# MAT 0334 - ANÁLISE FUNCIONAL

1° SEMESTRE DE 2017

LISTA DE PROBLEMAS

$\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

**1)** Dados reais positivos $\lambda$, $a$ e $b$, mostre que $ab \leq \displaystyle\int_0^a x^\lambda\, dx + \int_0^b x^{1/\lambda}\, dx$ e que a igualdade ocorre apenas quando $b = a^\lambda$.

**2)** Sejam $V$ um espaço vetorial complexo, $x \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Mostre que a função $V \ni y \mapsto \|x+\alpha y\| \in \mathbb{R}$ é contínua.

**3)** Sejam $p$ e $q$ reais, $1 \leq p < q$. Mostre que $\ell^p \subsetneq \ell^q \subsetneq \ell^\infty$.

**4)** Seja $\ell_c$ o espaço vetorial das sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ tais que $\{n;\, x_n \neq 0\}$ é finito. Mostre que (a) $\ell_c$ é denso em $\ell^p$, para $1 \leq p < \infty$ e (b) $\ell_c$ não é denso em $\ell^\infty$.

**5)** Seja $C^b(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções limitadas e contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$.
(a) Mostre que $C^b(\mathbb{R})$ é completo com a norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\, x \in \mathbb{R}\}$.
(b) Seja $C^b_u(\mathbb{R}) = \{f \in C^b(\mathbb{R});\, f$ é uniformemente contínua$\}$. Mostre que $C^b_u(\mathbb{R})$ é um subespaço fechado de $C^b(\mathbb{R})$.
`Observação`: Uma função definida em $\mathbb{R}$ é uniformemente contínua se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$ (ou seja, $f$ é contínua em todo $x$ e "o delta" pode ser escolhido independente de $x$).

**6)** Seja $C_0(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ que se anulam no infinito, isto é, das funções contínuas tais que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Mostre que $C_0(\mathbb{R})$ é completo com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

**7)** Seja $C([-\infty, +\infty])$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ tais que os limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existem, são finitos e possivelmente distintos.
(a) Mostre que $C([-\infty, +\infty])$ é completo com a norma $\|\cdot\|_\infty$.
(b) Mostre que $C_0(\mathbb{R})$ é um subespaço fechado de codimensão 2 de $C([-\infty, +\infty])$

**8)** Seja $C_c(\mathbb{R}) = \{f \in C_0(\mathbb{R});\, f$ se anula fora de algum intervalo fechado e limitado$\}$. Mostre que $C_c(\mathbb{R})$ não é fechado em $C_0(\mathbb{R})$.

**9)** Seja $C^1([a,b])$ o espaço vetorial das funções que possuem derivadas contínuas em $[a,b]$. Mostre que $C^1([a,b])$ não é completo com a norma $\|\cdot\|_\infty$, mas é completo com a norma $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
`Dica`: $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$, para toda $f \in C^1([a,b])$.

**10)** Considere $V = \{f \in C^1([-1,+1]);\ f(-1) = f(1) = 0\}$ munido da norma $\|f\|_{1,1} = \displaystyle\int_{-1}^{+1} |f'(x)|\,dx$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n(x+1), & -1 \le x \le -1 + \frac{1}{n} \\ 1, & -1 + \frac{1}{n} \le x \le -\frac{1}{n} \\ -nx, & -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ -1, & \frac{1}{n} \le x \le 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1), & 1 - \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{e} \quad f_n(x) = \int_{-1}^{x} \varphi_n(t)\,dt.$$

(a) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $V$.
(b) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge em $V$.
(c) Encontre $f \in C([-1,+1])$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.
`Observação`: este problema mostra que, num certo sentido que necessita de uma definição precisa, o completamento de $V$ com a norma $\|\cdot\|_{1,1}$ "contém" ao menos uma função contínua em $[-1,+1]$.

**Definição**: Uma seminorma em um espaço vetorial $V$ é uma função $p : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo: (i) $p(x) \ge 0$ para todo $x \in V$, (ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $x \in V$ e para todo escalar $\alpha$ e (iii) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ para todos $x$ e $y$ em $V$.

**11)** Seja $V$ um espaço vetorial real ou complexo e sejam $p_j : X \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, seminormas. Suponha que, para todo $x \neq 0$ em $V$ existe algum $j$ tal que $p_j(x) \neq 0$.
(a) Mostre que $d(x,y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}$ define uma métrica em $V$ e que $d(x+z, x+z) = d(x,y)$ para todos $x$, $y$ e $z$ em $V$.
(b) Mostre que uma sequência $x_n$ converge a $x$ em $V$ (na métrica do item $a$) se e somente se, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} p_j(x - x_n) = 0$.
`Dica`: pense primeiro no caso em que a família de seminormas é finita; depois use que $\sum_j 2^{-j} < \infty$.
(c) Mostre que uma sequência em $V$ é de Cauchy se, e somente, para todo $j \in \mathbb{N}$ e para todo $\epsilon > 0$, existe $N$ tal que, para todos $n$ e $m$ maiores do que $N$, $p_j(x_n - x_m) < \epsilon$.

**12)** Atribua ao espaço $C(\mathbb{R})$ de todas as funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ a métrica induzida (como no problema anterior) pelas seminormas

$$p_j(f) = \sup\{|f(x)|;\ |x| \le j\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

(a) Sejam $f_n \in C(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, definidas por $f_n(x) = x - n + |x - n|$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.
(b) Mostre que $C(\mathbb{R})$ é um espaço métrico completo.

**13)** Seja $T : X \to Y$ uma bijeção linear entre espaços normados que satisfaz $\|Tx\| = k\|x\|$ para todo $x \in X$, para algum real positivo $k$. Mostre que, se $X$ for completo, $Y$ também o será.

**14)** Exiba uma bijeção entre $C([0,1])$ e $C([a,b])$ que satisfaça $\|Tf\| = k\|f\|$ para toda $f \in C([a,b])$, para algum real positivo $k$.

**Definição**: Dada $(t_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família arbitrária de reais $t_\alpha \geq 0$, define-se

$$\sum_{\alpha\in A} t_\alpha \ = \ \sup\{\sum_{\alpha\in F} t_\alpha;\ F \subset A, F\text{finito}\}.$$

**15)** Dados $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família arbitrária de espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$, seja

$$X = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A};\ x_\alpha \in X_\alpha,\ \sum_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|^p < \infty\}$$

(abusando da notação denotamos pelo mesmo símbolo $\|\cdot\|$ as normas de todos $X_\alpha$, $\alpha \in A$).
(a) Mostre que $X$ é um espaço vetorial normado com as operações canonicamente definidas e com a norma $||(x_\alpha)_{\alpha\in A}|| = \left(\sum_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|^p\right)^{1/p}$. (b) Mostre que $X$ é completo.
`Observações`: No caso em que $X_\alpha$ não depende de $\alpha$, $X_\alpha = E$ para todo $\alpha \in A$, costuma-se denotar $X$ por $\ell^p(A;E)$. No caso em que $A = \mathbb{N}$ e $E = \mathbb{C}$, este é o espaço $\ell^p$ estudado em sala.

**16)** Sejam $X$ um espaço vetorial normado e $Y$ um subespaço de $X$.
(a) Mostre que, se $Y$ for completo, $Y$ é fechado em $X$.
(b) Mostre que, se $X$ for completo e se $Y$ for fechado em $X$, então $Y$ é completo.

**17)** Considere o espaço vetorial $X$ das funções $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ que são contínuas em todo $x \neq \frac{1}{2}$ e que possuem limites laterais em $\frac{1}{2}$, sendo o limite à esquerda igual a $f(1/2)$ (ou seja, $X$ consiste das funções em $[0,1]$ que são contínuas em todo $x \neq \frac{1}{2}$, sendo contínua à esquerda em $\frac{1}{2}$).
(a) Mostre que $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$ define uma norma em $X$.
`Dica`: é possível provar isto usando a desigualdade de Minkowsky para funções contínuas e o fato de que $\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ define norma em $\mathbb{R}^2$.
(b) Mostre que $C([0,1])$ é um subespaço de $X$ que não é fechado em $X$ munido da norma $\|\cdot\|_p$.
(c) Conclua que $C([0,1])$ não é completo com a norma $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$.

**18)** Seja $D$ um subespaço denso do espaço vetorial normado $Y$ e seja $X$ o completamento de $D$. Mostre que existe uma isometria $i : Y \to X$ com imagem densa.

**19)** Sejam $C_c(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de suporte compacto (isto é, funções contínuas que se anulam fora de algum intervalo fechado, que depende da função) e seja $V$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com integral imprópria absolutamente convergente (isto é, $\sup_{a>0} \int_{-a}^{+a} |f(x)|\, dx < \infty$).
(a) Mostre que $V$ é um espaço vetorial e que $\|f\|_1 = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{+a} |f(x)|\, dx$ define uma norma em $V$.
(b) Mostre que $C_c(\mathbb{R})$ é denso em $V$.
(c) Denotemos por $L^1(\mathbb{R})$ o completamento de $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. Mostre que existe uma isometria com imagem densa $i : V \to L^1(\mathbb{R})$ .

**20)** Seja $X$ um espaço de Banach e sejam $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que, se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge (isto é, existe o limite $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$).

**21)** Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados.
(a) Dado $1 \le p < \infty$, mostre que $\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}}$ define uma norma no produto cartesiano $X \times Y$ canonicamente munido de uma estrutura de espaço vetorial.
(b) Mostre que, se $X$ e $Y$ forem espaços de Banach, então $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$ também o será.

**Definição**: Dizemos que *a identidade do paralelogramo é satisfeita* no espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ se, para todos $x, y \in X$, temos $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

**22)** Mostre que a identidade do paralelogramo não é satisfeita em $L^p([0,1])$, se $p \neq 2$, $1 \le p \le \infty$.

**23)** Suponha que, no espaço vetorial normado real $(X, \|\cdot\|)$, a identidade do paralelogramo seja satisfeita. Mostre que $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ define um produto interno em $X$ tal que, para todo $x \in X$, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

**24)** Suponha que, no espaço vetorial normado complexo $(X, \|\cdot\|)$, a identidade do paralelogramo seja satisfeita. Mostre que $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$ define um produto interno em $X$ tal que, para todo $x \in X$, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

**25)** Seja $S = \{v_1, v_2, \cdots\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $H$. Sejam $M$ o subespaço de $H$ gerado por $S$, $\overline{M}$ o fecho de $M$ e $P$ a projeção ortogonal sobre $\overline{M}$. Para todo $x \in H$, mostre que $Px = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, v_j\rangle v_j$.

**26)** Seja $S = \{v_1, v_2, \cdots\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $H$.

(a) Mostre que, para todos $x, y \in H$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, v_j\rangle\langle y, v_j\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$.

(b) Mostre que $S$ é completo se, se somente se, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, v_j\rangle\,\overline{\langle y, v_j\rangle} = \langle x, y\rangle$, para todos $x, y \in H$.

**27)** Mostre que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}$. `Sugestão:` Parseval para $f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

**28)** Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)$, $x \in [0, 1]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $g_{nk}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\ \mathrm{sen}(n\pi x), & \text{se } x \in [k, k+1] \\ 0, & \text{se } x \notin [k, k+1] \end{cases}$.

(a) Mostre que $\{g_n; n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema ortonormal completo de $L^2([0, 1])$

(b) Mostre que $\{g_{nk}; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$.

(c) Conclua que $L^2(\mathbb{R})$ é separável.

**$28\frac{1}{2}$)** Para cada inteiro positivo $n$, considere $f_n \in C([0, \pi])$, $f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)$. Seja $M$ o espaço vetorial gerado por $S = \{f_n;\ n = 1, 2, \cdots\}$ e seja $\overline{M}$ o fecho de $M$ em $L^2([0, \pi])$. Seja $I : L^2([0, \pi]) \to \mathbb{C}$ a única extensão linear contínua da aplicação $C([0, \pi]) \ni f \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

(a) Mostre que $S \cup \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\}$ é um conjunto ortonormal completo de $L^2([0, \pi])$ ($\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ denota a função constantemente igual a $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$).

(b) Mostre que $M^{\perp}$ tem dimensão igual a 1 e encontre um gerador de $M^{\perp}$.

(c) Mostre que $\overline{M} = \{f \in L^2([0, \pi]);\ I(f) = 0\}$.

**29)** Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ linear. Mostre que $T$ é limitado se e somente se $\{x \in X; \|Tx\| \le 1\}$ tem interior não-vazio.

**30)** Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e seja $T : X \to Y$ um operador limitado satisfazendo $\|Tx\| \ge C\|x\|$ para todo $x \in X$, para alguma constante $C > 0$. (a) Mostre que a imagem de $T$ é fechada. (b) De qual dos dois espaços, $X$ ou $Y$, pode-se dispensar a hipótese de completude, mantendo-se a conclusão do item (a)?

**31)** Seja $X$ um espaço de Banach e seja $P : X \to X$ um operador limitado tal que $P^2 = P$. Mostre que: (a) a imagem de $P$ é fechada, e (b) $X = \mathrm{Im}\,P \oplus \mathrm{Ker}\,P$, em que $\mathrm{Im}\,P$ e $\mathrm{Ker}\,P$ denotam a imagem e o núcleo de $P$.

**32)** Dados $u$ e $v$ no espaço de Hilbert $H$, defina $T : H \to H$, $Tx = \langle x, u\rangle v$. (a) Mostre que $T$ é um operador limitado. (b) Calcule $\|T\|$.

**33)** Calcule a norma do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x+2y, -x+2y)$, com $\mathbb{R}^2$ munido da norma euclideana.

`Sugestão`: Verifique que $\|T(x,y)\|^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Diagonalize $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$.

**34)** Considere $V : C([0,1]) \to C([0,1])$ definido por $(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Munindo $C([0,1])$ da norma do supremo, mostre que $\|V^n\| = \frac{1}{n!}$.

`Sugestão`: Aplique o teorema de Fubini ao segundo membro de $[V^2 f](x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\,ds\,dt$.

**35)** (a) Mostre que o funcional linear $C[0,1] \ni f \longmapsto f(1/2) \in \mathbb{C}$ é contínuo em $C[0,1]$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$, mas não admite extensão linear contínua a $L^1[0,1]$ nem a $L^2[0,1]$.

(b) Mostre que o funcional linear $C[0,1] \ni f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{C}$ é contínuo em $C[0,1]$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$, e admite extensões lineares contínuas a $L^1[0,1]$ e a $L^2[0,1]$.

**36)** Denotemos por $C_c(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas de suporte compacto de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ e por $C_0(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ com limites nulos em $+\infty$ e em $-\infty$.

(a) Mostre que o funcional linear $C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto f(0) \in \mathbb{C}$ admite extensão linear contínua a $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$ nem a $L^2(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que o funcional linear $C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{C}$ admite extensão linear contínua a $L^1(\mathbb{R})$, mas não a $L^2(\mathbb{R})$ nem a $C_0(\mathbb{R})$.

(c) Fixada $g \in C_c(\mathbb{R})$ não-nula, mostre que o funcional linear ${}_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x)\,dx \in \mathbb{C}$ admite extensão linear contínua a $L^2(\mathbb{R})$, a $L^1(\mathbb{R})$ e a $C_0(\mathbb{R})$.

(d) Seja $g$ a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por: $g(x) = 0$, se $x \leq 0$; $g(x) = x^{-1/4}$, se $0 < x \leq 1$; $g(x) = x^{-1}$, se $x > 1$. Mostre que o funcional linear $C_c(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx \in \mathbb{C}$ está bem definido, admite extensão linear contínua a $L^2(\mathbb{R})$, mas não a $L^1(\mathbb{R})$, nem a $C_0(\mathbb{R})$.

## —— Definições e Comentários ——

Dado um espaço normado $X$, denotamos por $X^*$ (o livro-texto denota por $X'$) o conjunto dos funcionais lineares contínuos de $X$ em $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$, no caso de espaços reais). O espaço $X^*$ é um espaço de Banach, chamado de *dual* de $X$. Quando é necessário distinguir (isso é muito raro acontecer) $X^*$ do dual algébrico de $X$, chamamos $X^*$ de *dual topológico* de $X$. O dual de $X^*$, $X^{**} = (X^*)^*$, é chamado *bidual* de $X$.

Define-se canonicamente uma aplicação linear $x \ni X \mapsto \hat{x} \in X^{**}$ por $\hat{x}(f) = f(x)$, para todos $x \in X$ e $f \in X^*$. Vimos em sala que $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$ (pois $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|$, para todos $x \in X$ e $f \in X^*$).

Veremos mais tarde que esta aplicação é uma isometria, qualquer que seja o espaço normado $X$ (esta é uma das consequências mais conhecidas do Teorema de Hahn-Banach). O objetivo do Problema 38 é mostrar que, no caso em que $X$ é um espaço de Hilbert, o dual de $X = H$ é um espaço de Hilbert (logo o bidual $H^{**}$ também é), e a aplicação canônica $H \to H^{**}$ é um *isomorfismo de espaços de Hilbert*, ou seja, é uma bijeção linear que preserva o produto interno (logo é uma isometria).

Diremos que um espaço de Banach é *reflexivo* se a aplicação canônica $X \to X^{**}$ for bijetora. O Problema 38 mostra que todo espaço de Hilbert é reflexivo. O Problema 47 mostra que $\ell^1$ não é reflexivo.

O resultado do Problema 37 pode ser apenas parcialmente estendido para espaços de Banach: sempre se pode estender ao espaço inteiro, mantendo-se a mesma norma, um funcional linear limitado definido em um subespaço de um espaço de Banach. Mas, em geral, a extensão não é única. Este é o enunciado da versão mais conhecida do Teorema de Hahn-Banach.

---

**37)** Seja $M$ um subespaço do espaço de Hilbert $H$ e seja $\lambda : M \to \mathbb{C}$ um funcional linear contínuo, $\|\lambda\| = \sup\limits_{0 \neq x \in M} \dfrac{\|\lambda x\|}{\|x\|}$. Mostre que existe um único $\Lambda \in H^*$ tal que $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$ e $\Lambda x = \lambda x$ para todo $x \in M$.

**37$\frac{1}{2}$)** Sejam $M$ um subespaço próprio fechado do espaço de Hilbert $H$ e $x_0 \in H \setminus M$. Denotando por $P$ a projeção ortogonal sobre $M^\perp$, considere $\Lambda \in H^*$ definido por $\Lambda(x) = \dfrac{\langle x, Px_0 \rangle}{\|Px_0\|}$, $x \in H$. Mostre que $\Lambda(x_0) = \inf\limits_{y \in M} \|y - x_0\|$ e $\|\Lambda\| = 1$.

**38)** Dado um espaço de Hilbert $H$, definamos $J^H : H \to H^*$ por $[J^H(z)](x) = \langle x, z \rangle$, $x, z \in H$. Segue quase imediatamente dos axiomas do produto interno e da definição de norma que $J^H$ é uma isometria. Segue do Lema de Riesz que $J^H$ é sobrejetor.
(a) Mostre que para todos $z, y \in H$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $J^H(z + \alpha y) = J^H(z) + \bar{\alpha} J^H(y)$.
(b) Mostre que $\langle J^H y, J^H z \rangle_{H^*} = \langle z, y \rangle$ define um produto interno em $H^*$ e que a norma canônica de $H^*$, $\|\lambda\| = \sup\limits_{0 \neq x \in H} \dfrac{|\lambda(x)|}{\|x\|}$, provém deste produto interno.
(c) Segue do item (b) que $H^*$ é um espaço de Hilbert. Podemos portanto definir $J^{H^*} : H^* \to H^{**}$. Mostre que $J^{H^*} \circ J^H : H \to H^{**}$ é igual à aplicação canônica $H \ni x \mapsto \hat{x} \in H^{**}$.
(d) Conclua que $H \ni x \mapsto \hat{x} \in H^{**}$ é um isomorfismo de espaços de Hilbert.
(e) O que se pode afirmar quando $H$ é um espaço com produto interno, não-necessariamente completo?

**39)** Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador limitado. Mostre que $I + T^*T$ é injetor.

**40)** Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador limitado.
(a) Mostre que $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$.
(b) Mostre que $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T^*}$.

**41)** Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador limitado. Mostre que $\|T\| = \|T^*\|$.

**42)** Sejam $H$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador limitado tal que $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$. Mostre que $T = T^*$. `Dica`: Polarização para $[x, y] = \langle Tx, y\rangle$.

**43)** Sejam $H_1$ e $H_2$ espaços de Hilbert e seja $T : H_1 \to H_2$ um operador limitado. Denotemos por $\|\cdot\|$ ambas as normas e por $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ambos os produtos internos.
(a) Mostre que $T$ é uma isometria (isto é, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in H_1$) se, e somente se, $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, para todos $x, y \in H_1$. `Dica`: Polarização.
(b) Mostre que $T$ é uma isometria se, e somente se, $T^*T = I_{H_1}$.
(c) Mostre que $T$ é uma bijeção isométrica se, e somente se, $T^* = T^{-1}$.

**Definição**: Uma *isometria parcial* entre os espaços de Hilbert $H_1$ e $H_2$ é um operador limitado $Q : H_1 \to H_2$ tal que $\|Qx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\operatorname{Ker} Q)^{\perp}$.

**44)** Mostre que, se $Q : H \to H$ é uma isometria parcial, então $QQ^*Q = Q$.

**45)** Seja $Q : H \to H$ um operador limitado no espaço de Hilbert $H$ tal que $QQ^*Q = Q$.
(a) Mostre que a imagem de $QQ^*$ é fechada. `Sugestão`: Use o Problema 31.
(b) Mostre que $\operatorname{Im} QQ^* = \operatorname{Im} Q$.
(c) Mostre que $Q$ é uma isometria parcial.
`Sugestão`: Aplique o Problema 43 a $Q_0 : (\operatorname{Ker} Q)^{\perp} \to \operatorname{Im} Q$, $Q_0x = Qx$ para todo $x \in (\operatorname{Ker}\ Q)^{\perp}$.

**46)** Seja $U : H_1 \to H_2$ um operador unitário [1] Dado $T : H_1 \to H_1$ um operador limitado, considere $S : H_2 \to H_2$ $S = UTU^*$. Mostre que:
(a) $T = T^*$ se, e somente se, $S = S^*$.
(b) $TT^* = T^*T$ se, e somente se, $S^*S = SS^*$.
(c) $T^* = T^{-1}$ se, e somente se, $S^* = S^{-1}$.
(d) $T$ é uma isometria se, e somente se, $S$ é uma isometria.
(e) $T$ é uma isometria parcial se, e somente se, $S$ é uma isometria parcial.
(f) $T$ é uma projeção ortogonal se, e somente se, $S$ é uma projeção ortogonal.
(g) $T$ é positivo (isto é $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, para todo $x \in H_1$) se, e somente se, $S$ é positivo.
(h) $T = QQ^*$ para algum operador limitado $Q : H_1 \to H_1$ se, e somente se, $T = RR^*$ para algum

[1] Ou seja, $U$ é um isomorfismo de espaços de Hilbert; isto é, $U$ é uma bijeção linear e $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$, para todos $x, y \in H$.

operador limitado $R : H_2 \to H_2$

(i) O que se pode sacar dos oito ítens acima?

**47)** Um dos objetivos deste problema é mostrar que $\ell^1$ não é reflexivo.

(a) Para cada $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, mostre que um funcional linear contínuo $J^\infty(\mathbf{a}) : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ fica bem definido por $[J^\infty(\mathbf{a})](\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$, $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

(b) Mostre que $J^\infty : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ é uma bijeção liner isométrica.

(c) Para cada $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, mostre que um funcional linear contínuo $J^1(\mathbf{a}) : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ fica bem definido por $[J^1(\mathbf{a})](\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$, $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

(d) Mostre que $J^1 : \ell^1 \to (\ell^\infty)^*$ é uma isometria linear.

(e) Mostre que existe $\Lambda \in (\ell^\infty)^*$ tal que, para toda sequência convergente de números complexos $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\infty}$, $\Lambda(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} x_n$. [Este item requer o Teorema de Hahn-Banach]

(f) Verifique que $\Lambda$ não pertence à imagem de $J^1$ e conclua que $\ell^\infty$ não é reflexivo.

**48)** Mostre que existe $\lambda \in [C^b(\mathbb{R})]^*$ (veja o Problema 5) tal que, se $f \in C^b(\mathbb{R})$ e existem os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, então $\lambda(f) = 2 \lim_{x\to-\infty} f(x) - 3 \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**49)** Seja $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ um subconjunto linearmente independente do espaço de Banach $X$. Mostre que existem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \in X^*$ tais que $\lambda_j(x_k) = 0$ se $j \neq k$ e $\lambda_j(x_j) = 1$ para todo $j$.

**50)** Seja $M$ um subconjunto do espaço de Banach $X$ e seja $[M]$ o subespaço de $X$ gerado por $M$. Mostre que $[M]$ é denso em $X$ se, e somente se, $\{\lambda \in X^*;\ \lambda(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\} = \{0\}$.

`Observação`: No caso em que $X$ é um espaço de Hilbert, este resultado é equivalente a dizer que o subespaço $[M]$ é denso se, e somente se, $M^\perp = \{x \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in M\}$ é igual a $\{0\}$. No caso em que $X$ é um espaço de Banach qualquer, denota-se por $M^\perp$ o subespaço de $X^*$ dos funcionais lineares contínuos que se anulam em $M$.

**51)** Considere $f : \mathbb{C} \to X$, sendo $X$ um espaço de Banach.

(a) Mostre que, se $f$ é limitada, ou seja, se $\sup_{z\in\mathbb{C}} \|f(z)\| < \infty$, então, para todo $\lambda \in X^*$, $\lambda \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é limitada.

(b) Mostre que, se $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, então para todo $\lambda \in X^*$, $\lambda \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é inteira.

(c) Mostre que, se $\lambda \circ f$ é constante para todo $\lambda \in X^*$, então $f$ é constante

(d) Use o Teorema de Liouville para funções complexas para provar o Teorema de Liouville para funções tomando valores em um espaço de Banach: mostre que, se $f : \mathbb{C} \to X$ é limitada e se, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, existe o limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$, então $f$ é constante.

**51$\frac{1}{2}$)** Seja $X$ um espaço de Banach.
(a) Suponha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $X$ tal que $(\lambda(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, para todo $\lambda \in X^*$. Mostre que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. `Sugestão`: use o princípio da limitação uniforme em $X^*$ e o fato de que a aplicação canônica de $X$ em $X^{**}$ é uma isometria.
(b) Seja $E \subset X$ tal que $\{\lambda(x);\, x \in E\}$ é limitado para todo $\lambda \in X^*$. Mostre que $\{\|x\|;\, x \in E\}$ é limitado. `Dica`: Isto é pouco mais do que a contrapositiva do item (a).

**52)** Sejam $X$ um espaço vetorial normado e $Y$ um subespaço fechado de $X$. Para cada $x \in X$, defina $[x] = \{x + y;\, y \in Y\}$. Seja $X/Y = \{[x];\, x \in X\}$.
(a) Verifique que, munido de operações canonicamente definidas, $X/Y$ é um espaço vetorial.
(b) Mostre que $\|[x]\| = \inf\{\|x + y\|;\, y \in Y\}$ é uma norma em $X/Y$.
(c) Mostre que $X \ni x \longmapsto [x] \in X/Y$ é uma aplicação linear contínua.
(d) Seja $Z$ um subespaço de $X$ de dimensão finita, $Z \cap Y = \{0\}$. Mostre que a $Y \oplus Z$ é fechado em $X$. `Dica`: É fechada a imagem inversa de um fechado por uma aplicação contínua.

---

Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach. Demonstraremos em sala os quatro seguintes resultados.

**Teorema da Aplicação Aberta**: Se $T : X \to Y$ é uma aplicação linear sobrejetora e $A \subset X$ é aberto em $X$, então $T(A) = \{Tx;\, x \in A\}$ é aberto em $Y$.

**Corolário**: Se $T : X \to Y$ é uma bijeção linear contínua, então $T^{-1} : Y \to X$ é contínua.

Munido da norma $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$, $(x, y) \in X \times Y$, o produto cartesiano $X \times Y$ torna-se um espaço de Banach (Problema 21).

**Teorema do Gráfico Fechado**: Seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Se $\{(x, y);\, y = Tx,\, x \in H\}$ é fechado em $(X \times Y, \|\cdot\|_1)$, então $T$ é contínua.

**Corolário**: Suponha que $y = 0$ sempre que $x_n \to 0$ em $X$ e $Tx_n \to y$ em $Y$. Então a aplicação linear $T : X \to Y$ é contínua.

---

**53)** Seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear contínua entre espaços de Banach. Mostre que a imagem de $T$ é fechada se, e somente se, existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in X$.

**54)** Seja $D = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2;\ (k\,x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}$ e considere $T : D \to \ell^2$, $T(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (k\,x_k + i\,x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
(a) Mostre que o gráfico de $T$, $\{(x, Tx);\ x \in D\}$, é um subespaço fechado de $\ell^2 \times \ell^2$.
(b) Mostre que $T$ não é limitado. Por que isto não contraria o Teorema do Gráfico Fechado?
(c) Mostre que $T$ é uma bijeção, e que $T^{-1} : \ell^2 \to D \subset \ell^2$ é limitado.

**55)** Suponha que o espaço de Banach $X$ possa ser escrito como soma direta de dois subespaços fechados, $X = Y \oplus Z$. Considere o produto cartesiano $X \times Y$ munido da norma $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$.
(a) Mostre que a $T : Y \times Z \longrightarrow X$, $T(y, z) = y + z$, é uma bijeção linear contínua com inversa contínua.
(b) Mostre que existem operadores limitados $P$ e $Q$ em $X$ satisfazendo $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $P + Q = I$, $\operatorname{Im} P = Y$ e $\operatorname{Im} Q = Z$. `Dica`: Considere as projeções canônicas de $Y \times Z$ e o operador $T$ do item (a).
(c) Dados $A : Y \to Y$ e $B : Z \to Z$ limitados, mostre que $A \oplus B : X \to X$ definido por $(A \oplus B)(y + z) = Ay + Bz$, $y \in y$ e $z \in Z$, é um operador linear limitado.
(d) Dados $\lambda \in Y^*$ e $\rho \in Z^*$, defina $\lambda \oplus \rho : X \to \mathbb{C}$ por $(\lambda \oplus \rho)(y + z) = \lambda(y) + \rho(z)$, $y \in Y$ e $z \in Z$. Mostre que $\lambda \oplus \rho \in X^*$.

**56)** Seja $Y$ um subespaço fechado próprio do espaço de Banach $X$. Dado $\lambda \in Y^*$, mostre que existem infinitos $\Lambda \in X^*$ que estendem $\lambda$. `Sugestão`: Considere o subespaço $\tilde{Y}$ gerado por $Y$ e um elemento $x_0 \notin Y$. Use o Problema 52-d para mostrar que $\tilde{Y}$ é completo. Em seguida, use o Problema 55-d e o Teorema de Hahn-Banach.

**57)** Seja $C : X \to X^{**}$ o mergulho canônico do espaço de Banach $X$ em seu bidual: $C(x) = \widehat{x}$, $\widehat{x}(\lambda) = \lambda(x)$, para todos $x \in X$ e $\lambda \in X^*$. Seja $D : X^* \to X^{***}$ o mergulho canônico de $X^*$ em seu bidual: $D(\lambda) = \widehat{\lambda}$, $\widehat{\lambda}(\xi) = \xi(\lambda)$ para todos $\lambda \in X^*$ e $\xi \in X^{**}$.
(a) Para cada $\rho \in X^{***}$, considere $\lambda_\rho = \rho \circ C \in X^*$. Mostre que $\widehat{\lambda}_\rho(\widehat{x}) = \rho(\widehat{x})$ para todo $x \in X$.
(b) Mostre que, se $X$ é reflexivo, então $X^*$ também é reflexivo.
(c) Suponha que $X$ não é reflexivo e seja $\xi \in X^{**}$ tal que $\xi \neq \widehat{x}$ para todo $x \in X^*$. Tome um $\lambda_0 \in X^*$ e mostre que existe $\rho \in X^{***}$ tal que $\rho(\widehat{x}) = \widehat{\lambda_0}(\widehat{x})$ para todo $x \in X$ e $\rho(\xi) \neq \widehat{\lambda_0}(\xi)$. `Dica`: 52-d e 55-d.
(d) Mostre que, se os funcionais lineares $\widehat{\lambda_1}$ e $\widehat{\lambda_2}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in X^*$, coincidem em $\{\widehat{x};\ x \in X\}$, então $\lambda_1 = \lambda_2$
(e) Conclua que, se $X$ não é reflexivo, então o funcional $\rho \in X^{***}$ cuja existência foi demonstrada no item (c) não pertence a $\{\widehat{\lambda};\ \lambda \in X^*\}$.
(f) Conclua que $X$ é reflexivo se, e somente se, $X^*$ é reflexivo.
(g) Mostre que $\ell^\infty$ não é reflexivo.

**59)** Seja $T$ um operador limitado e autoadjunto no espaço de Hilbert $H$.
(a) Mostre que $\|(T \pm iI)x\|^2 \geq \|x\|^2$ para todo $x \in H$
(b) Mostre que $T + iI$ e $T - iI$ são injetores e têm imagens fechadas.
(c) Mostre que $T + iI$ e $T - iI$ são inversíveis, e que suas inversas são operadores limitados.
`Sugestão`: Use o Problema 40 e o corolário do Teorema da Aplicação Aberta enunciado acima.

(d) Mostre que $U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$ é unitário.

`Observação`: A aplicação $T \longmapsto U$ definida no Problema 52 é chamada de *transformada de Cayley*. No caso particular em que $H = \mathbb{C}$, o Problema 52 se resume a dizer que $\frac{t-i}{t+i}$ é um complexo de valor absoluto igual a 1, para todo $t \in \mathbb{R}$.

**60)** Seja $H$ um espaço de Hilbert e sejam $T : H \to H$ e $S : H \to H$ aplicações satisfazendo $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$, para todo $x, y \in H$. (a) Mostre que $T$ e $S$ são lineares. (b) Mostre que $T$ e $S$ são limitadas e $T^* = S$.

**61)** Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $T_n \in B(X, Y)$ tais que $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, para todo $x \in X$. Mostre que existe $T \in B(X, Y)$ tal que $\lim_{n \to \infty} T_n x = Tx$, para todo $x \in X$.

**62)** Sejam $X$ um espaço de Banach, $S_n, T_n, S$ e $T \in B(X)$ tais que $\lim_{n \to \infty} S_n x = Sx$ e $\lim_{n \to \infty} T_n x = Tx$, para todo $x \in X$. Mostre que $\lim_{n \to \infty} S_n T_n x = STx$, para todo $x \in X$.

——- `Espaços de Fréchet` ——-

Seja $X$ um espaço vetorial (real ou complexo) munido das seminormas $\{p_j;\ j \in \mathbb{N}\}$. Dizemos que $X$ é um *espaço de Fréchet* se $X$ é completo com a métrica (veja o Problema 11)

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x - y)}{1 + p_j(x - y)}, \quad x, y \in X.$$

Todo espaço de Banach $X$ é um espaço de Fréchet com as seminormas $p_1(x) = \|x\|$ e $p_j = 0$, $j > 1$. Uma sequência $x_n \in X$ converge para $x$ na métrica $d$ se, e somente se, converge para $x$ na métrica da norma.

O Problema 12 mostra que $C(\mathbb{R})$ pode ser munido de uma estrutura de espaço de Fréchet.

---

**63)** Seja $C^\infty(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ possuindo derivadas de todas as ordens. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $p_j$ a seminorma $p_j(f) = \sup\{|f^{(k)}(x)|;\ 0 \le k \le j,\ |x| \le j\}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
(a) Mostre que $X$ munido da família de seminormas $\{p_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ é um espaço de Fréchet.
(b) Mostre que $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ em $C^\infty(\mathbb{R})$ se, e somente se, para todo todo inteiro $k \ge 0$, $f_n^{(k)}$ converge para $f^{(k)}$ uniformemente sobre compactos (isto é, $\lim_{n \to \infty} \sup\{|f^{(k)}(x) - f_n^{(k)}(x)|;\ x \in K\} = 0$, para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto).

**64)** Seja $\mathbf{s}$ os espaço de todas as sequências complexas. Para cada $j \in \mathbb{N}$, considere a seminorma $p_j((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = |x_j|$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{s}$. Mostre que $\mathbf{s}$ é um espaço de Fréchet com as seminormas $\{p_j;\ j \in \mathbb{N}\}$.

**65)** Seja $X$ um espaço de Fréchet com as seminormas $\{p_j;\, j \in \mathbb{N}\}$.
(a) Mostre que $\dfrac{1}{2^k} p_k(x-y) \leq d(x,y) \leq p_1(x-y) + \cdots + p_j(x-y) + \dfrac{1}{2^j}$, $j, k \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$.
(b) Mostre que $0$ é um ponto interior de um subconjunto $A \subseteq X$ se, e somente se, existem $\epsilon > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que $x \in A$ sempre que $p_1(x) + \cdots + p_j(x) < \epsilon$.
(c) Mostre que $A$ é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$, $0$ é um ponto interior de $\{y - x;\, y \in A\}$.

**66)** Sejam $X$ um espaço de Fréchet com as seminormas $\{p_j;\, j \in \mathbb{N}\}$, $Y$ um espaço de Fréchet com as seminormas $\{q_j;\, j \in \mathbb{N}\}$ e $T : X \to Y$ uma aplicação linear.
(a) Mostre que, se $T$ é contínua em $0$, então $T$ é contínua em $X$.
(b) Suponha que, para todo $k \in N$, existem $C > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que $q_k(Tx) \leq C[p_1(x) + \cdots + p_j(x)]$, para todo $x \in X$. Mostre então que $T$ é contínua.
(c) Suponha que $T$ é contínua. Mostre que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $\delta > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que

$$p_1(x) + \cdots + p_j(x) < \delta \quad \Longrightarrow \quad q_k(Tx) < 1$$

(d) Suponha que $T$ é contínua e sejam $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ como no item (c). Mostre que, se $p_1(x) + \cdots + p_j(x) = 0$, então $q_k(Tx) = 0$. `Dica`: Substitua $tx$ no lugar de $x$.
(e) Suponha que $T$ é contínua. Mostre que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $C > 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que $q_k(Tx) \leq C[p_1(x) + \cdots + p_j(x)]$, para todo $x \in X$. `Sugestão`: Considere separadamente o caso em que $p_1(x) + \cdots + p_j(x) = 0$ e o caso em que $p_1(x) + \cdots + p_j(x) \neq 0$

**67)** Considere $C(\mathbb{R})$ e $C^\infty(\mathbb{R})$ munidos de suas estruturas de espaço de Fréchet definidas nos Problemas 12 e 63. (a) Mostre que a inclusão de $C^\infty(\mathbb{R})$ em $C(\mathbb{R})$ é contínua. (b) Mostre que $\lambda : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $\lambda(f) = f'(0)$, é contínuo mas não possui extensão linear contínua a $C(\mathbb{R})$.

**68)** Sejam $X$ um espaço de Fréchet com as seminormas $\{p_j;\, j \in \mathbb{N}\}$. Mostre que cada $p_j : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

**69)** Mostre que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $Tf = f^{(k)}$, é contínua.

**70)** Mostre que, para toda $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $M_a : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $M_a f = af$, é contínua.