MAT 220 - Cálculo 4 - IAG

3ª Prova - 7 de dezembro de 2017

Questão 1) (2pts) Considere $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$.

(a) Determine a série de Taylor de f em torno de $z = 0$.

(b) Determine o raio de convergência da série de Taylor de f em torno de $z = 0$.

Questão 2) (2 pts) Sejam a, b, c e d números complexos distintos.

Considere $p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$ e $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$. Justifique ou deduza as seguintes afirmações:

(a) f tem um polo simples em a.

(b) O resíduo de f em a é igual a $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}$.

Questão 3) (3 pts) Considere $p(z) = z^4 + 4$ e $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$. Para $R > 2$, seja H_R o caminho $\{Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$ e seja C_R o contorno (fechado e positivamente orientado) que consiste de H_R seguido do intervalo fechado $[-R, R]$.

(a) Calcule os resíduos de f nos dois polos situados no interior de C_R.

(b) Calcule $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$.

(c) Mostre que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{H_R} f(z)\,dz = 0$.

(d) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Questão 4) (3 pts) Considere $g(z) = e^{z^2} - 1$ e $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$.

(a) Determine os dois primeiros termos não-nulos da série de Taylor de g em torno de $z = 0$.

(b) Determine os dois primeiros termos não-nulos da série de Laurent de f em torno de $z = 0$.

(c) Calcule o resíduo de f em $z = 0$.

(d) Calcule $\displaystyle\lim_{z\to 0} z^2 f(z)$.

(e) Calcule $\displaystyle\lim_{z\to 0} [z^2 f(z)]''$.