MAT 0334 - Análise Funcional - 1^a Prova - 4 de abril de 2017

Questão 1) (1 pt)

Mostre que $X = \{f \in C([0,1]);\ f(0) = f(1) = 0\}$ é um subespaço fechado de $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

`Solução`: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in X$, uma sequência convergente em $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$, $f_n \to f$. Queremos mostrar que $f \in X$. Segue de $f_n \to f$ que $||f - f_n||_\infty \to 0$. Além disso, temos

$$|f(0) - f_n(0)| \leq ||f - f_n||_\infty \quad \text{e} \quad |f(1) - f_n(1)| \leq ||f - f_n||_\infty.$$

Logo, $f_n(0) \to f(0)$ e $f_n(1) \to f(1)$. Como, para todo n, $f_n(0) = f_n(1) = 0$, segue que $f(0) = f(1) = 0$; ou seja, $f \in X$, como queríamos.

Questão 2) (2 pts) Seja $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty} n\,|x_n| < \infty\}$.

(a) Mostre que X é um subespaço próprio de ℓ^1.

(b) Mostre que X é denso em ℓ^1.

`Solução`: (a) X está contido em ℓ^1, pois $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\,|x_n|$, para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Que X é um subespaço de ℓ^1 segue de $\mathbf{0} \in X$ e das relações

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\,|x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n\,|y_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\,|\lambda x_n| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} n\,|x_n|,$$

válidas para todos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Para provar que X é próprio, consideremos a sequência $\mathbf{h} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Segue de $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ que $h \notin X$.

(b) Para provar que X é denso em ℓ^1, basta provar que X contém um subconjunto denso de ℓ^1. Seja $D = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n \neq 0$ apenas para um número finito de valores de $n\}$. É claro que $D \subset X$. Para provar que D é denso em ℓ^1, para cada $\mathbf{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, considere

$$\mathbf{x}^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}, \quad x_k^n = \begin{cases} x_k, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}.$$

É claro que $\mathbf{x}^n \in D$ para todo n. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^n||_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| = 0, \quad \text{pois} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty;$$

isto é, $\mathbf{x}^n \to \mathbf{x}$. Isto prova que D é denso em ℓ^1.

Questão 3) (3 pts) No espaço vetorial normado $(X, ||\cdot||)$, defina $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \dfrac{||x-y||}{1 + ||x-y||}$.

(a) Mostre que d é uma métrica em X.

(b) Mostre que $d(x,y) \leq ||x-y||$ para todos x e y em X.

(c) Mostre que, se $d(x,y) < \frac{1}{2}$, então $||x-y|| \leq 2\,d(x,y)$.

(d) Mostre que o espaço métrico (X, d) é completo se, e somente se, o espaço vetorial normado $(X, ||\cdot||)$ é completo.

`Solução`: (a) Segue imediatamente das propriedades da norma que, para todo x e para todo y em X, $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Dados x, y e z em X, a desigualdade triangular

$$\frac{||x-y||}{1+||x-y||} \leq \frac{||x-z||}{1+||x-z||} + \frac{||z-y||}{1+||z-y||}$$

é equivalente a

$$||x-y||\,(1+||x-z||)\,(1+||z-y||) \;\leq\; ||x-z||\,(1+||x-y||)\,(1+||z-y||) + ||z-y||\,(1+||x-y||)\,(1+||x-z||),$$

que é equivalente a

$$||x-y|| \;\leq\; ||x-z|| \,+\, ||z-y|| \,+\, ||x-y||\,||x-z||\,||z-y|| \,+\, 2||x-z||\,||y-z||,$$

que é verdadeira, pois as desigualdades

$$||x-y|| \;\leq\; ||x-z|| + ||z-y|| \quad \text{e} \quad 2||x-z||\,||y-z|| \,+\, ||x-y||\,||x-z||\,||z-y|| \;\geq\; 0$$

são verdadeiras.

(b) $d(x, y) = \dfrac{||x-y||}{1+||x-y||} \leq ||x-y||$, pois $1 + ||x-y|| \geq 1$.

(c) Segue da definição $d(x, y) = \dfrac{||x-y||}{1+||x-y||}$ que, para todo x e para todo y em X, $d(x, y) < 1$ e

$$||x-y|| = \frac{d(x,y)}{1-d(x,y)} \quad .$$

Se $d(x, y) < \frac{1}{2}$, então $1 - d(x, y) > \frac{1}{2}$ e, portanto, $||x-y|| \;\leq\; 2\,d(x, y)$.

(d) Basta provar que, dada qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$, e dado $x \in X$, temos:

(1) $$\lim_{n\to\infty} ||x-x_n|| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$$

e

(2) $$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é de Cauchy em } (X, ||\cdot||) \quad \Longleftrightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é de Cauchy em } (X, d).$$

As "implicações $\Longrightarrow$" em (1) e em (2) decorrem imediatamente das desigualdades

$$d(x, x_n) < ||x-x_n|| \qquad \text{e} \qquad d(x_n, x_m) < ||x_n - x_m||,$$

que decorrem do item (b).

Suponha que $x_n \to x$ em (X, d). Então existe N tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{2}$ para todo $n \geq N$. Daí, se $n \geq N$, segue do item (c) que $||x-x_n|| \;<\; 2\,d(x, x_n) \;\to\; 0$. Isto conclui a demonstração de (1).

Suponha agora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em (X,d). Dado $\epsilon>0$, tome N tal que $d(x_n,x_m)<\max\{\frac{1}{2},\frac{\epsilon}{2}\}$ para todos $n,m\geq N$. Segue então do item (c) que, para todos $n,m\geq N$, $||x_n-x_m||<2\,d(x_n,x_m)<\epsilon$. Isto prova que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $(X,||\cdot||)$, como queríamos.

Questão 4) (4 pts) No espaço vetorial $X=C^1(\mathbb{R})\cap C_c(\mathbb{R})$ das funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe C^1 e de suporte compacto, defina $||f||_{1,2}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx\,+\,\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$.

Escolha [1] uma sequência $\chi_n\in X$, $n\geq 1$, tal que $0\leq\chi_n(x)\leq 1$ e $|\chi_n'(x)|\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e que, além disso, $\chi_n(x)=0$ para todo $|x|\geq n+1$ e $\chi_n(x)=1$ para todo $|x|\leq n-1$.

(a) Mostre que $||\cdot||_{1,2}$ é uma norma em X.
(b) Mostre que, se $f_n\to f$ em X, então, para todo intervalo fechado e limitado I, $f_n|_I\to f|_I$ em $(C(I),||\cdot||_2)$.
(c) Para cada $f\in C^1(\mathbb{R})$, defina $f_n=\chi_n f$, $n\geq 1$ (é claro que $f_n\in X$). Mostre que, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $(X,||\cdot||_{1,2})$, então f tem suporte compacto.
(d) Mostre que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n(x)=\frac{\chi_n(x)}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$, é de Cauchy em $(X,||\cdot||_{1,2})$. `Sugestão`: use sem demonstrar que as integrais impróprias $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx$ são finitas.
(e) Conclua que $(X,||\cdot||_{1,2})$ não é completo.

`Solução`: (a) É claro que $||f||_{1,2}\geq 0$ e $||\lambda f||_{1,2}=|\lambda|\,||f||_{1,2}$, para toda $f\in X$ e para todo $\lambda\in\mathbb{C}$. Se $||f||_{1,2}=0$, então $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx=0$, então f é identicamente nula. Resta provar a desigualdade triangular.

Para cada $f\in C_c(\mathbb{R})$, definamos $||f||_2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$. Dadas $f,g\in C_c(\mathbb{R})$, vale a desigualdade $||f+g||_2\leq||f||_2+||g||_2$ [para ver por quê, basta tomar algum intervalo fechado e limitado I que contenha o suporte de f e o suporte de g e usar que $||\cdot||_2$ define uma norma em $C(I)$]. Assim, para toda $f\in X$, podemos escrever $||f||_{1,2}=\left(||f||_2^2+||f'||_2^2\right)^{1/2}$. Dadas $f,g\in X$, temos

$$||f+g||_{1,2}=\left(||f+g||_2^2+||f'+g'||_2^2\right)^{1/2}\leq\left[(||f||_2+||g||_2)^2+\left(||f'||_2+||g'||_2\right)^2\right]^{1/2}\leq$$

$$\left(||f||_2^2+||f'||_2^2\right)^{1/2}+\left(||g||_2^2+||g'||_2^2\right)^{1/2}=||f||_{1,2}+||g||_{1,2}$$

(a última desigualdade é a desigualdade triangular para a norma euclideana em $\mathbb{R}^2$ aplicada aos vetores $(||f||_2,||f'||_2)$ e $(||g||_2,||g'||_2)$). Isto conclui a verificação de que $||\cdot||_{1,2}$ é de fato uma norma.

(b) Isto segue imediatamente da estimativa

$$\left(\int_I|f(x)-f_n(x)|^2\right)^{1/2}dx\leq\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_n(x)|^2\right)^{1/2}dx\leq||f||_{1,2}.$$

[1]Podemos tomar, por exemplo, $\chi_n(x)=\int_{-(n+1)}^{x}[\varphi(t+n)-\varphi(t-n)]\,dt$, $\varphi(t)=\begin{cases}1-|t| & ,\ |t|\leq 1\\ 0 & ,\ |t|>1\end{cases}$.

(c) Suponha que $f_n \to g$ em X. Seja $[a,b]$ um intervalo fechado fora do qual g se anula. Seja I um intervalo fechado e limitado arbitrário disjunto de $[a,b]$. Dado que $g|_I \equiv 0$, segue do item (b) que $f_n|_I \to 0$ em $(C(I), ||\cdot||_2)$. Para todo n suficientemente grande, $\chi_n|_I \equiv 1$, logo $f|_I = f_n|_I$, logo $f|_I \equiv 0$. Isto prova que f se anula fora de I, logo f tem suporte compacto.

(d) Usando que $\chi_n - \chi_m$ e $\chi_n' - \chi_m'$ se anulam fora de $[-m-1, -n+1] \cup [n-1, m+1]$, vem que, para $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$, $||f_n - f_m||_{1,2}$ é igual a

$$\left(\int_{n-1\le|x|\le m+1} \frac{|\chi_n(x) - \chi_m(x)|^2}{x^2+1}\, dx \; + \int_{n-1\le|x|\le m+1} \left| \frac{\chi_n'(x) - \chi_m'(x)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{(\chi_n(x) - \chi_m(x))\, x}{(x^2+1)^{3/2}} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Usando que, para todo x, $0 \le \chi_n(x) - \chi_m(x) \le 1$ e $|\chi_n'(x) - \chi_m'(x)| \le |\chi_n'(x)| + |\chi_m'(x)| \le 2$, e a desigualdade triangular [2] para a norma $||\cdot||_2$ em $C([-m-1, -n+1] \cup [n-1, m+1])$, vem:

(3) $$||f_n - f_m||_{1,2} \le$$

$$\left\{ \int_{n-1\le|x|\le m+1} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \left[\left(\int_{n-1\le|x|\le m+1} \frac{4}{x^2+1}\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_{n-1\le|x|\le m+1} \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \int_{n-1}^{m+1} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \left[\left(\int_{n-1}^{m+1} \frac{4}{x^2+1}\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_{n-1}^{m+1} \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Usando a informação de que as integrais impróprias $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, são finitas, concluímos que as sequências $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{x^2+1}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^n \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\, dx$ são convergentes e, portanto, de Cauchy. Segue então da estimativa (3) que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que: $m > n > N \Longrightarrow \displaystyle\int_n^m \frac{1}{x^2+1} dx < \epsilon^2$ e $\displaystyle\int_n^m \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx < \epsilon^2$. Então, se $m > n > N+1$, $||f_n - f_m||_{1,2} < 5\epsilon$.

(e) Se a sequência de Cauchy do item (d) fosse convergente, a função $s(x) = (1+x^2)^{-1/2}$ se anularia fora de um intervalo fechado e limitado, pelo item (c). Logo, X não é completo.

[2] Nesta nota de rodapé mostramos como a desigualdade $||f+g||_2 \le ||f||_2 + ||g||_2$ para funções contínuas definidas em um intervalo fechado e limitado, provada em sala, implica a mesma desigualdade para funções contínuas definidas na união disjunta de dois tais intervalos. Sejam I e J dois intervalos fechados limitados disjuntos. Usando a triangular para $(C(I), ||\cdot||_2)$, para $(C(J), ||\cdot||_2)$, e para a norma euclideana em $\mathbb{R}^2$, vem:

$$\left(\int_I |f+g|^2 + \int_J |f+g|^2 \right)^{1/2} \le \left\{ \left[\left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_I |g|^2 \right)^{1/2} \right]^2 + \left[\left(\int_J |f|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_J |g|^2 \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\le \left(\int_I |f|^2 + \int_J |f|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_I |g|^2 + \int_J |g|^2 \right)^{1/2}.$$