MAT 0334 - Análise Funcional

2^a Prova - 16 de maio de 2017

Questão 1) (1,5 pt) (a) Mostre que a aplicação $C([0,\pi]) \ni f \longmapsto \int_0^\pi f(x)\,dx$ possui uma extensão linear contínua $I : L^2([0,\pi]) \to \mathbb{C}$. (b) Calcule a norma de I.

Questão 2) (3,5 pts) Para cada inteiro positivo n, considere $f_n \in C([0,\pi])$, $f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)$. Seja M o espaço vetorial gerado por $S = \{f_n;\, n = 1, 2, \cdots\}$ e seja $\overline{M}$ o fecho de M em $L^2([0,\pi])$. Seja $I : L^2([0,\pi]) \to \mathbb{C}$ o funcional definido na Questão 1.

(a) Obtenha um conjunto ortonormal completo de $L^2([0,\pi])$ que contenha S.

(b) Mostre que $\overline{M} = \{f \in L^2([0,\pi]);\, I(f) = 0\}$.

(c) Mostre que $M^\perp$ tem dimensão igual a 1 e encontre um gerador de $M^\perp$.

`Sugestão`:

Dada $f \in C([0,\pi])$, considere $\tilde{f} \in C([-\pi,\pi])$ satisfazendo, para todo $x \in [0,\pi]$, $\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x) = f(x)$.

Questão 3) (2,5 pts) Sejam X um espaço vetorial com produto interno, $a \in X$, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = \delta$. Suponha, além disso, que $\left\| \frac{x_n + x_m}{2} - a \right\| \geq \delta$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Questão 4) (2,5 pts) Sejam H um espaço de Hilbert e $P : H \to H$ um operador linear limitado satisfazendo $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ para todos $x, y \in H$. Sejam $\operatorname{Ker} P$ e $\operatorname{Im} P$ o núcleo e a imagem de P.

(a) Mostre que $(\operatorname{Im} P)^\perp = \operatorname{Ker} P$.

(b) Suponha que, além das hipóteses enunciadas acima, valha também que $P^2 = P$. Mostre que $\operatorname{Im} P$ é fechada e que P é a projeção ortogonal sobre $\operatorname{Im} P$.