) = 0$.

(f) Se a soma do segundo com o quarto vetor linha de uma matriz A de tamanho 6×6 for igual ao último vetor linha, então $\det(A) = 0$.

2.3 Propriedades dos determinantes; regra de Cramer

Nesta seção, desenvolvemos algumas propriedades fundamentais dos determinantes e utilizamos esses resultados para deduzir uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível e fórmulas para as soluções de certos tipos de sistemas lineares.

Propriedades básicas dos determinantes

Suponha que A e B sejam matrizes $n \times n$ e que k seja um escalar qualquer. Começamos considerando as possíveis relações entre $\det(A)$, $\det(B)$ e

$$\det(kA), \quad \det(A+B), \quad \text{e} \quad \det(AB)$$

Como um fator comum de qualquer linha de uma matriz pode ser trazido para fora do determinante e como cada uma das n linhas de kA tem o fator k em comum, segue que

$$\det(kA) = k^n \det(A) \tag{1}$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Infelizmente, em geral não existem relações simples entre $\det(A)$, $\det(B)$ e o determinante da soma $\det(A + B)$. Em particular, enfatizamos que $\det(A + B)$ geralmente *não* é igual a $\det(A) + \det(B)$. Isso é ilustrado pelo próximo exemplo.

Revisão de conceitos

- Teste do determinante para invertibilidade
- Matriz de cofatores
- Adjunta de uma matriz
- Regra de Cramer
- Afirmações equivalentes sobre uma matriz invertível

Aptidões desenvolvidas

- Saber como os determinantes se comportam em relação às operações aritméticas básicas, conforme Equação (1), Teorema 2.3.1, Lema 2.3.2 e Teorema 2.3.4.
- Usar o determinante para testar uma matriz quanto à invertibilidade.
- Conhecer a relação entre $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$.
- Calcular a matriz de cofatores de uma matriz quadrada A.
- Calcular $\operatorname{adj}(A)$ de uma matriz quadrada A.
- Usar a adjunta de uma matriz invertível para encontrar sua inversa.
- Usar a regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.
- Conhecer as caracterizações equivalentes da invertibilidade de uma matriz dadas no Teorema 2.3.8.

Conjunto de exercícios 2.3

Nos Exercícios **1–4**, verifique que $\det(kA) = k^n \det(A)$.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $k = 2$ **2.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; $k = -4$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $k = -2$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $k = 3$

Nos Exercícios **5–6**, verifique que $\det(AB) = \det(BA)$ e determine se vale a igualdade $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **7–14**, use determinantes para decidir se a matriz é invertível.

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **10.** $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ **12.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ **14.** $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **15–18**, encontre os valores de k com os quais A é invertível.

15. $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ **16.** $A = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **18.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **19–23**, decida se a matriz é invertível e, caso for, use o método da adjunta para encontrar a inversa.

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **20.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **22.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **24–29**, resolva usando a regra de Cramer, quando aplicável.

24. $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 4x + 5y \phantom{{}+2z} &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} &= -2 \\ 4x_1 \phantom{{}-3x_2} - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

28.
$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

30. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível com qualquer valor de θ; em seguida, encontre A^{-1} usando o Teorema 2.3.6.

31. Use a regra de Cramer para resolver em y sem resolver nas incógnitas x, z e w.

$$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z + w &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$

32. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o sistema do Exercício 31.

(a) Resolva o sistema pela regra de Cramer.

(b) Resolva o sistema por eliminação de Gauss-Jordan.

(c) Qual método envolve menos contas?

33. Prove que se $\det(A) = 1$ e todas as entradas de A são números inteiros, então todas as entradas de A^{-1} também são inteiros.

34. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de n equações lineares em n incógnitas com todos os coeficientes e as constantes números inteiros. Prove que se $\det(A) = 1$, então a solução $\mathbf{x}$ tem entradas inteiras.

35. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Supondo que $\det(A) = -7$, obtenha

(a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(2A^{-1})$

(d) $\det((2A)^{-1})$ (e) $\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

36. Em cada parte, encontre o determinante, sabendo que A é uma matriz 4×4 com $\det(A) = -2$.

(a) $\det(-A)$ (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(2A^T)$ (d) $\det(A^3)$

37. Em cada parte, encontre o determinante, sabendo que A é uma matriz 3×3 com $\det(A) = 7$.

(a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$

(c) $\det(2A^{-1})$ (d) $\det((2A)^{-1})$

38. Prove que uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, A^TA é invertível.

39. Mostre que se A for uma matriz quadrada, então $\det(A^TA) = \det(AA^T)$.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(l), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz 3×3, então $\det(2A) = 2\det(A)$.

(b) Se A e B forem matrizes quadradas de mesmo tamanho tais que $\det(A) = \det(B)$, então $\det(A + B) = 2\det(A)$.

(c) Se A e B forem matrizes quadradas de mesmo tamanho e A for invertível, então

$$\det(A^{-1}BA) = \det(B)$$

(d) Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\det(A) = 0$.

(e) A matriz de cofatores de A é precisamente $[\operatorname{adj}(A)]^T$.

(f) Para cada matriz A de tamanho $n \times n$, temos

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = (\det(A))I_n$$

(g) Se A for uma matriz quadrada, e o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiver soluções múltiplas para $\mathbf{x}$, então $\det(A) = 0$.

(h) Se A for uma matriz de tamanho $n \times n$, e existir uma matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$ tal que o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tem soluções, então a forma escalonada reduzida de A não pode ser I_n.

(i) Se E for uma matriz elementar, então $E\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

(j) Dada uma matriz invertível A, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem somente a solução trivial se, e só se, o sistema linear $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(k) Se A for invertível, então $\operatorname{adj}(A)$ também será invertível.

(l) Se A tem uma linha de zeros, então $\operatorname{adj}(A)$ também tem.

Capítulo 2 Exercícios suplementares

Nos Exercícios 1–8, calcule o determinante da matriz usando (a) a expansão em cofatores e (b) as operações elementares com as linhas para introduzir zeros na matriz.

1. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

9. Calcule os determinantes nos Exercícios 3–6 usando a técnica das setas (ver Exemplo 7 da Seção 2.1).

10. (a) Construa uma matriz 4×4 cujo determinante seja fácil de calcular usando expansão em cofatores, mas difícil de calcular usando operações elementares com linhas.

(b) Construa uma matriz 4×4 cujo determinante seja fácil de calcular usando operações elementares com linhas, mas difícil de calcular usando expansão em cofatores.

11. Use o determinante para decidir se as matrizes dos Exercícios 1–4 são invertíveis.

12. Use o determinante para decidir se as matrizes dos Exercícios 5–8 são invertíveis.

Nos Exercícios 13–15, encontre o determinante da matriz usando qualquer método.

13. $\begin{vmatrix} 5 & b-3 \\ b-2 & -3 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ a^2 & 1 & 2 \\ 2 & a-1 & 4 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16. Resolva para x.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

Nos Exercícios 17–24, use o método da adjunta (Teorema 2.3.6) para encontrar a inversa da matriz dada, se existir.

17. A matriz do Exercício 1.

18. A matriz do Exercício 2.

19. A matriz do Exercício 3.

20. A matriz do Exercício 4.

21. A matriz do Exercício 5.

22. A matriz do Exercício 6.

23. A matriz do Exercício 7.

24. A matriz do Exercício 8.

25. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

26. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$$

27. Examinando o determinante da matriz de coeficientes, mostre que o sistema dado tem uma solução não trivial se, e só se, $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

28. Seja A uma matriz 3×3 com todas as entradas iguais a 0 ou 1. Qual é o maior valor possível para $\det(A)$?

29. (a) Para o triângulo da figura dada, use trigonometria para mostrar que

$$b\cos\gamma + c\cos\beta = a$$
$$c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$$
$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c$$

e, então, aplique a regra de Cramer para mostrar que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(b) Use a regra de Cramer para obter fórmulas análogas para β e γ.

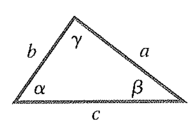


Figura Ex-29

30. Use determinantes para mostrar que, com qualquer valor de λ, a única solução de

$$x - 2y = \lambda x$$
$$x - y = \lambda y$$

é $x = 0$, $y = 0$.

31. Prove: se A for invertível, então adj(A) é invertível e

$$[\text{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A = \text{adj}(A^{-1})$$

32. Prove: se A for uma matriz $n \times n$, então

$$\det[\text{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$$

33. Prove: se a soma das entradas em cada linha de uma matriz A de tamanho $n \times n$ for sempre zero, então o determinante de A é zero. [*Sugestão*: considere o produto matricial AX, em que X é a matriz $n \times 1$ com todas as entradas iguais a 1.]

34. (a) Na figura dada, a área do triângulo ABC pode ser expressa como

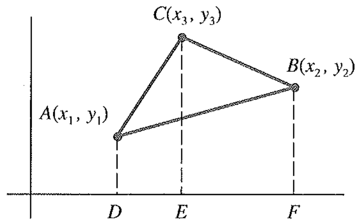
$$\text{área } ABC = \text{área } ADEC + \text{área } CEFB - \text{área } ADFB$$

Use isso e o fato de que a área de um trapézio é igual à metade da altura vezes a soma dos lados paralelos para mostrar que

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[*Observação*: na dedução dessa fórmula, os vértices foram denotados de tal modo que quando passamos de (x_1, y_1) para (x_2, y_2) para (x_3, y_3), o triângulo é percorrido no sentido anti-horário. Para uma orientação horária, o determinante acima dá o *negativo* da área.]

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a área do triângulo de vértices (3, 3), (4, 0), (−2, −1).



◀ Figura Ex-34

35. Sabendo que 21.375, 38.798, 34.162, 40.223 e 79.154 são todos divisíveis por 19, mostre, sem calcular diretamente, que o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

é divisível por 19.

36. Sem calcular diretamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & \text{sen}(\alpha+\delta) \\ \text{sen}\,\beta & \cos\beta & \text{sen}(\beta+\delta) \\ \text{sen}\,\gamma & \cos\gamma & \text{sen}(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$