Determinantes

2

Conteúdo do Capítulo

INTRODUÇÃO: Nós todos estamos familiarizados com funções do tipo $f(x) = \text{sen}\, x$ e $f(x) = x^2$, que associam um número real $f(x)$ a um valor real da variável x. Como ambos x e $f(x)$ tomam apenas valores reais, tais funções são descritas como funções reais de uma variável real. Nesta seção nós vamos estudar "funções determinante," que são funções reais de uma variável matricial, o que significa que associam um número real $f(X)$ a uma matriz quadrada X. Nosso trabalho com as funções determinante vai gerar aplicações importantes à teoria de sistemas de equações lineares e também vai nos levar a uma fórmula explícita da inversa de uma matriz invertível.

2.1 A FUNÇÃO DETERMINANTE

Como observamos na introdução a este capítulo, um "determinante" é um certo tipo de função que associa um número real a uma matriz quadrada. Nesta seção nós iremos definir esta função e aplicá-la a matrizes 2×2 e 3×3.

Lembre do Teorema 1.4.5 que diz que a matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se $ad - bc \neq 0$. A expressão $ad - bc$ ocorre com tanta freqüência em Matemática que recebeu um nome: é o ***determinante*** da matriz A e é denotado pelo símbolo det (A). Com esta notação, a fórmula para A^{-1} dada no Teorema 1.4.5 é

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Um dos objetivos deste capítulo é o de obter análogos desta fórmula para matrizes quadradas de ordens maiores. Isto vai requerer que nós estendamos o conceito de um determinante para matrizes quadradas de qualquer tamanho. Para fazer isto nós precisamos de alguns resultados preliminares sobre permutações.

Definição

Uma ***permutação*** do conjunto de inteiros $\{1, 2, ..., n\}$ é um rearranjo destes inteiros em alguma ordem sem omissões ou repetições.

EXEMPLO 1 Permutações de Três Inteiros

Existem seis permutações distintas do conjunto de inteiros $\{1, 2, 3\}$, a saber,

(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	(3, 1, 2)
(1, 3, 2)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1)

♦

Um método conveniente de listar sistematicamente as permutações é usar uma *árvore de permutações*. Este método é ilustrado no nosso próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Permutações de Quatro Inteiros

Liste todas as permutações do conjunto de inteiros $\{1, 2, 3, 4\}$.

Solução.

Considere a Figura 2.1.1. Os quatro pontos marcados 1, 2, 3, 4 no alto da figura, representam as possíveis escolhas para o primeiro número da permutação. Os três ramos saindo destes pontos representam as possíveis escolhas para a segunda posição na permutação. Assim, se a permutação começa com (2, –, –, –), as três possibilidades para a segunda posição são 1, 3 e 4. Os dois ramos saindo de cada ponto na segunda posição representam as possíveis escolhas para a terceira posição. Assim, se a permutação começa com (2, 3, –, –), as duas possíveis escolhas para a terceira posição são 1 e 4. Finalmente, o ramo simples saindo de cada ponto da terceira posição representa a única escolha possível para a quarta posição. Assim, se a permutação começa com (2, 3, 4, –), a única escolha possível para a quarta posição é 1. As diferentes permutações podem agora ser listadas traçando todos os possíveis caminhos pela arvore desde a primeira posição até a última posição. Nós obtemos a seguinte lista neste processo.

(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 2, 3)
(1, 2, 4, 3)	(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 3, 2)
(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)	(3, 2, 1, 4)	(4, 2, 1, 3)
(1, 3, 4, 2)	(2, 3, 4, 1)	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)
(1, 4, 2, 3)	(2, 4, 1, 3)	(3, 4, 1, 2)	(4, 3, 1, 2)
(1, 4, 3, 2)	(2, 4, 3, 1)	(3, 4, 2, 1)	(4, 3, 2, 1)

♦

Deste exemplo vemos que existem 24 permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$. Este resultado poderia ter sido antecipado sem listar todas as permutações com o seguinte argumento. Como a primeira posição pode ser preenchida de quatro maneiras e então a segunda posição de três maneiras, existem $4 \cdot 3$ maneiras de preencher as duas primeiras posições. Como a terceira posição pode ser preenchida de duas maneiras, existem $4 \cdot 3 \cdot 2$ maneiras de preencher as três primeiras posições. Finalmente, como a última posição agora só pode ser preenchida de uma única maneira, existem $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de preencher todas as quatro posições. Em geral, existem $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ permutações distintas do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$.

Nós vamos denotar por $(j_1, j_2, ..., j_n)$ uma permutação arbitrária do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Aqui, j_1 é o primeiro inteiro na permutação, j_2 o segundo, e assim por diante. Ocorre uma ***inversão*** numa permutação sempre que um inteiro maior precede um menor. O número total de inversões que pode ocorrer numa permutação pode ser obtido como segue: (1) encontre o número de inteiros que são menores que j_1 e que estão depois de j_1 na permutação; (2) encontre o número de inteiros que são menores que j_2 e que estão depois de j_2 na permutação. Continue este processo para $j_3, ..., j_{n-1}$. A soma destes números será o número total de inversões na permutação.

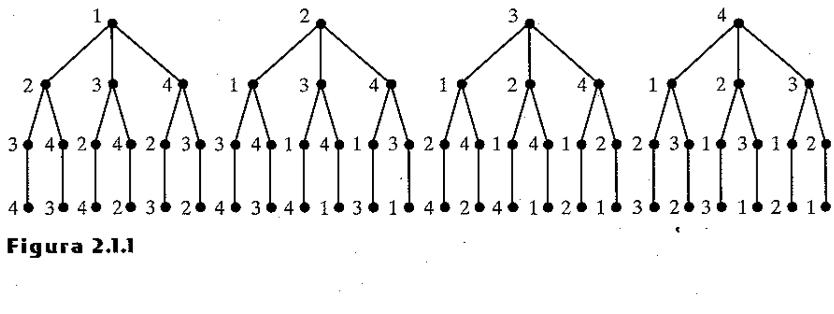


Figura 2.1.1

EXEMPLO 3 Contando Inversões

Determine o número de inversões nas seguintes permutações.

(a) (6, 1, 3, 4, 5, 2) (b) (2, 4, 1, 3) (c) (1, 2, 3, 4)

Solução.

(a) O número de inversões é 5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8.
(b) O número de inversões é 1 + 2 + 0 = 3.
(c) Não há inversões nesta permutação. ♦

Definição

Uma permutação é chamada ***par*** se o número total de inversões é um inteiro par e é chamada ***ímpar*** se o número total de inversões é ímpar.

EXEMPLO 4 Classificando Permutações

A tabela a seguir classifica as permutações de {1, 2, 3} como pares e ímpares.

Permutação	Número de Inversões	Classificação
(1, 2, 3)	0	par
(1, 3, 2)	1	ímpar
(2, 1, 3)	1	ímpar
(2, 3, 1)	2	par
(3, 1, 2)	2	par
(3, 2, 1)	3	ímpar

♦

Definição de um Determinante Se A é uma matriz de tamanho $n \times n$, dizemos que um produto de n entradas de A, tais que não há duas de mesma linha ou mesma coluna de A, é um ***produto elementar*** da matriz A.

EXEMPLO 5 Produtos Elementares

Liste todos os produtos elementares das matrizes

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Solução (a). Como cada produto elementar deve ter dois fatores e como cada fator vem de uma linha distinta, um produto elementar pode ser escrito na forma

$$a_{1\_}a_{2\_}$$

onde as lacunas designam números de colunas. Como não há dois fatores no produto vindo da mesma coluna, os números de coluna devem ser $\underline{1}\ \underline{2}$ ou $\underline{2}\ \underline{1}$. Assim, os únicos produtos elementares são $a_{11}a_{22}$ e $a_{12}a_{21}$.

Solução (b). Como cada produto elementar deve ter três fatores e como cada fator vem de uma linha distinta, um produto elementar pode ser escrito na forma

$$a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$$

Como não há dois fatores no produto vindo da mesma coluna, os números de coluna não têm repetições; conseqüentemente, eles devem constituir uma permutação do conjunto {1, 2, 3}. Estas 3! = 6 permutações dão a lista de produtos elementares.

$$\begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{12}a_{21}a_{33} & a_{13}a_{21}a_{32} \\ a_{11}a_{23}a_{32} & a_{12}a_{23}a_{31} & a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

♦

Como este exemplo mostra, uma matriz A de tamanho $n \times n$ tem $n!$ produtos elementares. Esses são os produtos da forma $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$, onde $(j_1, j_2, ..., j_n)$ é uma permutação do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Um produto elementar $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ multiplicado por + 1 ou – 1 é chamado um ***produto elementar com sinal de A***. Nós usamos o + se $(j_1, j_2, ..., j_n)$ é uma permutação par e o – se $(j_1, j_2, ..., j_n)$ é uma permutação ímpar.

EXEMPLO 6 Produtos Elementares com Sinal

Liste todos os produtos elementares com sinal das matrizes

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Solução.

(a)

Produto Elementar	Permutação Associada	Par ou Ímpar	Produto Elementar com Sinal
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	par	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	ímpar	$-a_{12}a_{21}$

(b)

Produto Elementar	Permutação Associada	Par ou Ímpar	Produto Elementar com Sinal
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	par	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	ímpar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	ímpar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	par	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	par	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	ímpar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

♦

Nós estamos, agora, em condições de definir a função determinante

Definição

Seja A uma matriz quadrada. A ***função determinante*** é denotada por ***det*** e nós definimos det (A) como a soma de todos os produtos elementares com sinal de A. O número det (A) é chamado ***determinante de A***.

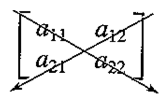
EXEMPLO 7 Determinantes de Matrizes 2×2 e 3×3

Usando as matrizes do Exemplo 6, obtemos

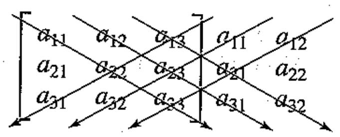
(a) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(b) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$
$\qquad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ ♦

Para evitar memorizar estas expressões desajeitadas, nós sugerimos usar os recursos mnemônicos dados na Figura 2.1.2. A fórmula da parte (a) do Exemplo 7 é obtida da Figura 2.1.2*a* somando as entradas da flecha direcionada para a direita e subtraindo as entradas da flecha direcionada para a esquerda. A fórmula da parte (b) do Exemplo 7 é obtida acrescentando à matriz uma cópia da primeira e da segunda colunas, como mostra a Figura 2.1.2*b*. O determinante é, então, calculado somando as entradas das flechas direcionadas para a direita e subtraindo as entradas das flechas direcionadas para a esquerda.



(*a*) Determinante de uma matriz 2×2



(*b*) Determinante de uma matriz 3×3

Figura 2.1.2

EXEMPLO 8 Calculando Determinantes

Calcule os determinantes de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

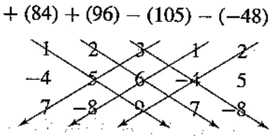
Solução.

Usando o método da Figura 2.1.2*a*, obtemos

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

Usando o método da Figura 2.1.2*b*, obtemos

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$



♦

Advertência. Nós enfatizamos que os métodos mostrados na Figura 2.1.2 não funcionam para determinantes de matrizes 4×4 ou maiores.

Notação e Terminologia Nós concluímos esta seção com alguns comentários sobre terminologia e notação. Primeiro observamos que o símbolo $|A|$ é uma notação alternativa para det (A). Por exemplo, o determinante de uma matriz 3×3 pode ser escrito como

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Na última notação, o determinante da matriz A do Exemplo 8 é escrito como

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

Estritamente falando, o determinante de uma matriz é um número. Contudo, é prática comum "abusar" um pouco da terminologia e usar o termo "determinante" para nos referirmos à *matriz* cujo determinante está sendo calculado. Assim, nós poderemos nos referir a

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

como um determinante 2×2 e chamar 3 a entrada na primeira linha e primeira coluna do determinante.

Finalmente, observamos que, muitas vezes, o determinante de A é escrito simbolicamente como

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1}$$

onde Σ indica que os termos devem ser somados sobre todas as permutações $(j_1, j_2, ..., j_n)$ e o + ou − é selecionado em cada parcela de acordo com a permutação sendo par ou ímpar. Esta notação é útil quando queremos enfatizar a definição de um determinante.

OBSERVAÇÃO. Calcular determinantes diretamente da definição leva a dificuldades computacionais. De fato, calcular um determinante 4×4 diretamente envolveria calcular $4! = 24$ produtos elementares com sinal e um determinante 10×10 envolveria calcular $10! = 3.628.800$ produtos elementares com sinal. Mesmo os mais rápidos computadores digitais não conseguem dar conta em um tempo razoável dos cálculos de um determinante 25×25 por este método. Muito do que segue neste capítulo será dedicado, portanto, a desenvolver propriedades dos determinantes que vão simplificar o seu cálculo.

Conjunto de Exercícios 2.1

1. Encontre o número de inversões em cada uma das seguintes permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
(a) (4 1 3 5 2) (b) (5 3 4 2 1) (c) (3 2 5 4 1) (d) (5 4 3 2 1) (e) (1 2 3 4 5) (f) (1 4 2 3 5)

2. Classifique cada uma das permutações do Exercício 1 como par ou ímpar.

Nos Exercícios 3–12, calcule o determinante.

3. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ **11.** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$

13. Encontre todos os valores de λ para os quais $\det(A) = 0$.

(a) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

14. Classifique cada permutação de $\{1, 2, 3, 4\}$ como par ou ímpar.

15. Use as respostas do Exercício 14 para construir uma fórmula para o determinante de uma matriz 4×4.

16. Use a fórmula obtida no Exercício 15 para calcular

$$\begin{vmatrix} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

17. Use a definição de determinante para calcular

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

18. Resolva em x.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

19. Mostre que o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta - \cos\theta & \operatorname{sen}\theta + \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

não depende de θ.

20. Prove que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

Discussão e Descoberta

21. Explique por que o determinante de uma matriz $n \times n$ com entradas inteiras deve ser um inteiro.

22. O que você pode dizer sobre o determinante de uma matriz $n \times n$ cujas entradas são todas 1? Explique seu raciocínio.
23. (a) Explique por que o determinante de uma matriz $n \times n$ com uma linha de zeros deve ser zero.
(b) Explique por que o determinante de uma matriz $n \times n$ com uma coluna de zeros deve ser zero.
24. Use a Fórmula (1) para descobrir uma fórmula para o determinante de uma matriz $n \times n$ diagonal. Expresse sua fórmula em palavras.
25. Use a Fórmula (1) para descobrir uma fórmula para o determinante de uma matriz $n \times n$ triangular superior. Expresse sua fórmula em palavras. Faça o mesmo para uma matriz triangular inferior.

2.2 CALCULANDO DETERMINANTES ATRAVÉS DE REDUÇÃO POR LINHAS

Nesta seção nós vamos mostrar que o determinante de uma matriz quadrada pode ser calculado através da redução da matriz à forma escalonada reduzida por linhas. Este método é importante pois evita os longos cálculos envolvidos na aplicação direta da definição de determinante.

Um Teorema Básico Como discutimos no final da seção anterior, a definição de determinante é útil para provar teoremas *sobre* determinantes, mas não fornece meios práticos para calculá-los, especialmente determinante de matrizes maiores do que 3×3. Por causa disto, começamos com um teorema fundamental que nos levará a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz de qualquer tamanho n.

Teorema 2.2.1

Seja A uma matriz quadrada.

(*a*) *Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então* $\det(A) = 0$.
(*b*) $\det(A) = \det(A^T)$.

Prova (a). Como cada produto elementar com sinal de A tem um fator de cada linha e um fator de cada coluna, segue-se que cada produto elementar com sinal necessariamente tem um fator de uma linha de zeros ou de uma coluna de zeros. Nestes casos, cada produto elementar com sinal é zero e portanto $\det(A)$, que é uma soma de produtos elementares com sinal, é zero. ■

Nós omitimos a prova da parte (*b*), mas lembramos que um produto elementar tem um fator de cada linha e de cada coluna, de modo que é evidente que A e A^T têm precisamente o mesmo conjunto de produtos elementares. Com a ajuda de alguns teoremas sobre permutações, que nos levariam para muito longe dos nossos propósitos, pode ser mostrado que na realidade A e A^T têm o mesmo conjunto de produtos elementares *com sinal*. Isto implica que $\det(A) = \det(A^T)$.

OBSERVAÇÃO. Por causa do Teorema 2.2.1*b*, quase cada teorema sobre determinantes que contém a palavra "linha" em seu enunciado, também é verdadeiro se substituirmos a palavra "linha" por "coluna". Para provar uma afirmação sobre colunas, basta transpor a matriz em questão para converter a afirmação sobre colunas numa afirmação sobre linhas e em seguida aplicar o resultado conhecido para as linhas.

Matrizes Triangulares O próximo teorema torna fácil calcular o determinante de uma matriz triangular, independentemente de seu tamanho.

Teorema 2.2.2

Se A é uma matriz triangular (triangular superior, triangular inferior ou diagonal) de tamanho n × n, então $\det(A)$ *é o produto das entradas na diagonal principal da matriz; ou seja,* $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Para simplificar a notação, nós vamos provar este resultado para matrizes triangulares inferiores

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

de tamanho 4×4. O argumento no caso $n \times n$ é similar. Uma prova para matrizes triangulares superiores pode ser obtido aplicando o Teorema 2.2.1*b* e observando que a transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular inferior com as mesmas entradas na diagonal.

Prova do Teorema 2.2.2 (caso triangular inferior 4×4*).* O único produto elementar de A que pode ser não-nulo é $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. Para ver isto, considere um produto elementar $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ típico. Como $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, precisamos ter $j_1 = 1$ para obter um produto elementar não-nulo. Se $j_1 = 1$, devemos ter $j_2 \neq 1$, pois dois fatores não podem vir da mesma coluna. Além disso, como $a_{23} = a_{24} = 0$, precisamos ter $j_2 = 2$ para obter um produto elementar não-nulo. Continuando deste modo, obtemos $j_3 = 3$ e $j_4 = 4$. Como $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ é multiplicado por + 1 para formar o produto elementar com sinal, resulta

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$ ■

EXEMPLO 1 Determinante de uma Matriz Triangular Superior

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$ ♦

Operações Elementares sobre Linhas O próximo teorema mostra como uma operação elementar sobre linhas de uma matriz afeta o valor de seu determinante.

Teorema 2.2.3

Seja A uma matriz $n \times n$.

(*a*) *Se B é a matriz que resulta quando uma única linha ou uma única coluna de A é multiplicada por um escalar k, então* $\det(B) = k\det(A)$.
(*b*) *Se B é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de A são permutadas, então* $\det(B) = -\det(A)$.
(*c*) *Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então* $\det(B) = \det(A)$.

Uma prova deste teorema pode ser obtida usando a Fórmula (1) da Seção 2.1 para calcular os determinantes envolvidos e depois verificar sua igualdade. Nós omitimos a prova mas damos o seguinte exemplo que ilustra o teorema para determinantes 3×3.

EXEMPLO 2 O Teorema 2.2.3 Aplicado a Determinantes 3×3

Relação	Operação
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	A primeira linha de A é multiplicada por k.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	A primeira e a segunda linhas de A são permutadas.
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	Um múltiplo da segunda linha de A é somado à primeira linha.

Nós vamos verificar a equação da última linha da tabela e deixar as duas primeiras para o leitor. Com a ajuda do Exemplo 7 da Seção 2.1, nós obtemos

$$\begin{aligned}\det(B) &= (a_{11}+ka_{21})a_{22}a_{33} + (a_{12}+ka_{22})a_{23}a_{31} + (a_{13}+ka_{23})a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}(a_{13}+ka_{23}) - a_{33}a_{21}(a_{12}+ka_{22}) - a_{32}a_{23}(a_{11}+ka_{21}) \\ &= \det(A) + k(a_{21}a_{22}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{31}a_{22}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{21}) \\ &= \det(A) + 0 = \det(A)\end{aligned}$$ ♦

OBSERVAÇÃO. Como está sendo ilustrado pela primeira equação no Exemplo 2, a parte (*a*) do Teorema 2.2.3 permite-nos tirar um "fator comum" de qualquer linha (ou coluna) para fora do sinal de determinante.

Matrizes Elementares Lembre que uma matriz elementar é o resultado de efetuar uma única operação elementar sobre as linhas de uma matriz identidade; assim, se nós tomarmos $A = I_n$ no Teorema 2.2.3 [de modo que $\det(A) = \det(I_n) = 1$], então a matriz B será uma matriz elementar e o teorema fornecerá o seguinte resultado sobre determinantes de matrizes elementares.

Teorema 2.2.4

Seja E uma matriz elementar $n \times n$.

(*a*) *Se E resulta de multiplicar uma linha de I_n por k, então* $\det(E) = k$.
(*b*) *Se E resulta de permutar duas linhas de I_n, então* $\det(E) = -1$.
(*c*) *Se E resulta de somar um múltiplo de uma linha de I_n a uma outra linha, então* $\det(E) = 1$.

EXEMPLO 3 Determinantes de Matrizes Elementares

Os seguintes determinantes de matrizes elementares, que são calculados por inspeção, ilustram o Teorema 2.2.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

A segunda linha de I_4 foi multiplicada por 3. **A primeira e última linhas de I_4 foram permutadas.** **7 vezes a última linha de I_4 foi somada à primeira.**

♦

Matrizes com Linhas ou Colunas Proporcionais
Se uma matriz quadrada A tem duas linhas proporcionais, então pode ser introduzida uma linha de zeros somando um múltiplo conveniente de uma das duas linhas à outra. Similarmente para colunas. Mas somando um múltiplo de uma linha ou coluna a uma outra não muda o determinante, de modo que, pelo Teorema 2.2.1*a*, nós devemos ter $\det(A) = 0$. Isto prova o seguinte teorema.

Teorema 2.2.5

Se A é uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.

EXEMPLO 4 Introduzindo Linhas de Zeros

O próximo cálculo ilustra a introdução de uma linha de zeros quando há duas linhas proporcionais:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

← A segunda linha é 2 vezes a primeira, portanto somamos −2 vezes a primeira linha à segunda para introduzir uma linha de zeros.

Cada uma das seguintes matrizes tem duas linhas ou colunas proporcionais; assim, cada uma tem determinante zero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

♦

Calculando Determinantes através de Redução por Linhas Nós vamos dar agora um método para calcular determinantes que envolve substancialmente menos contas que aplicando a definição diretamente. A idéia do método é primeiro reduzir a matriz dada ao formato triangular superior por operações elementares, depois calcular o determinante da matriz triangular superior (uma conta fácil) e finalmente relacionar aquele determinante com o da matriz original. Vejamos um exemplo.

EXEMPLO 5 Usando Redução por Linhas para Calcular um Determinante

Calcule det (A), onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução.

Nós vamos reduzir A a uma forma escalonada (que é triangular superior) e aplicar o Teorema 2.2.3:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

← A primeira e segunda linhas de A foram permutadas.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

← Um fator comum de 3 da primeira linha foi retirado através do determinante.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

← −2 vezes a primeira linha foi somado à terceira linha.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

← −10 vezes a segunda linha foi somado à terceira linha.

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

← Um fator comum de −55 da última linha foi retirado através do determinante.

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

♦

OBSERVAÇÃO. O método de redução por linhas, por ser sistemático e facilmetne programável, é muito conveniente para calcular determinantes usando computadores. No entanto, em seções subseqüentes nós iremos desenvolver métodos que, em geral, são mais fáceis para cálculos à mão.

EXEMPLO 6 Usando Operações sobre Colunas para Calcular Determinantes

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Solução.

Este determinante poderia ser calculado como o anterior usando operações elementares sobre linhas para reduzir A à forma escalonada, mas nós podemos colocar A em forma triangular inferior em um passo, somando −3 vezes a primeira à quarta colunas para obter

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Este exemplo ressalta a utilidade de manter a atenção voltada às operações sobre colunas que podem encurtar nossas contas. ♦

Conjunto de Exercícios 2.2

1. Verifique que det (A) = det (A^T) para

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2. Calcule os seguintes determinantes por inspeção.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

3. Calcule os determinantes das seguintes matrizes por inspeção.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 4–11, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas.

4. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, encontre

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

13. Use redução por linhas para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

14. Use um argumento como o que foi dado na prova do Teorema 2.2.2 para mostrar que

(a) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$ (b) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

15. Prove os seguintes casos especiais do Teorema 2.2.3.

(a) $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Discussão e Descoberta

16. Em cada parte, encontre det (A) por inspeção, explicando seu raciocínio.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. Por inspeção, resolva a equação

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Explique seu raciocínio.

18. (a) Por inspeção, encontre duas soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(b) É possível haver outras soluções? Justifique sua resposta.

2.3 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DETERMINANTE

Nesta seção nós vamos desenvolver algumas das propriedades fundamentais da função determinante. Nosso trabalho aqui nos dará uma compreensão mais profunda da relação entre uma matriz quadrada e seu determinante. Uma das conseqüências imediatas deste material será um teste de determinante para a invertibilidade de uma matriz.

Propriedades Básicas dos Determinantes

Suponha que A e B são matrizes $n \times n$ e que k é um escalar qualquer. Começamos considerando as possíveis relações entre $\det(A)$, $\det(B)$ e

$$\det(kA),\ \det(A + B) \text{ e } \det(AB)$$

Como um fator comum de qualquer linha de uma matriz pode ser carregado para fora do sinal det e como cada uma das n linhas de A tem o fator k em comum, obtemos

$$\det(kA) = k^n \det(A) \tag{1}$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Infelizmente, em geral não existem relações simples entre $\det(A)$, $\det(B)$ e $\det(A + B)$. Em particular, enfatizamos que $\det(A + B)$ geralmente *não* é igual a $\det(A) + \det(B)$. O seguinte exemplo ilustra este fato.

EXEMPLO 1 $\det[A + B] \neq \det[A] + \det[B]$

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Nós temos $\det(A) = 1$, $\det(B) = 8$ e $\det(A + B) = 23$; assim,

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$ ◆

Não obstante o aspecto negativo do exemplo precedente, existe uma relação importante que trata de somas de determinantes e que é muitas vezes útil. Para obtê-la, considere duas matrizes 2×2 que só diferem na segunda linha:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Nós temos

$$\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}(a_{22} + b_{22}) - a_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Este é um caso especial do seguinte resultado geral.

> **Teorema 2.3.1**
>
> *Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ que diferem somente em uma única linha, digamos a r-ésima, e suponha que a r-ésima linha de C pode ser obtida somando as entradas correspondentes nas r-ésimas linhas de A e B. Então*
>
> $$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$
>
> *O mesmo resultado vale para colunas.*

EXEMPLO 2 Usando o Teorema 2.3.1

Calculando os determinantes, o leitor pode verificar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ ◆

Determinante de um Produto Matricial Quando nós consideramos a complexidade das definições de multiplicação matricial e de determinantes, parece-nos ser improvável poder haver alguma relação simples entre estes conceitos. Isto é o que faz tão surpreendente a elegante simplicidade do seguinte resultado: Nós vamos mostrar que se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{2}$$

A prova deste teorema é razoavelmente complexa, de modo que vamos precisar desenvolver primeiro alguns resultados preliminares. Nós começamos com o caso especial de (2) em que A é uma matriz elementar. Como este caso especial é só um prelúdio para (2), vamos chamá-lo de lema.

> **Lema 2.3.2**
>
> *Se B é uma matriz $n \times n$ e E é uma matriz elementar $n \times n$, então*
>
> $$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Prova. Nós vamos considerar três casos, um para cada uma das operações sobre linhas que produz a matriz E.

Caso 1. Se E é o resultado da multiplicação de uma linha de I_n por k, então, pelo Teorema 1.5.1, o resultado da multiplicação de uma linha de B por k é EB; logo, pelo Teorema 2.2.3*a* nós temos

$$\det(EB) = k\det(B)$$

Mas pelo Teorema 2.2.4*a* sabemos que $\det(E) = k$, logo

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Casos 2 e 3. As provas dos casos em que E é o resultado da troca de duas linhas de I_n entre si ou da soma de um múltiplo de uma linha a uma outra linha de I_n seguem o mesmo padrão do Caso 1 e são deixadas como exercícios. ■

OBSERVAÇÃO. Da aplicação repetida do Lema 2.3.2 segue que se B é uma matriz $n \times n$ e se $E_1, E_2, ..., E_r$ são matrizes elementares $n \times n$, então

$$\det(E_1E_2\cdots E_rB) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B) \tag{3}$$

Por exemplo,

$$\det(E_1E_2B) = \det(E_1)\det(E_2B) = \det(E_1)\det(E_2)\det(B)$$

Teste de Determinante para a Invertibilidade O próximo é um dos mais fundamentais teoremas de Álgebra Linear; ele fornece um critério importante para a invertibilidade em termos de determinantes e será usado para provar (2).

Teorema 2.3.3

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Prova. Seja R a forma escalonada reduzida por linhas de A. Como um passo preliminar vamos mostrar que $\det(A)$ e $\det(R)$ são ambos nulos ou ambos não-nulos. Sejam $E_1, E_2, ..., E_r$ as matrizes elementares que correspondem às operações elementares sobre linhas que produzem R a partir de A. Assim,

$$R = E_r\cdots E_2E_1A$$

e por (3)

$$\det(R) = \det(E_r)\cdots\det(E_2)\det(E_1)\det(A) \tag{4}$$

Mas pelo Teorema 2.2.4, os determinantes das matrizes elementares são todos não-nulos. (Não esqueça que multiplicar por zero *não* é uma operação elementar permitida, de modo que $k \neq 0$ nesta aplicação do Teorema 2.2.4.) Assim, segue de (4) que $\det(A)$ e $\det(R)$ são ambos nulos ou ambos não-nulos. Agora passamos à parte principal da prova.

Se A é invertível, então pelo Teorema 1.6.4 nós temos $R = I$, de modo que $\det(R) = 1 \neq 0$ e conseqüentemente $\det(A) \neq 0$. Reciprocamente, se $\det(A) \neq 0$, então $\det(R) \neq 0$ e portanto R não pode ter uma linha de zeros. Segue do Teorema 1.4.3 que $R = I$, de modo que A é invertível pelo Teorema 1.6.4. ■

Segue dos Teoremas 2.3.3 e 2.2.5 que uma matriz quadrada com duas linhas ou duas colunas proporcionais é não-invertível.

EXEMPLO 3 Testando Invertibilidade por Determinantes

Como a primeira e terceira linhas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

são proporcionais, $\det(A) = 0$. Assim, A é não-invertível. ◆

Nós estamos agora prontos para o principal resultado desta seção.

Teorema 2.3.4

Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Prova. Nós dividimos a prova em dois casos, considerando A invertível ou não. Se a matriz A é não-invertível, então pelo Teorema 1.6.5 tampouco o produto AB o é. Assim, pelo Teorema 2.3.3, nós temos $\det(AB) = 0$ e $\det(A) = 0$, de modo que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Suponha agora, que A é invertível. Pelo Teorema 1.6.4, a matriz A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, digamos

$$A = E_1E_2\cdots E_r \tag{5}$$

e portanto

$$AB = E_1E_2\cdots E_rB$$

Aplicando (3) a esta equação, obtemos

$$\det(AB) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B)$$

e aplicando novamente (3), resulta

$$\det(AB) = \det(E_1E_2\cdots E_r)\det(B)$$

que, por (5), pode ser reescrito como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. ■

EXEMPLO 4 Verificando que $\det[AB] = \det[A]\det[B]$

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Nós deixamos para o leitor verificar que

$$\det(A) = 1,\ \det(B) = -23 \text{ e } \det(AB) = -23$$

Assim, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, como garante o Teorema 2.3.4. ◆

O próximo teorema dá uma relação útil entre o determinante de uma matriz invertível e o determinante da sua inversa.

Teorema 2.3.5

Se A é invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Prova. Como $A^{-1}A = I$, segue que $\det(A^{-1}A) = \det(I)$. Logo, devemos ter $\det(A^{-1})\det(A) = 1$. Como $\det(A) \neq 0$, a prova pode ser completada dividindo ambos os lados desta equação por $\det(A)$. ■

Sistemas Lineares da Forma $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ Muitas aplicações da Álgebra Linear envolvem sistemas de n equações lineares em n incógnitas que aparecem no formato

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{6}$$

onde λ é um escalar. Tais sistemas são, realmente, sistemas homogêneos disfarçados, pois (6) pode ser reescrito como $\lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ou, inserindo uma matriz identidade e fatorando, como

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \tag{7}$$

Aqui temos um exemplo.

EXEMPLO 5 Encontrando $\lambda I - A$

O sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

pode ser escrito em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que é do formato (6) com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema pode ser reescrito como

$$\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é do formato (7), com

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

♦

O problema primordial que nos interessa em relação aos sistemas no formato (7) é determinar para quais valores de λ o sistema tem uma solução não-trivial; um tal valor de λ é chamado ***autovalor*** de A, ou ***valor próprio*** ou, às vezes, ***valor característico*** de A. Se λ é um autovalor de A, então cada solução não-trivial de (7) é chamada um ***autovetor*** de A associado ao autovalor λ.

Segue do Teorema 2.3.3 que o sistema $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ tem uma solução não-trivial se, e somente se,

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{8}$$

Esta equação é chamada ***equação característica*** de A; os autovalores de A podem ser encontrados resolvendo esta equação em λ.

Os autovalores e autovetores serão estudados novamente nos capítulos subseqüentes, onde nós iremos discutir sua interpretação geométrica e desenvolver suas propriedades mais profundamente.

EXEMPLO 6 Autovalores e Autovetores

Encontre os autovalores e correspondentes autovetores da matriz A do Exemplo 5.

Solução.

A equação característica de A é

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

A forma fatorada desta equação é $(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0$, de modo que os autovalores de A são $\lambda = -2$ e $\lambda = 5$.

Por definição,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de A se, e somente se, x é uma solução não-trivial de $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = 0$; ou seja,

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Se $\lambda = -2$, então (9) é dada por

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos (verifique) $x_1 = -t$, $x_2 = t$, de modo que os autovetores associados a $\lambda = -2$ são as soluções não-nulas da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$

Novamente, por (9), os autovetores correspondendo a $\lambda = 5$ são as soluções não-triviais de

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nós deixamos ao leitor resolver este sistema e mostrar que os autovetores de A correspondentes a $\lambda = 5$ são as soluções não-nulas da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}t \\ t \end{bmatrix}$$

♦

Resumo No Teorema 1.6.4 nós listamos cinco resultados que são equivalentes à invertibilidade da matriz A. Nós concluímos esta seção juntando o Teorema 2.3.3 à lista para obter o seguinte teorema que relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

Teorema 2.3.6 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*

(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *só tem a solução trivial.*

(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*

(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*

(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente para cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho* $n \times 1$.

(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução para cada matriz* $\mathbf{b}n \times 1$.

(*g*) $\det(A) \neq 0$.

Conjunto de Exercícios 2.3

1. Verifique que $\det(kA) = k^n \det(A)$ para

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $k = 2$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $k = -2$

2. Verifique que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Por inspeção, explique por que $\det(A) = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Use o Teorema 2.3.3 para determinar quais das seguintes matrizes são invertíveis.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Supondo que $\det(A) = -7$, obtenha

(a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$ (c) $\det(2A^{-1})$ (d) $\det((2A)^{-1})$ (e) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

6. Sem calcular diretamente, mostre que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sem calcular diretamente, mostre que

$$\det\begin{bmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Nos Exercícios 8–11, prove a identidade sem calcular os determinantes.

8. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

9. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

10. $$\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

11. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ta_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2+ta_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3+ta_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

12. Encontre o(s) valor(es) de k que faz(em) A não-invertível.

(a) $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

13. Use o Teorema 2.3.3 para mostrar que

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}^2\beta & \operatorname{sen}^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é não-invertível para quaisquer valores de α, β e γ.

14. Expresse os seguintes sistemas lineares no formato $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ -5x_1 - 3x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$

15. Para cada um dos sistemas do Exercício 14, encontre
(i) a equação característica;
(ii) os autovalores;
(iii) os autovetores associados a cada autovalor.

16. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se A é invertível, então $\det(B) = \det(A^{-1}BA)$.

17. (a) Expresse

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes cujas entradas não contém somas.

(b) Expresse

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 & e_1+f_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 & e_2+f_2 \\ a_3+b_3 & c_3+d_3 & e_3+f_3 \end{vmatrix}$$

como uma soma de oito determinantes cujas entradas não contém somas.

18. Prove que uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, A^TA é invertível.

19. Prove os Casos 2 e 3 do Lema 2.3.2.

Discussão e Descoberta

20. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Você já sabe, pelo que foi visto antes, que $A\,B$ e $B\,A$ não precisam coincidir. Vale o mesmo para $\det(A\,B)$ e $\det(B\,A)$? Explique seu raciocínio.
21. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Você já sabe, pelo que foi visto antes, que $A\,B$ é invertível se A e B são invertíveis. O que você sabe dizer sobre a invertibilidade de $A\,B$ se um ou ambos fatores são singulares? Explique seu raciocínio.
22. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
    (a) $\det(2A) = 2\det(A)$
    (b) $|A^2| = |A|^2$
    (c) $\det(I + A) = 1 + \det(A)$
    (d) Se $\det(A) = 0$, então o sistema homogêneo $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.
23. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
    (a) Se $\det(A) = 0$, então A pode ou pode não ser expressa como um produto de matrizes elementares.
    (b) Se a forma escalonada reduzida por linhas de A tiver uma linha de zeros, então $\det(A) = 0$.
    (c) O determinante de uma matriz permanece inalterado se escrevemos as colunas em ordem inversa.
    (d) Não existe matriz quadrada A para a qual $\det(A\,A^T) = -1$.

2.4 EXPANSÃO EM CO-FATORES; REGRA DE CRAMER

Nesta seção nós vamos considerar um método para calcular determinantes que é útil para cálculos manuais e também é importante para a teoria. Como uma conseqüência do nosso trabalho, nós vamos obter uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível, bem como uma fórmula para a solução de certos sistemas de equações lineares em termos de determinantes.

Menores e Co-fatores No Exemplo 7 da Seção 2.1 nós vimos que o determinante de uma matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

é o número

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1)$$

Rearranjando os termos e fatorando, (1) pode ser reescrito como

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (2)$$

As expressões destacadas em cor em (2) são, elas mesmo, determinantes:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

As submatrizes de A que aparecem nestes determinantes têm um nome especial.

Definição

Se A é uma matriz quadrada, então o ***determinante menor da entrada a_{ij}***, ou simplesmente o ***menor de a_{ij}***, é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ é denotado por C_{ij} e é chamado o ***co-fator de a_{ij}***.

EXEMPLO 1 Encontrando Menores e Co-fatores

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O menor de a_{11} é

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

O co-fator de a_{11} é

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Similarmente, o menor de a_{32} é

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & \cancel{1} & -4 \\ 2 & \cancel{5} & 6 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

O co-fator de a_{32} é

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

◆

Note que a diferença entre o co-fator e o menor de um elemento a_{ij} é somente de sinal, ou seja, $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Uma maneira rápida de determinar se deve ser usado + ou − é observar que o sinal relacionando C_{ij} e M_{ij} é o que está na i-ésima linha e j-ésima coluna do arranjo em forma de tabuleiro de xadrez

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Por exemplo, $C_{11} = M_{11}$, $C_{21} = -M_{21}$, $C_{12} = -M_{12}$, $C_{22} = M_{22}$ e assim por diante.

Expansão em Co-fatores Tendo em vista a definição acima, a expressão em (2) pode ser escrita em termos de menores e co-fatores como

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}M_{11} + a_{12}(-M_{12}) + a_{13}M_{13}\\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}\end{aligned} \tag{3}$$

As equações em (3) mostram que o determinante de A pode ser calculado multiplicando as entradas da primeira linha de A pelos co-fatores correspondentes e somando os produtos que resultam. Este método de calcular det (A) é chamado ***expansão em co-fatores*** ao longo da primeira linha de A.

EXEMPLO 2 Expansão em Co-fatores ao longo da Primeira Linha

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule det (A) por expansão em co-fatores ao longo da primeira linha de A.

Solução.

Por (3),

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$ ♦

Rearranjando os termos em (1) de outras maneiras, é possível obter outras fórmulas como (3). Não deveria haver dificuldades em conferir que todas as seguintes fórmulas são verdadeiras (ver Exercício 28):

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}\\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}\\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}\\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}\\ &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}\\ &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}\end{aligned} \tag{4}$$

Note que em cada equação as entradas e os co-fatores são todos da mesma linha ou coluna. Estas equações são chamadas ***expansões em co-fatores*** de det (A).

Os resultados que acabamos de ver para matrizes 3×3 formam um caso especial do seguinte teorema geral, que enunciamos sem prova.

Teorema 2.4.1 Expansão em Co-fatores

O determinante de uma matriz A de tamanho $n \times n$ pode ser calculado multiplicando as entradas de qualquer linha (ou coluna) pelos seus co-fatores e somando os produtos resultantes, ou seja, para quaisquer $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$
(expansão em co-fatores ao longo da j-ésima coluna)

e

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$
(expansão em co-fatores ao longo da i-ésima linha)

EXEMPLO 3 Expansão em Co-fatores ao longo da Primeira Coluna

Seja A a matriz do Exemplo 2. Calcule det (A) expandindo em co-fatores ao longo da primeira coluna de A.

Solução.

Por (4),

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

Isto confere com o resultado obtido no Exemplo 2. ♦

OBSERVAÇÃO. Neste exemplo, nós precisamos calcular três co-fatores, mas no Exemplo 2 nós só precisamos calcular dois deles, pois o terceiro foi multiplicado por zero. Em geral, a melhor estratégia para calcular o determinante pela expansão em co-fatores é expandindo ao longo da linha ou coluna que tem o maior número de zeros.

A expansão em co-fatores e as operações elementares com linhas e colunas podem, às vezes, ser usadas em conjunto para fornecer um meio efetivo de calcular determinantes. O exemplo seguinte ilustra esta idéia.

EXEMPLO 4 Operações com Linhas e Expansão em Co-fatores

Calcule det (A), onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução.

Somando múltiplos convenientes da segunda linha às demais linhas, nós obtemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \longleftarrow$$ Expansão em co-fatores ao longo da primeira coluna.

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \longleftarrow$$ Nós somamos a primeira linha à terceira linha.

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \longleftarrow$$ Expansão em co-fatores ao longo da primeira coluna.

$$= -18$$ ♦

Adjunta de uma Matriz Na expansão em co-fatores nós calculamos det (A) multiplicando as entradas de uma linha ou coluna pelos seus co-fatores e somando os produtos resultantes. Ocorre que se nós multiplicamos as entradas de uma linha qualquer pelos co-fatores de uma *outra* linha diferente, a soma dos produtos resultantes é sempre zero. (Este resultado também vale para colunas.) Mesmo omitindo a prova geral, o próximo exemplo ilustra a idéia da prova num caso especial.

EXEMPLO 5 Entradas e Co-fatores de Linhas Diferentes

Seja

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Considere a expressão

$$a_{11}C_{31}+a_{12}C_{32}+a_{13}C_{33}$$

que é formada multiplicando as entradas da primeira linha pelos co-fatores das entradas correspondentes da terceira linha e somando os produtos resultantes. Usando o artifício a seguir, nós vamos mostrar que esta quantidade é zero. Construa uma nova matriz A' substituindo a terceira linha de A com uma cópia da primeira linha. Assim,

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Sejam C'_{31}, C'_{32} e C'_{33} os co-fatores das entradas da terceira linha de A'. Como as duas primeiras linhas de A e A' são as mesmas e como os cálculos para obter C_{31}, C_{32}, C_{33}, C'_{31}, C'_{32} e C'_{33} envolvem somente as entradas das duas primeiras linhas de A e A', segue que

$$C_{31}=C'_{31}, \quad C_{32}=C'_{32}, \quad C_{33}=C'_{33}$$

Como A' tem duas linhas idênticas,

$$\det(A')=0 \tag{5}$$

Por outro lado, calculando $\det(A')$ por expansão em co-fatores ao longo da primeira linha dá

$$\det(A')=a_{11}C'_{31}+a_{12}C'_{32}+a_{13}C'_{33}=a_{11}C_{31}+a_{12}C_{32}+a_{13}C_{33} \tag{6}$$

De (5) e (6) nós obtemos

$$a_{11}C_{31}+a_{12}C_{32}+a_{13}C_{33}=0$$

◆

Definição

Se A é uma matriz $n\times n$ e C_{ij} é o co-fator de a_{ij}, então a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é chamada ***matriz de co-fatores de A***. A transposta desta matriz é chamada ***adjunta de A*** e denotada por adj (A).

EXEMPLO 6 Adjunta de uma Matriz 3 × 3

Seja

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Os co-fatores de A são

$$\begin{array}{lll} C_{11}=12 & C_{12}=6 & C_{13}=-16 \\ C_{21}=4 & C_{22}=2 & C_{23}=16 \\ C_{31}=12 & C_{32}=-10 & C_{33}=16 \end{array}$$

de modo que a matriz dos co-fatores é

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

é a adjunta de A é

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

◆

Agora nós estamos em condições de obter uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível.

Teorema 2.4.2 Inversa de uma Matriz Usando a Adjunta

Se A é uma matriz invertível, então

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) \tag{7}$$

Prova. Em primeiro lugar, mostramos que

$$A \operatorname{adj}(A)=\det(A)I$$

Considere o produto

$$A\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

A entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna do produto A adj (A) é

$$a_{i1}C_{j1}+a_{i2}C_{j2}+\cdots+a_{in}C_{jn} \tag{8}$$

(ver as linhas sombreadas acima).

Se $i=j$, então (8) é a expansão em co-fatores de det (A) ao longo da i-ésima linha de A (Teorema 2.4.1) e se $i\neq j$, então as entradas da matriz A e os co-fatores provêm de linhas diferentes de A, de modo que o valor de (8) é zero. Portanto,

$$A\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix}=\det(A)I \tag{9}$$

Como A é invertível, $\det(A) \neq 0$. Portanto, a equação pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\det(A)}[A\,\mathrm{adj}(A)] = I \quad \text{or} \quad A\left[\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)\right] = I$$

Multiplicando ambos os lados à esquerda por A^{-1}, resulta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

■

EXEMPLO 7 Usando a Adjunta para Encontrar uma Matriz Inversa

Use (7) para encontrar a inversa da matriz A do Exemplo 6.

Solução.

O leitor pode conferir que $\det(A) = 64$. Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

♦

Aplicações da Fórmula (7) O método do exemplo precedente é razoável para inverter uma matriz 3 × 3, mas para matrizes maiores é mais eficiente usar o algoritmo de inversão discutido na Seção1.5. Entretanto, não deve ser esquecido que o método da Seção 1.5 é só um procedimento para orientar os cálculos, enquanto que (7) é uma autêntica fórmula para a inversa.

Na Seção 1.7 nós enunciamos dois resultados sobre inversas sem prova.

- **Teorema 1.7.1*c*:** Uma matriz triangular é invertível se, e somente se, suas entradas na diagonal principal são todas não-nulas.
- **Teorema 1.7.1*d*:** A inversa de uma matriz triangular inferior é triangular inferior e a inversa de uma matriz triangular superior é triangular superior.

Nós iremos provar estes resultados usando a fórmula da adjunta para a inversa.

Prova do Teorema 1.7.1c. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular; as entradas na diagonal principal de A são

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

Pelos Teoremas 2.2.2 e 2.3.3, a matriz A é invertível se, e somente se,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$$

que vale se, e somente se, as entradas na diagonal são todas não-nulas. ■

Deixamos como exercício para o leitor usar a fórmula da adjunta para A^{-1} para mostrar que se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz triangular invertível, então as entradas sucessivas da diagonal de A^{-1} são

$$\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}$$

(Veja Exemplo 3 da Seção 1.7.)

Prova do Teorema 1.7.1d. Nós vamos provar o resultado para matrizes triangulares superiores e deixar o caso de triangulares inferiores como exercício. Suponha que A é triangular superior e invertível. Como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

nós podemos provar que A^{-1} é triangular superior mostrando que adj (A) é triangular superior ou, equivalentemente, que a matriz de co-fatores é triangular inferior. Isto pode ser feito mostrando que cada co-fator C_{ij} com $i < j$ (ou seja, acima da diagonal principal) é zero. Como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

é suficiente provar que cada menor M_{ij} com $i < j$ é zero. Para verificar isto, seja B_{ij} a matriz obtida suprimindo a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, isto é,

$$M_{ij} = \det(B_{ij}) \tag{10}$$

Da hipótese $i < j$ segue que B_{ij} é triangular superior (Exercício 32). Como A é triangular superior, sua $(i + 1)$-ésima linha começa com pelo menos i zeros. Mas a i-ésima linha de B_{ij} é a $(i + 1)$-ésima linha de A com a entrada na j-ésima coluna removida. Como $i < j$, nenhum dos primeiros i zeros foi removido quando omitmos a j-ésima coluna; assim, a i-ésima linha de B_{ij} começa com pelo menos i zeros, o que implica que esta linha tem um zero na diagonal principal. Segue agora, pelo Teorema 2.2.2, que $\det(B_{ij}) = 0$ e, por (10), que $M_{ij} = 0$. ■

A Regra de Cramer O próximo teorema fornece uma fórmula para a solução de certos sistemas de n equações em n incógnitas. Esta fórmula, conhecida como ***regra de Cramer***, é de interesse marginal para fins computacionais, mas é útil para estudar as propriedades matemáticas de uma solução sem precisar resolver o sistema.

Teorema 2.4.3 Regra de Cramer

Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$, *então o sistema tem uma única solução. Esta solução é*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

onde A_j é a matriz obtida substituindo as entradas da j-ésima coluna de A pelas entradas da matriz

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Prova. Se $\det(A) \neq 0$, então A é invertível e, pelo Teorema 1.6.2, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ é a única solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Portanto, pelo Teorema 2.4.2, temos

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Gabriel Cramer (1704–1752) foi um matemático suíço. Embora ele não seja classificado como um dos grandes matemáticos de seu tempo, mereceu seu lugar na historia da Matemática pela sua contribuição como um divulgador de idéias matemáticas. Cramer viajou muito e encontrou-se com muitos dos mais importantes matemáticos de sua época.

O trabalho mais amplamente conhecido de Cramer, chamado *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, de 1750, é um estudo da classificação de curvas algébricas; a regra de Cramer aparece nos apêndices. Embora a regra tenha o seu nome, variações desta regra foram formuladas antes por vários matemáticos. No entanto, a notação superior de Cramer ajudou a esclarecer e popularizar a técnica.

Excesso de trabalho combinado com uma queda de uma carruagem levaram à sua morte aos 48 anos de idade. Aparentemente, Cramer foi uma pessoa boa e agradável, demonstrando amplos interesses. Ele escreveu sobre a filosofia da lei e do governo e sobre a história da Matemática. Ele trabalhou em repartições públicas, participou da construção de fortificações e da artilharia do governo, instruiu trabalhadores de construção sobre técnicas de restauração de catedrais e coordenou escavações de arquivos de catedrais. Cramer recebeu inúmeras honrarias por suas atividades.

Multiplicando as matrizes, resulta

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

e portanto a entrada na j-ésima linha de $\mathbf{x}$ é

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{\det(A)} \tag{11}$$

Seja, agora,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como A_j difere de A somente na j-ésima coluna, segue que os co-fatores das entradas $b_1, b_2, ..., b_n$ de A_j coincidem com os co-fatores das correspondentes entradas da j-ésima coluna de A. A expansão em co-fatores de det (A_j) ao longo da j-ésima coluna é, portanto,

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

Substituindo esta expressão em (11), resulta

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

■

EXEMPLO 8 Usando a Regra de Cramer para Resolver um Sistema

Use a regra de Cramer para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

◆

OBSERVAÇÃO. Para resolver um sistema de n equações lineares em n incógnitas pela regra de Cramer, é necessário calcular $n + 1$ determinantes de matrizes $n \times n$. Para sistemas com mais de três equações, a eliminação gaussiana é muito mais eficiente, pois somente requer a redução de uma matriz aumentada $n \times (n + 1)$. No entanto, a regra de Cramer dá uma fórmula para a solução se o determinante da matriz de coeficientes é não-nulo.

Conjunto de Exercícios 2.4

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre todos os menores de A.
(b) Encontre todos os co-fatores.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontre
(a) M_{13} e C_{13} (b) M_{23} e C_{23} (c) M_{22} e C_{22} (d) M_{21} e C_{21}

3. Calcule o determinante da matriz do Exercício 1 usando uma expansão de co-fatores ao longo da
(a) primeira linha (b) primeira coluna (c) segunda linha
(d) segunda coluna (e) terceira linha (f) terceira coluna

4. Para a matriz do Exercício 1, encontre
(a) adj (A) (b) A^{-1}, usando o Teorema 2.4.2

Nos Exercícios 5–10, calcule det (A) usando uma expansão em co-fatores ao longo de alguma linha ou coluna de sua preferência.

5. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **6.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ **7.** $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$ **9.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **10.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 11–14, encontre A^{-1} usando o Teorema 2.4.2.

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **12.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

15. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule A^{-1} usando o Teorema 2.4.2.
(b) Calcule A^{-1} usando o método do Exemplo 4 da Seção 1.5.
(c) Qual método envolve menos contas?

Nos Exercícios 16–21, resolva pela regra de Cramer, onde aplicável.

16. $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x - 4y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y - 3z &= -20 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$

22. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível para todos os valores de θ; em seguida, encontre A^{-1} usando o Teorema 2.4.2.

23. Use a regra de Cramer para resolver em y sem resolver em x, z e w.

$$\begin{aligned} 4x + \ y + \ z + \ w &= \ 6 \\ 3x + 7y - \ z + \ w &= \ 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + \ y + \ z + 2w &= \ 3 \end{aligned}$$

24. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o sistema do Exercício 23.
    (a) Resolva o sistema pela regra de Cramer.
    (b) Resolva o sistema por eliminação de Gauss-Jordan.
    (c) Qual método envolve menos contas?
25. Prove que se det $(A) = 1$ e todas as entradas de A são números inteiros, então todas as entradas de A^{-1} também são inteiros.
26. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema de n equações lineares em n incógnitas com coeficientes e constantes números inteiros. Prove que se det $(A) = 1$, então as entradas da solução $\mathbf{x}$ são inteiros.
27. Prove que se A é uma matriz triangular inferior invertível, então A^{-1} é triangular inferior.
28. Obtenha a expansão em co-fatores listada na última linha da Fórmula (4).
29. Prove: A equação da reta que passa pelos pontos distintos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

30. Prove: Os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

31. (a) Se $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$ é uma matriz em blocos "triangular superior," onde A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas, então det (A) = det (A_{11}) det (A_{22}). Use este resultado para calcular det (A) para a matriz

$$A = \left[\begin{array}{rr|rrr} 2 & -1 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

    (b) Verifique sua resposta na parte (a) usando uma expansão em co-fatores para calcular det (A).
32. Prove que se A é uma matriz triangular superior e B_{ij} é a matriz que resulta quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, então B_{ij} é triangular superior se $i < j$.

Discussão e Descoberta

33. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 4×4 pode ter sem ter determinante nulo? Explique seu raciocínio.
34. Seja A uma matriz com o seguinte formato:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

    Quantos valores distintos você consegue obter para det (A) substituindo os asteriscos por valores numéricos (não necessariamente todos iguais)? Explique seu raciocínio.
35. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
    (a) A adj (A) é uma matriz diagonal para cada matriz quadrada A.

(b) Em teoria, a regra de Cramer pode ser usada para resolver qualquer sistema de equações lineares, embora a quantidade de contas possa ser enorme.
(c) Se A é invertível, então adj (A) também deve ser invertível.
(d) Se A tem uma linha de zeros, então adj (A) também deve ter.

Exercícios Suplementares do Capítulo 2

1. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$$
$$y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'$$

2. Use a regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y.

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

3. Examinando o determinante da matriz dos coeficientes, mostre que o seguinte sistema tem uma solução não-trivial se, e somente se, $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

4. Seja A uma matriz 3×3 tal que todas suas entradas são 0 ou 1. Qual é o maior valor possível para det (A)?

5. (a) Para o triângulo da figura dada, use trigonometria para mostrar que

$$\begin{aligned} b\cos\gamma + c\cos\beta &= a \\ c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ a\cos\beta + b\cos\alpha &= c \end{aligned}$$

e em seguida aplique a regra de Cramer para mostrar que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(b) Use a regra de Cramer para obter fórmulas similares para $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

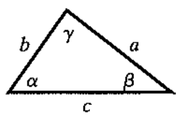


Figura Ex-5

6. Use determinantes para mostrar que, para qualquer valor de λ, a única solução de

$$\begin{aligned} x - 2y &= \lambda x \\ x - y &= \lambda y \end{aligned}$$

é $x = 0$, $y = 0$.

7. Prove: Se A é invertível, então adj (A) é invertível e

$$[\operatorname{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A = \operatorname{adj}(A^{-1})$$

8. Prove: Se A é uma matriz $n \times n$, então det [adj (A)] = [det (A)]$^{n-1}$.

9. (***Para leitores que estudaram Cálculo.***) Mostre que se $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$ e $g_1(x)$ são funções diferenciáveis e se

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \quad \text{então} \quad \frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$$

10. (a) Na figura dada, a área do triângulo $A\ B\ C$ pode ser expressa como

área $A\ B\ C$ = área $A\ D\ E\ C$ + área $C\ E\ F\ B$ – área $A\ D\ F\ B$

Use isto e o fato conhecido que a área de um trapézio é $\frac{1}{2}$ da altura vezes a soma dos lados paralelos para mostrar que

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[***Observação.*** Na dedução desta fórmula, os vértices foram denotados de tal modo que quando passamos de (x_1, y_1) para (x_2, y_2) para (x_3, y_3), o triângulo é percorrido no sentido anti-horário. Para uma orientação horária, o determinante acima dá o *negativo* da área.]

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar a área do triângulo de vértices (3, 3), (4, 0), (– 2, – 1).

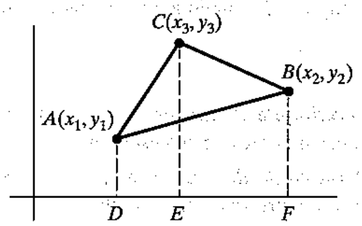


Figura Ex-10

11. Prove: Se a soma das entradas em cada linha de uma matriz A de tamanho $n \times n$ é sempre zero, então o determinante de A é zero. [***Sugestão.*** Considere o produto matricial $A\,X$, onde X é a matriz $n \times 1$ com todas entradas iguais a 1.]
12. Seja A uma matriz $n \times n$ e B a matriz que resulta quando as linhas de A são escritas em ordem inversa (a última linha passa a ser a primeira, e assim por diante). Qual é a relação entre det (A) e det (B)?
13. Como é afetada a matriz inversa A^{-1} se
    (a) permutamos em A a i-ésima com a j-ésima linha;
    (b) a i-ésima linha de A é multiplicada por um escalar não-nulo c;
    (c) c vezes a i-ésima linha de A é somada à j-ésima linha?
14. Seja A uma matriz $n \times n$. Suponha que B_1 é obtida somando o mesmo número t a cada entrada da i-ésima linha de A e B_2 é obtida subtraindo t de cada entrada da i-ésima linha de A. Mostre que $\det(A) = \frac{1}{2}[\det(B_1) + \det(B_2)]$.
15. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

    (a) Expresse det $(\lambda I - A)$ como um polinômio $p(\lambda) = \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$.
    (b) Expresse os coeficientes b e d em termos de determinantes e traços.
16. Sem calcular diretamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}(\alpha+\delta) \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \operatorname{sen}(\beta+\delta) \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & \operatorname{sen}(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$$

17. Sabendo que 21.375, 38.798, 34.162, 40.223 e 79.154 são todos divisíveis por 19 mostre, sem calculá-lo diretamente, que o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

    é divisível por 19.
18. Encontre os autovalores e correspondentes autovetores para cada um dos sistemas seguintes.

(a)
$$\begin{aligned} x_2 + 9x_3 &= \lambda x_1 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= \lambda x_2 \\ x_1 \qquad - 3x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_2 + \quad x_3 &= \lambda x_1 \\ x_1 \qquad - x_3 &= \lambda x_2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

Requisito: Recurso Computacional

Exercícios Computacionais do Capítulo 2

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, *Mathematica*, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

Seção 2.1

T1. (***Determinantes***) Leia em seu manual sobre como calcular determinantes e então use seu recurso para calcular os determinantes do Exemplo 8.

T2. (***Fórmulas para determinantes***) Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, use-o para confirmar as fórmulas no Exemplo 7. Também use-o para obter a fórmula pedida no Exercício 15 da Seção 2.1.

T3. (***Simplificação***) Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, leia a documentação sobre como simplificar expressões algébricas e então use os comandos de determinante e simplificação juntos para mostrar que

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

T4. Use o método do Exercício T3 para encontrar uma fórmula simples para o determinante

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

Seção 2.2

T1. (***Determinante de uma transposta***) Confirme a parte (*b*) do Teorema 2.2.1 usando algumas matrizes de sua escolha.

Seção 2.3

T1. (***Determinante de um produto***) Confirme o Teorema 2.3.4 para algumas matrizes de sua escolha.

T2. (***Determinante de uma inversa***) Confirme o Teorema 2.3.5 para algumas matrizes de sua escolha.

T3. (***Equação característica***) Se você está trabalhando com um sistema algébrico computacional, use-o para encontrar a equação característica da matriz A do Exemplo 6. Também leia a documentação sobre como resolver equações e então resolva a equação det $(\lambda I - A)$ dos autovalores de A.

Seção 2.4

T1. (***Menores, co-fatores e adjuntas***) Os recursos computacionais variam amplamente em seu tratamento de menores, co-fatores e adjuntas. Por exemplo, alguns recursos têm comandos para calcular menores mas não co-fatores, alguns têm comandos diretos para encontrar adjuntas enquanto outros não os têm. Assim, dependendo de seu recurso, você deverá juntar comandos ou fazer ajustes à mão para encontrar co-fatores e adjuntas. Leia seu manual e depois encontre a adjunta da matriz do Exemplo 6.