17. (a) Se A for uma matriz 3×5, então o número de pivôs na forma escalonada reduzida por linhas de A é, no máximo, _____. Por quê?

(b) Se A for uma matriz 3×5, então o número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é, no máximo, _____. Por quê?

(c) Se A for uma matriz 3×5, então o número de pivôs na forma escalonada reduzida por linhas de A é, no máximo, _____. Por quê?

(d) Se A for uma matriz 5×3, então o número de parâmetros na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é, no máximo, _____. Por quê?

18. (a) Se A for uma matriz 3×5, então o posto de A é, no máximo, _____. Por quê?

(b) Se A for uma matriz 3×5, então a nulidade de A é, no máximo, _____. Por quê?

(c) Se A for uma matriz 3×5, então o posto de A^T é, no máximo, _____. Por quê?

(d) Se A for uma matriz 3×5, então a nulidade de A^T é, no máximo, _____. Por quê?

19. Encontre matrizes A e B tais que $\text{pos}(A) = \text{pos}(B)$, mas $\text{pos}(A^2) \neq \text{pos}(B^2)$.

20. Prove: se uma matriz A não for quadrada, então ou os vetores linha ou os vetores coluna de A são linearmente dependentes.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Ou os vetores linha ou os vetores coluna de uma matriz quadrada são linearmente independentes.

(b) Uma matriz com os vetores linha linearmente independentes e os vetores coluna linearmente independentes é quadrada.

(c) A nulidade de uma matriz não nula $m \times n$ é, no máximo, m.

(d) Adicionar uma coluna a mais a uma matriz aumenta seu posto por um.

(e) A nulidade de uma matriz quadrada com linhas linearmente independentes é, no mínimo, um.

(f) Se A for uma matriz quadrada e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for inconsistente com algum vetor $\mathbf{b}$, então a nulidade de A é zero.

(g) Se uma matriz A tiver mais linhas do que colunas, então a dimensão do espaço linha é maior do que a dimensão do espaço coluna.

(h) Se $\text{pos}(A^T) = \text{pos}(A)$, então A é quadrada.

(i) Não existe matriz 3×3 alguma cujos espaços linha e nulo são retas no espaço tridimensional.

(j) Se V for um subespaço de R^n e W for um subespaço de V, então $W^\perp$ é um subespaço de $V^\perp$.

4.9 Transformações matriciais de R^n em R^m

Nesta seção, estudamos funções da forma $\mathbf{w} = F(\mathbf{x})$, em que a variável independente $\mathbf{x}$ é um vetor em R^n, e a variável dependente $\mathbf{w}$ é um vetor em R^m. Vamos nos concentrar numa classe especial dessas funções, denominada "transformações matriciais". Essas transformações são fundamentais no estudo da Álgebra Linear e têm aplicações importantes na Física, nas Engenharias, nas Ciências Sociais e em várias áreas da Matemática.

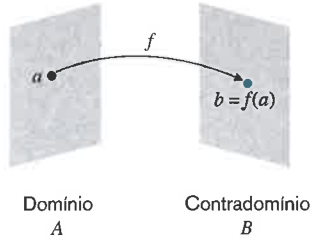
Funções e transformações

Lembre que uma ***função*** é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto A um, e exatamente um, elemento de um conjunto B. Se f associa o elemento b ao elemento a, então escrevemos

$$b = f(a)$$

e dizemos que b é a ***imagem*** de a por f ou que $f(a)$ é o ***valor*** de f em a. O conjunto A é denominado ***domínio*** de f e o conjunto B, ***contradomínio*** de f (Figura 4.9.1). A ***imagem*** de f é o subconjunto do contradomínio consistindo em todas as imagens de pontos no domínio.

O domínio e o contradomínio de muitas funções comuns são conjuntos de números reais, mas, neste texto, estamos interessados em funções cujo domínio e contradomínio são espaços vetoriais.



▲ **Figura 4.9.1**

> **DEFINIÇÃO 1** Se V e W forem espaços vetoriais e se f for uma função de domínio V e contradomínio W, dizemos que f é uma ***transformação*** de V em W, ou uma ***aplicação*** de V em W, que denotamos por
>
> $$f: V \to W$$
>
> No caso especial em que $V = W$, também dizermos que uma transformação é um ***operador*** de V.

Nesta seção, tratamos exclusivamente de transformações de R^n em R^m, sendo que as transformações de espaços vetoriais arbitrários serão consideradas em seções posteriores. Para ilustrar uma maneira pela qual podem surgir essas transformações, suponha que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sejam funções reais de n variáveis, digamos,

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Essas m equações associam um ponto $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ único em R^m a cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em R^n e, assim, definem uma transformação de R^n em R^m. Denotando essa transformação por T, temos $T: R^n \to R^m$ e

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

Transformações matriciais

No caso especial em que as equações em (1) forem lineares, elas poderão ser expressas na forma

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_1 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{2}$$

que, então, poderemos escrever em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

ou, mais concisamente, como

$$\mathbf{w} = A\mathbf{x} \tag{4}$$

Embora possamos ver isso como um sistema linear, vamos interpretar (4) como uma transformação que associa o vetor coluna $\mathbf{x}$ em R^n ao vetor coluna $\mathbf{w}$ em R^m pela multiplicação à esquerda de $\mathbf{x}$ por A, obtendo o que se denomina uma ***transformação matricial*** (ou ***operador matricial*** se $m = n$), que denotamos por $T_A: R^n \to R^m$. Com essa notação, a Equação (4) pode ser expressa por

$$\mathbf{w} = T_A(\mathbf{x}) \tag{5}$$

Dizemos que a transformação matricial T_A é a ***multiplicação por A*** e que a matriz A é a ***matriz canônica*** dessa transformação.

Às vezes, também é conveniente denotar (5) de maneira esquemática por

$$\mathbf{x} \xrightarrow{T_A} \mathbf{w} \tag{6}$$

que lemos "T_A aplica $\mathbf{x}$ em $\mathbf{w}$".

▶ EXEMPLO 1 Uma transformação matricial de R^4 em R^3

A transformação matricial $T: R^4 \to R^3$ definida pelas equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned} \tag{7}$$

pode ser expressa em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A imagem de um ponto (x_1, x_2, x_3, x_4) pode ser calculada diretamente das equações definidoras (7) ou de (8) por multiplicação matricial. Por exemplo, se

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$$

então, substituindo em (7), temos $w_1 = 1$, $w_2 = 3$, $w_3 = 8$ (verifique) ou, alternativamente, por (8),

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$ ◀

Algumas questões de notação

Às vezes, queremos denotar uma transformação matricial sem dar algum nome à própria matriz. Nesses casos, denotamos a matriz canônica de $T: R^n \to R^m$ pelo símbolo $[T]$. Assim, a equação

$$T(x) = [T]\mathbf{x} \tag{9}$$

simplesmente afirma que T é a transformação matricial de matriz canônica $[T]$ e que a imagem de $\mathbf{x}$ por essa transformação é o produto da matriz $[T]$ pelo vetor coluna $\mathbf{x}$.

Propriedades de transformações matriciais

O próximo teorema lista quatro propriedades básicas de transformações matriciais que decorrem de propriedades da multiplicação matricial.

TEOREMA 4.9.1 *Dada qualquer matriz A, a transformação matricial $T_A: R^n \to R^m$ tem as propriedades seguintes, com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n e escalar k.*

(*a*) $T_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(*b*) $T_A(k\mathbf{v}) = kT_A(\mathbf{v})$ **[Homogeneidade]**

(*c*) $T_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$ **[Aditividade]**

(*d*) $T_A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) - T_A(\mathbf{v})$

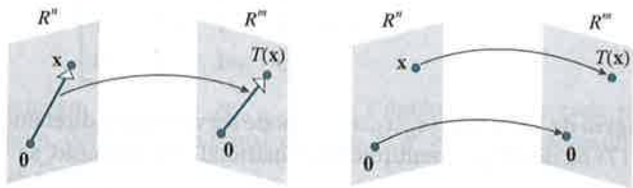
Prova As quatro partes são reformulações das propriedades conhecidas da multiplicação matricial, a saber,

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad A(k\mathbf{v}) = k(A\mathbf{v}), \quad A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}, \quad A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A\mathbf{u} - A\mathbf{v} \quad ◀$$

Segue do Teorema 4.9.1 que uma transformação matricial faz correspoder a combinações lineares de vetores em R^n as combinações lineares correspondentes em R^m, no sentido de que

$$T_A(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) = k_1T_A(\mathbf{v}_1) + k_2T_A(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_rT_A(\mathbf{v}_r) \tag{10}$$

Dependendo da interpretação de ênuplas como vetores ou pontos, o efeito geométrico de uma transformação matricial $T_A : R^n \to R^m$ é o de aplicar cada vetor (ponto) em R^n num vetor (ponto) em R^m (Figura 4.9.2).



▶ **Figura 4.9.2** T aplica vetores em vetores. T aplica pontos em pontos.

O próximo teorema afirma que se duas transformações matriciais de R^n em R^m tiverem a mesma imagem em cada ponto de R^n, então as próprias matrizes devem ser iguais.

TEOREMA 4.9.2 *Se $T_A : R^n \to R^m$ e $T_B : R^n \to R^m$ forem transformações matriciais e se $T_A(\mathbf{x}) = T_B(\mathbf{x})$ com qualquer vetor* **x** *em R^n, então $A = B$.*

Prova Dizer que $T_A(\mathbf{x}) = T_B(\mathbf{x})$ com qualquer vetor em R^n é o mesmo que dizer que

$$A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$$

com cada vetor **x** em R^n. Isso vale, em particular, se **x** for um dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ da base canônica em R^n, ou seja,

$$A\mathbf{e}_j = B\mathbf{e}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

Como cada entrada de $\mathbf{e}_j$ é nula, exceto a j-ésima, que é 1, segue do Teorema 1.3.1 que $A\mathbf{e}_j$ é a j-ésima coluna de A e $B\mathbf{e}_j$ é a j-ésima coluna de B. Assim, segue de (11) que as colunas correspondentes de A e B são iguais, ou seja, que $A = B$. ◀

▶ EXEMPLO 2 As transformações nulas

Se 0 for a matriz zero $m \times n$, então

$$T_0(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

de modo que a multiplicação por zero transforma cada vetor em R^n no vetor nulo de R^m. Dizemos que T_0 é a **transformação nula**, ou **transformação zero**, de R^n em R^m.

▶ EXEMPLO 3 Os operadores identidade

Se I for a matriz identidade $n \times n$, então

$$T_I(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

de modo que a multiplicação por I transforma cada vetor em R^n em si mesmo. Dizemos que T_I é o **operador identidade** de R^n. ◀

Um procedimento para encontrar matrizes canônicas

Existe uma maneira de encontrar a matriz canônica de uma transformação matricial de R^n em R^m, considerando o efeito dessa transformação nos vetores da base canônica de R^n. Para explicar essa ideia, suponha que A seja desconhecida e que

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \ldots, \quad \mathbf{e}_n$$

sejam os vetores da base canônica de R^n. Suponha, também, que as imagens desses vetores pela transformação T_A sejam

$$T_A(\mathbf{e}_1) = A\mathbf{e}_1, \quad T_A(\mathbf{e}_2) = A\mathbf{e}_2, \ldots, \quad T_A(\mathbf{e}_n) = A\mathbf{e}_n$$

Segue do Teorema 1.3.1 que $A\mathbf{e}_j$ é uma combinação linear das colunas de A, em que os coeficientes sucessivos são as entradas de $\mathbf{e}_j$. Como todas as entradas de $\mathbf{e}_j$ são nulas, exceto a j-ésima, segue que o produto $A\mathbf{e}_j$ é exatamente a j-ésima coluna da matriz A. Assim,

$$A = [T_A(\mathbf{e}_1) \mid T_A(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T_A(\mathbf{e}_n)] \tag{12}$$

Resumindo, temos o seguinte procedimento para encontrar a matriz canônica de uma transformação matricial.

Encontrando a matriz canônica de uma transformação matricial

Passo 1. Encontre as imagens dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ da base canônica de R^n em formato de coluna.

Passo 2. Construa a matriz que tem as imagens obtidas no Passo 1 como colunas sucessivas. Essa é a matriz canônica da transformação.

Operadores de reflexão

Entre os operadores matriciais mais importantes de R^2 e R^3, estão os que aplicam cada ponto na sua imagem simétrica em relação a alguma reta ou plano fixados, que são denominados ***operadores de reflexão***, ou ***reflexões***, simplesmente. A Tabela 1 mostra as matrizes canônicas das reflexões nos eixos coordenados em R^2, e a Tabela 2 mostra as matrizes canônicas das reflexões nos planos coordenados de R^3. Em cada caso, a matriz canônica foi obtida encontrando as imagens dos vetores da base canônica, convertendo essas imagens em vetores coluna e, então, usando esses vetores coluna como colunas sucessivas da matriz canônica.

Operadores de projeção

Os operadores matriciais de R^2 e R^3 que aplicam cada ponto em sua projeção ortogonal numa reta ou plano fixados são denominados ***operadores de projeção*** (ou, mais precisamente, de ***operadores de projeção ortogonal***) ou, simplesmente, ***projeções*** (***ortogonais***). A Tabela 3 mostra as matrizes canônicas das projeções ortogonais sobre os eixos coordenados em R^2, e a Tabela 4 mostra as matrizes canônicas das projeções ortogonais sobre os planos coordenados em R^3.

Tabela 1

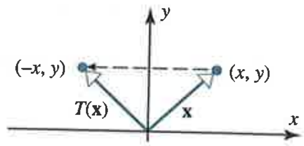
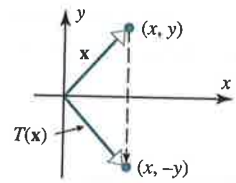
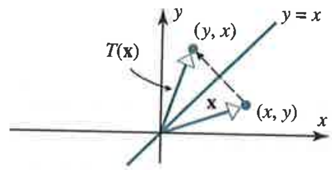
Operador	Ilustração	Imagens de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$	Matriz canônica
Reflexão no eixo y $T(x, y) = (-x, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (-1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão no eixo x $T(x, y) = (x, -y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão na reta $y = x$ $T(x, y) = (x, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (1, 0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tabela 2

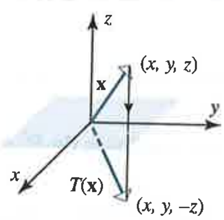
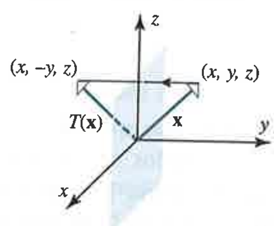
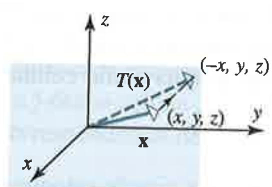
Operador	Ilustração	Imagens de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$	Matriz canônica
Reflexão no plano xy $T(x, y, z) = (x, y, -z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão no plano xz $T(x, y, z) = (x, -y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão na plano yz $T(x, y, z) = (-x, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3

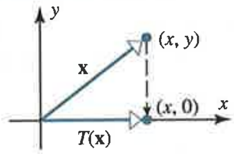
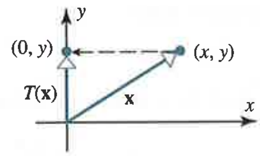
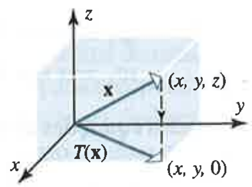
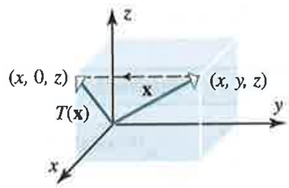
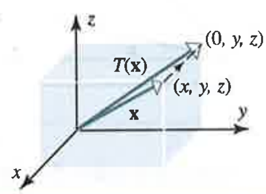
Operador	Ilustração	Imagens de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$	Matriz canônica
Projeção ortogonal sobre o eixo x $T(x, y) = (x, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (1, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o eixo y $T(x, y) = (0, y)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 4

Operador	Ilustração	Imagens de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$	Matriz canônica
Projeção ortogonal sobre o plano xy $T(x, y, z) = (x, y, 0)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano xz $T(x, y, z) = (x, 0, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano yz $T(x, y, z) = (0, y, z)$		$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ $T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ $T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

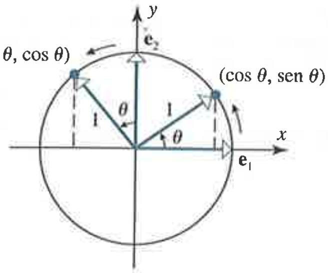
Operadores de rotação

Os operadores matriciais de R^2 e R^3 que movem pontos ao longo de arcos circulares são denominados ***operadores de rotação*** ou, simplesmente, ***rotações***. Vejamos como é possível encontrar a matriz canônica de uma rotação $T : R^2 \rightarrow R^2$ que move os pontos no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo θ (Figura 4.9.3). Conforme ilustrado na Figura 4.9.3, as imagens dos vetores da base canônica são

$$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$[T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



▶ **Figura 4.9.3**

Mantendo a notação usual, denotamos esse operador por R_θ e dizemos que

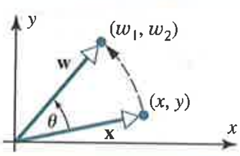
$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{13}$$

é a ***matriz de rotação*** de R^2. Se $\mathbf{x} = (x, y)$ for um vetor em R^2 e se $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ for sua imagem por essa rotação, então a relação $\mathbf{w} = R_\theta\mathbf{x}$ pode ser dada em termos de componentes por

$$\begin{aligned} w_1 &= x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ w_1 &= x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{14}$$

Essas relações são denominadas ***equações de rotação*** em R^2. Essas ideias estão resumidas na Tabela 5.

Tabela 5

Operador	Ilustração	Equações de rotação	Matriz canônica
Rotação pelo ângulo θ		$w_1 = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta$ $w_2 = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

No plano, os ângulos anti-horários são positivos e os ângulos horários são negativos. A matriz de rotação de uma rotação *horária* de $-\theta$ radianos pode ser obtida substituindo θ por $-\theta$ em (13). Simplificando, obtemos

$$R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

▶ EXEMPLO 4 Um operador de rotação

Encontre a imagem de $\mathbf{x} = (1, 1)$ pela rotação de $\pi/6$ radianos ($= 30°$) em torno da origem.

Solução Segue de (13) com $\theta = \pi/6$ que

$$R_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}37 \\ 1{,}37 \end{bmatrix}$$

ou, em notação de vírgulas, $R_{\pi/6}(1, 1) = (0{,}37; 1{,}37)$. ◀

Rotações em R^3

Em geral, descrevemos uma rotação de vetores em R^3 em relação a um raio partindo da origem, denominado ***eixo de rotação***. À medida que um vetor gira em torno do eixo de rotação, ele varre alguma porção de um cone (Figura 4.9.4*a*). O ***ângulo de rotação***, que é medido na base do cone, é descrito como sendo no sentido "horário" ou "anti-horário" em relação a um ponto de vista ao longo do eixo de rotação *olhando para a origem*. Por exemplo, na Figura 4.9.4*a*, o vetor **w** resulta da rotação no sentido anti-horário do vetor **x** em torno do eixo l por um ângulo de θ. Assim como em R^2, os ângulos são *positivos* se gerados por rotações no sentido anti-horário e *negativos* se gerados por rotações no sentido horário.

A maneira mais comum de descrever um eixo de rotação arbitrário é especificando um vetor não nulo **u** com ponto inicial na origem e apontando ao longo do eixo de rotação. O sentido anti-horário para a rotação em torno do eixo pode, então, ser determinado pela "regra da mão direita" (Figura 4.9.4*b*). Se o polegar da mão direita apontar na direção e sentido do vetor **u**, os dedos da mão fechada apontam num sentido anti-horário.

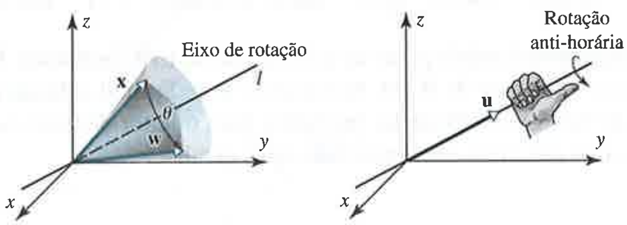
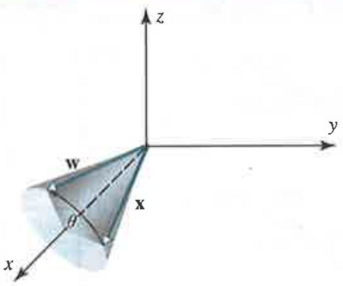
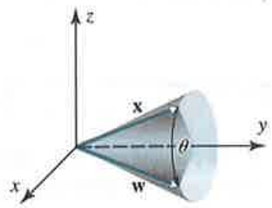
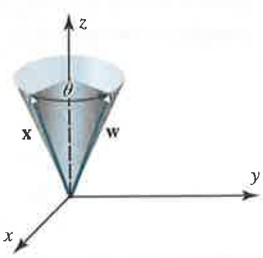


Figura 4.9.4 (*a*) Ângulo de rotação (*b*) Regra da mão direita

Um ***operador de rotação*** em R^3, ou simplesmente uma ***rotação***, é um operador matricial que gira cada vetor em R^3 em torno de algum eixo de rotação por um ângulo θ fixado. Na Tabela 6, descrevemos as rotações em R^3 cujos eixos de rotação são os eixos coordenados positivos. Para cada uma dessas rotações, um dos componentes permanece inalterado, e a relação entre os dois outros componentes pode ser deduzida da mesma maneira que deduzimos (14). Por exemplo, na rotação em torno do eixo z, os componentes z de **x** e de $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$ são os mesmos, e os componentes x e y estão relacionados como em (14). Isso fornece as equações de rotação mostradas na última linha da Tabela 6.

Tabela 6

Operador	Ilustração	Equações de rotação	Matriz canônica
Rotação anti-horária em torno do eixo x positivo pelo ângulo θ		$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\,\text{sen}\,\theta$ $w_3 = y\,\text{sen}\,\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo y positivo pelo ângulo θ		$w_1 = x\cos\theta + z\,\text{sen}\,\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\,\text{sen}\,\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotação anti-horária em torno do eixo z positivo pelo ângulo θ		$w_1 = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta$ $w_2 = x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

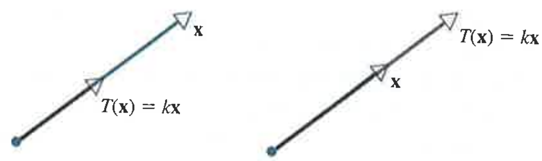
Observamos, para completar, que a matriz canônica de uma rotação anti-horária por um ângulo θ em torno de um eixo em R^3 determinado por um vetor arbitrário $\mathbf{u} = (a, b, c)$, mas *unitário*, com ponto inicial na origem, é

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\,\mathrm{sen}\,\theta & ac(1-\cos\theta)+b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\,\mathrm{sen}\,\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\,\mathrm{sen}\,\theta & bc(1-\cos\theta)+a\,\mathrm{sen}\,\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix} \tag{15}$$

A dedução dessa matriz pode ser encontrada no livro intitulado *Principles of Interactive Computer Graphics*, de W. M. Newmann e R. F. Sproull, editado em 1979 pela McGraw--Hill, de Nova York. Pode ser instrutivo para o leitor deduzir os resultados da Tabela 6 como casos especiais desse resultado mais geral.

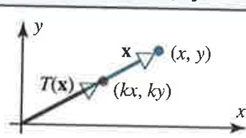
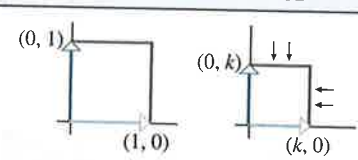
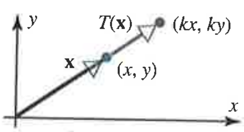
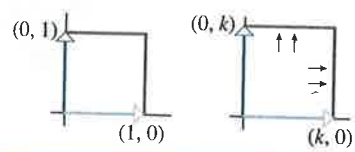
Dilatações e contrações

Se k for um escalar não negativo, então o operador $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ de R^2 ou R^3 tem o efeito de aumentar ou diminuir o comprimento de cada vetor pelo fator k. Se $0 \le k < 1$, o operador é denominado ***contração*** de fator k e, se $k > 1$, ***dilatação*** de fator k (Figura 4.9.5). Se $k = 1$, então T é o operador identidade, que pode ser considerado uma contração ou uma dilatação. As Tabelas 7 e 8 ilustram esses operadores.



▶ **Figura 4.9.5** (*a*) $0 \le k < 1$ (*b*) $k > 1$

Tabela 7

Operador	Ilustração $T(x, y) = (kx, ky)$	Efeito na base canônica	Matriz canônica
Contração de fator k em R^2 ($0 \le k < 1$)			
Dilatação de fator k em R^2 ($k > 1$)			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Guinada, arfagem e rolagem

Muitas vezes, na Aeronáutica e Astronáutica, a orientação de um avião ou de um ônibus espacial em relação a um sistema de coordenadas xyz é descrita em termos de ângulos denominados ***guinada***, ***arfagem*** e ***rolagem***. Por exemplo, se o plano xy definir a horizontal e um ônibus espacial estiver voando ao longo do eixo y positivo, então a ***guinada*** é o ângulo de rotação do avião em torno do eixo z positivo, a ***arfagem*** é o ângulo de rotação em torno do eixo x positivo, e a ***rolagem*** é o ângulo de rotação em torno do eixo y positivo. Uma combinação de guinada, arfagem e rolagem pode ser obtida com uma única rotação em torno de algum eixo pela origem. Essa é a maneira pela qual um ônibus espacial efetivamente faz seus ajustes de voo, não corrigindo cada rotação separadamente, mas sim calculando um eixo e efetuando uma única rotação em torno desse eixo para obter a orientação correta. Tais manobras rotacionais são utilizadas para alinhar uma antena, apontar a nave em direção a um objeto celeste ou posicionar um compartimento para carga e descarga.

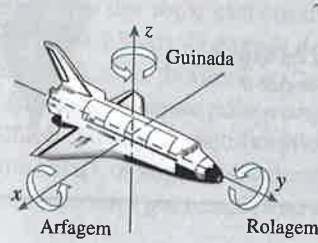
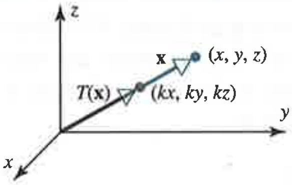
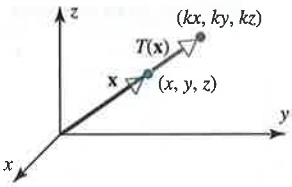


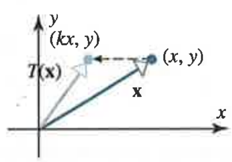
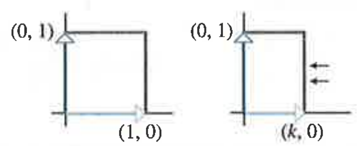
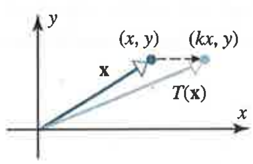
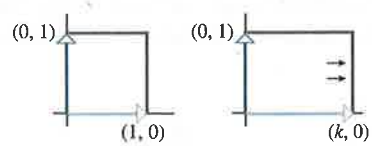
Tabela 8

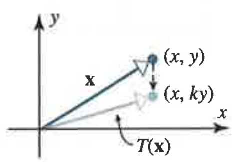
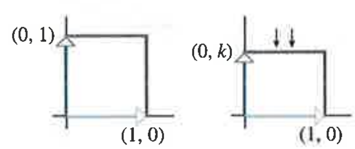
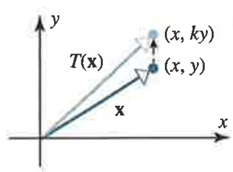
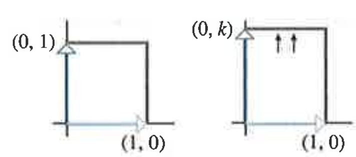
Operador	Ilustração	Matriz canônica
Contração de fator k em R^3 $(0 \leq k < 1)$		$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatação de fator k em R^3 $(k > 1)$		

Numa dilatação ou contração de R^2 ou R^3, todas as coordenadas são multiplicadas pelo fator k. Se somente uma das coordenadas for multiplicada por k, então o operador resultante é denominado ***expansão*** ou ***compressão*** de fator k. Isso é ilustrado na Tabela 9 em R^2. O leitor não deveria encontrar dificuldades para estender esses resultados ao R^3.

Expansões e compressões

Tabela 9

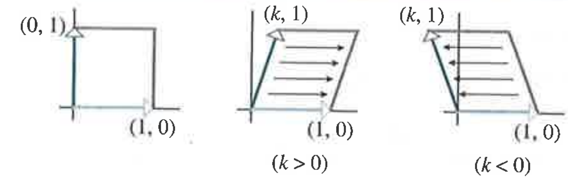
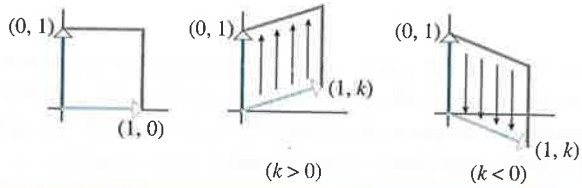
Operador	Ilustração	Efeito na base canônica	Matriz canônica
Compressão de R^2 na direção x de fator k $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Expansão de R^2 na direção x de fator k $(k > 1)$			

Operador	Ilustração	Efeito na base canônica	Matriz canônica
Compressão de R^2 na direção y de fator k $(0 \leq k < 1)$			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Expansão de R^2 na direção y de fator k $(k > 1)$			

Cisalhamentos

Um operador matricial da forma $T(x, y) = (x + ky, y)$ translada um ponto (x, y) do plano xy paralelamente ao eixo x por uma quantia ky proporcional à coordenada y do ponto. Esse operador deixa fixados os pontos do eixo x (pois $y = 0$), mas à medida que nos afastamos do eixo x, aumenta a distância transladada. Dizemos que esse operador é um ***cisalhamento de fator k na direção x***. Analogamente, um operador matricial da forma $T(x, y) = (x, y + kx)$ é um ***cisalhamento de fator k na direção y***. A Tabela 10 ilustra a informação básica sobre cisalhamentos em R^2.

Tabela 10

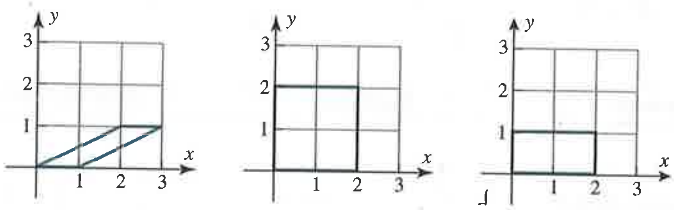
Operador	Efeito na base canônica	Matriz canônica
Cisalhamento de R^2 de fator k na direção x $T(x, y) = (x + ky, y)$		$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Cisalhamento de R^2 de fator k na direção y $T(x, y) = (x, y + kx)$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

▶ EXEMPLO 5 Alguns operadores matriciais básicos de R^2

Em cada parte, descreva o operador matricial correspondente a A e mostre seu efeito no quadrado unitário.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução Comparando os formatos dessas matrizes com os das Tabelas 7, 9 e 10, vemos que a matriz A_1 corresponde a um cisalhamento de fator 2 na direção x, a matriz A_2 corresponde na uma dilatação de fator 2, e A_3 corresponde a uma expansão na direção x de fator 2. Os efeitos desses operadores no quadrado unitário são mostrados na Figura 4.9.6. ◀



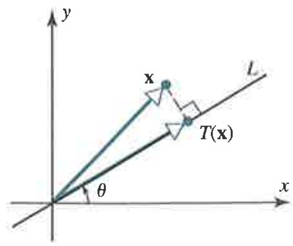
▶ Figura 4.9.6

OPCIONAL

Projeções ortogonais sobre retas pela origem

Na Tabela 3, listamos as matrizes canônicas das projeções ortogonais sobre os eixos coordenados de R^2. Esses operadores são casos especiais do operador $T: R^2 \to R^2$ mais geral que aplica cada ponto em sua projeção ortogonal sobre uma rela L pela origem que faz um ângulo θ com o eixo x positivo (Figura 4.9.7). No Exemplo 4 da Seção 3.3, usamos a Fórmula (1) daquela seção para encontrar as projeções ortogonais dos vetores da base canônica de R^2 sobre aquela reta. Em termos matriciais, vimos que essas projeções são

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$



▲ Figura 4.9.7

Assim, a matriz canônica de T é

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Mantendo a notação usual, denotamos esse operador por

$$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} \tag{16}$$

Incluímos duas versões da Fórmula (16) porque ambas são muito usadas. Enquanto a primeira versão envolve somente o ângulo θ, a segunda envolve tanto θ quanto 2θ.

▶ EXEMPLO 6 Projeção ortogonal sobre uma reta pela origem

Use a Fórmula (16) para encontrar a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{x} = (1, 5)$ sobre a reta pela origem que faz um ângulo de $\pi/6$ (= 30°) com o eixo x positivo.

Solução Como $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, segue de (16) que a matriz canônica dessa projeção é

$$P_{\pi/6} = \begin{bmatrix} \cos^2(\pi/6) & \operatorname{sen}(\pi/6)\cos(\pi/6) \\ \operatorname{sen}(\pi/6)\cos(\pi/6) & \operatorname{sen}^2(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

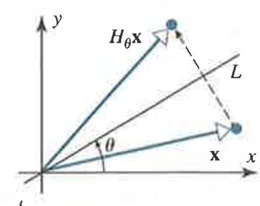
Assim,

$$P_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+5\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}+5}{4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2{,}91 \\ 1{,}68 \end{bmatrix}$$

ou, em notação com vírgulas, $P_{\pi/6}(1, 5) \approx (2{,}91; 1{,}68)$. ◀

Reflexões em retas pela origem

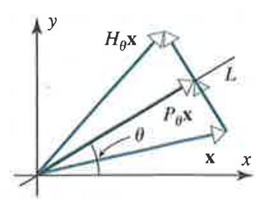
Na Tabela 1, listamos as reflexões pelos eixos coordenados em R^2. Esses operadores são casos especiais do operador $H_\theta : R^2 \to R^2$ mais geral que aplica cada ponto em sua reflexão na reta L pela origem que faz um ângulo θ com o eixo x positivo (Figura 4.9.8). Poderíamos encontrar a matriz canônica de H_θ encontrando as imagens dos vetores da base canônica, mas, em vez disso, vamos aproveitar nosso trabalho com projeções ortogonais e usar a Fórmula (16) com P_θ para encontrar uma fórmula para H_θ.



▲ Figura 4.9.8

O leitor pode ver da Figura 4.9.9 que, com qualquer vetor $\mathbf{x}$ em R^n,

$$P_\theta\mathbf{x} - \mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(H_\theta\mathbf{x} - \mathbf{x}) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad H_\theta\mathbf{x} = (2P_\theta - I)\mathbf{x}$$



▲ Figura 4.9.9

Assim, segue do Teorema 4.9.2 que

$$H\theta = 2P\theta - I \tag{17}$$

e, portanto, segue de (16) que

$$H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen}2\theta \\ \operatorname{sen}2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \tag{18}$$

▶ EXEMPLO 7 Reflexão numa reta pela origem

Encontre a reflexão do vetor $\mathbf{x} = (1, 5)$ na reta pela origem que faz um ângulo de $\pi/6$ (= 30°) com o eixo x positivo.

Solução Como $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$, segue de (18) que a matriz canônica deixae como está reflexão é

$$H_{\pi/6} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & -\cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$H_{\pi/6}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-5}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4{,}83 \\ -1{,}63 \end{bmatrix}$$

ou, em notação com vírgulas, $H_{\pi/6}(1, 5) \approx (4{,}83; -1{,}63)$. ◀

Observe que as matrizes canônicas nas Tabelas 1 e 3 são casos especiais de (18) e (16).

Revisão de conceitos

- Função
- Imagem
- Valor
- Domínio
- Contradomínio
- Transformação
- Operador
- Transformação matricial
- Operador matricial
- Matriz canônica
- Propriedades de transformações matriciais
- Transformação nula
- Operador identidade
- Reflexão
- Projeção
- Rotação
- Matriz de rotação
- Equações de rotação
- Eixo de rotação no espaço
- Ângulo de rotação no espaço
- Expansão
- Compressão
- Cisalhamento
- Dilatação
- Contração

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar o domínio e o contradomínio de uma transformação e determinar se a transformação é linear.
- Encontrar a matriz canônica de uma transformação matricial.
- Descrever o efeito de um operador matricial na base canônica de R^n.

Conjunto de exercícios 4.9

▶ Nos Exercícios 1–2, em cada parte, encontre o domínio e o contradomínio da transformação $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. ◀

1. (a) A tem tamanho 3×2. (b) A tem tamanho 2×3.
(c) A tem tamanho 3×3. (d) A tem tamanho 1×6.

2. (a) A tem tamanho 4×5. (b) A tem tamanho 5×4.
(c) A tem tamanho 4×4. (d) A tem tamanho 3×1.

3. Se $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_2, 3x_1)$, então o domínio de T é ______, o contradomínio de T é ______ e a imagem de $\mathbf{x} = (1, -2)$ por T é ______________.

4. Se $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2)$, então o domínio de T é ______, o contradomínio de T é ______ e a imagem de $x = (0, -1, 4)$ por T é ______________.

5. Em cada parte, encontre o domínio e o contradomínio da transformação definida pelas equações e determine se a transformação é linear.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= 5x_1 - 8x_2 + x_3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1x_2 - x_2 \\ w_2 &= x_1 + 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= 5x_1 - x_2 + x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + 7x_3 \\ w_3 &= 2x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ w_2 &= 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4 \end{aligned}$

6. Em cada parte, determine se T é uma transformação matricial.

(a) $T(x, y) = (2x, y)$ (b) $T(x, y) = (-y, x)$

(c) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

(d) $T(x, y) = (x^2, y)$ (e) $T(x, y) = (x, y + 1)$

7. Em cada parte, determine se T é uma transformação matricial.

(a) $T(x, y, z) = (0, 0)$ (b) $T(x, y, z) = (1, 1)$

(c) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$

(d) $T(x, y, z) = (y^2, z)$ (e) $T(x, y, z) = (y - 1, x)$

8. Em cada parte, encontre a matriz canônica da transformação definida pelas equações.

(a) $$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_4 \\ w_2 &= 3x_1 + 5x_2 - x_4 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} w_1 &= 7x_1 + 2x_2 - 8x_3 \\ w_2 &= - x_2 + 5x_3 \\ w_3 &= 4x_1 + 7x_2 - x_3 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 - 2x_2 \\ w_2 &= 5x_1 - 7x_2 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} w_1 &= x_1 \\ w_2 &= x_1 + x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ w_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

9. Encontre a matriz canônica do operador $T: R^3 \to R^3$ definido por

$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ w_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 \\ w_3 &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

e depois calcule $T(-1, 2, 4)$ por substituição direta nas equações e também por multiplicação matricial.

10. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador T definido pela fórmula.

(a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

(b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$

(d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

11. Em cada parte, encontre a matriz canônica da transformação T definida pela fórmula.

(a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$

(d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

12. Em cada parte, encontre $T(x)$ e expresse a resposta em forma matricial.

(a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(b) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $[T] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(d) $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, use a matriz canônica de T para encontrar $T(\mathbf{x})$ e depois confira o resultado calculando $T(\mathbf{x})$ diretamente.

(a) $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$; $\mathbf{x} = (-1, 4)$

(b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0)$; $\mathbf{x} = (2, 1, -3)$

14. Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de $(-1, 2)$

(a) no eixo x

(b) no eixo y

(c) na reta $y = x$

15. Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de $(2, -5, 3)$ no

(a) plano xy

(b) plano xz

(c) plano yz

16. Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de $(2, -5)$ sobre o

(a) eixo x

(b) eixo y

17. Use multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal de $(-2, 1, 3)$ sobre o

(a) plano xy

(b) plano xz

(c) plano yz

18. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(3, -4)$ se for girado por um ângulo de

(a) $\theta = 30°$. (b) $\theta = -60°$.

(c) $\theta = 45°$. (d) $\theta = 90°$.

19. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(-2, 1, 2)$ se for girado por

(a) 30° em torno do eixo x

(b) 45° em torno do eixo y

(c) 90° em torno do eixo z

20. Encontre a matriz canônica do operador que efetua a rotação de um vetor em R^3 por um ângulo de $-60°$ em torno do

(a) eixo x

(b) eixo y

(c) eixo z

21. Use multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $(-2, 1, 2)$ se for girado por

(a) $-30°$ em torno do eixo x

(b) $-45°$ em torno do eixo y

(c) $-90°$ em torno do eixo z

22. Definimos as ***projeções ortogonais*** de R^3 sobre os eixos x, y e z, respectivamente, por

$$T_1(x, y, z) = (x, 0, 0), \quad T_2(x, y, z) = (0, y, 0), \quad T_3(x, y, z) = (0, 0, z)$$

(a) Mostre que as projeções ortogonais sobre os eixos coordenados são operadores matriciais e encontre suas matrizes canônicas.

(b) Mostre que se $T: R^3 \to R^3$ for uma projeção ortogonal sobre um dos eixos coordenados, então, dado qualquer vetor em R^3, os vetores $T(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ são ortogonais.

(c) Faça um esboço indicando $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} - T(\mathbf{x})$ no caso em que T é a projeção ortogonal sobre o eixo x.

23. A partir da Fórmula (15), obtenha as matrizes canônicas das rotações em torno dos eixos x, y e z de R^3.

24. Use a Fórmula (15) para encontrar a matriz canônica de uma rotação de $\pi/2$ radianos em torno do eixo determinado pelo vetor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. [*Observação*: a Fórmula (15) exige que o vetor que define o eixo de rotação tenha comprimento 1.]

25. Use a Fórmula (15) para encontrar a matriz canônica de uma rotação de 180° em torno do eixo determinado pelo vetor $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$. [*Observação*: a Fórmula (15) exige que o vetor que define o eixo de rotação tenha comprimento 1.]

26. Pode ser provado que se A for uma matriz 2×2 de vetores coluna ortonormais e com $\det(A) = 1$, então a multiplicação por A é uma rotação por algum ângulo θ. Verifique que

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

satisfaz as condições enunciadas, e encontre o ângulo de rotação.

27. O resultado enunciado no Exercício 26 pode ser estendido ao R^3, isto é, pode ser provado que se A for uma matriz 3×3 de vetores coluna ortonormais e se $\det(A) = 1$, então a multiplicação por A é uma rotação em torno de algum eixo por algum ângulo θ. Use a Fórmula (15) para mostrar que esse ângulo de rotação satisfaz a equação

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}(A) - 1}{2}$$

28. Seja A uma matriz 3×3 (diferente da matriz identidade) que satisfaça as condições enunciadas no Exercício 27. Pode ser mostrado que se $\mathbf{x}$ for um vetor não nulo qualquer em R^3, então o vetor $\mathbf{u} = A\mathbf{x} + A^T\mathbf{x} + [1 - \operatorname{tr}(A)]\mathbf{x}$ determina um eixo de rotação quando $\mathbf{u}$ for posicionado com seu ponto inicial na origem. [Ver o artigo *The Axis of Rotation: Analysis, Algebra, Geometry*, por Dan Kalman, em *Mathematics Magazine*, Vol. 62, Nº 4, outubro de 1989.]

(a) Mostre que a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

é uma rotação.

(b) Encontre um vetor de comprimento 1 que define um eixo da rotação.

(c) Encontre todas as soluções da equação do Exercício 27 que pertençam ao intervalo $[0, 2\pi]$ e, substituindo essas soluções na fórmula (15), encontre um ângulo de rotação em torno do eixo da parte (b) que resulta da multiplicação pela matriz A da parte (a).

29. Em cada caso, descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

30. Em cada caso, descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

31. Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor $\mathbf{x}$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

32. Se a multiplicação por A gira um vetor $\mathbf{x}$ do plano xy por um ângulo θ, qual é o efeito de multiplicar $\mathbf{x}$ por A^T? Explique seu raciocínio.

33. Seja $\mathbf{x}_0$ um vetor coluna não nulo em R^2 e suponha que $T: R^2 \to R^2$ seja a transformação definida pela fórmula $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + R_\theta\mathbf{x}$, em que R_θ é a matriz canônica da rotação de R^2 em torno da origem pelo ângulo θ. Dê uma descrição geométrica dessa transformação. Será uma transformação matricial? Explique.

34. É costume dizer que uma função da forma $f(x) = mx + b$ é uma "função linear" porque o gráfico de $y = mx + b$ é uma reta. f será uma transformação matricial em R?

35. Sejam $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ uma reta em R^n e $T: R^n \to R^n$ um operador matricial de R^n. Que tipo de objeto geométrico é a imagem dessa reta pelo operador T? Explique seu raciocínio.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(i), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz 2×3, então o domínio da transformação T_A é R^2.

(b) Se A for uma matriz $m \times n$, então o contradomínio da transformação T_A é R^n.

(c) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então T é uma transformação matricial.

(d) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1T(\mathbf{x}) + c_2T(\mathbf{y})$ com quaisquer escalares c_1 e c_2 e quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em R^n, então T é uma transformação matricial.

(e) Só existe uma única transformação matricial $T: R^n \to R^m$ tal que $T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})$ com qualquer vetor $\mathbf{x}$ em R^n.

(f) Só existe uma única transformação matricial $T: R^n \to R^m$ tal que $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ com quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em R^n.

(g) Se $\mathbf{b}$ for um vetor não nulo em R^n, então $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ define um operador matricial de R^n.

(h) A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é a matriz canônica de alguma rotação.

(i) As matrizes canônicas das reflexões nos eixos coordenados do espaço bidimensional têm o formato $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, com $a = \pm 1$.

4.10 Propriedades das transformações matriciais

Nesta seção, discutimos propriedades de transformações matriciais. Mostramos, por exemplo, que se aplicarmos várias transformações matriciais em sucessão, então o mesmo resultado pode ser obtido por uma única transformação matricial apropriadamente escolhida. Também exploramos a relação entre a invertibilidade de uma matriz e as propriedades da transformação correspondente.

Composição de transformações matriciais

Suponha que T_A seja uma transformação matricial de R^n em R^k e T_B uma transformação matricial de R^k em R^m. Se $\mathbf{x}$ for um vetor em R^n, então T_A aplica esse vetor num vetor $T_A(\mathbf{x})$ em R^k, e T_B, por sua vez, aplica esse vetor no vetor $T_B(T_A(\mathbf{x}))$ em R^m. Esse processo cria uma transformação de R^n em R^m que denominamos a ***composição*** ou a ***composta*** de T_B com T_A, que denotamos pelo símbolo

$$T_B \circ T_A$$

que se lê "T_B bola T_A". Conforme ilustrado na Figura 4.10.1, a transformação T_A na fórmula é aplicada antes, ou seja,

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) \tag{1}$$

Essa composição também é uma transformação matricial, pois

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) = B(T_A(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}$$

mostrando que é a multiplicação por BA. Isso pode ser resumido na fórmula

$$T_B \circ T_A = T_{BA} \tag{2}$$

ADVERTÊNCIA Assim como não é verdade, em geral, que

$$AB = BA$$

também não é verdade, em geral, que

$$T_B \circ T_A = T_A \circ T_B$$

Ou seja, *a ordem importa na composição de transformações matriciais.*

As composições podem ser definidas com qualquer sucessão finita de transformações matriciais cujos domínios e contradomínios tenham as dimensões apropriadas. Por exemplo, para estender a Fórmula (2) para três fatores, considere as transformações matriciais

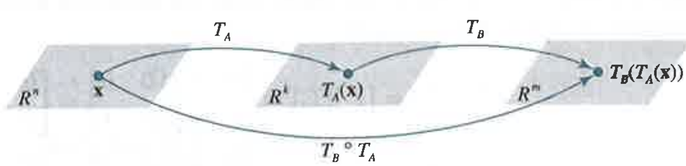
$$T_A : R^n \to R^k, \quad T_B : R^k \to R^l, \quad T_C : R^l \to R^m$$

Definimos a composição $(T_C \circ T_B \circ T_A) : R^n \to R^m$ por

$$(T_C \circ T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_C(T_B(T_A(\mathbf{x})))$$

Como antes, pode ser mostrado que essa transformação é matricial, com matriz canônica CBA e que

$$T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA} \tag{3}$$



▶ **Figura 4.10.1**

Como na Fórmula (9) da Seção 4.9, podemos usar colchetes para denotar uma transformação matricial sem referência a uma matriz específica. Assim, por exemplo, a fórmula

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] \tag{4}$$

é uma reformulação da Fórmula (2), afirmando que a matriz canônica da composta é o produto das matrizes canônicas na ordem apropriada. Analogamente,

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1] = [T_3][T_2][T_1] \tag{5}$$

é uma reformulação da Fórmula (3).

▶ EXEMPLO 1 Composição de duas rotações

Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ os operadores matriciais que giram os vetores pelos ângulos θ_1 e θ_2, respectivamente. Assim, o operador

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

primeiro gira $\mathbf{x}$ por um ângulo θ e então gira $T_1(\mathbf{x})$ por um ângulo θ_2. Segue que o efeito líquido de $T_2 \circ T_1$ é girar cada vetor em R^2 por um ângulo $\theta_1 + \theta_2$ (Figura 4.10.2). Assim, as matrizes canônicas desses operadores matriciais são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Essas matrizes deveriam satisfazer (4). Com a ajuda de algumas identidades trigonométricas básicas, podemos confirmar isso como segue.

$$\begin{aligned}
[T_2][T_1] &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -(\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1) \\ \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= [T_2 \circ T_1]
\end{aligned}$$

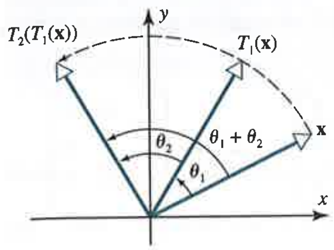
▶ EXEMPLO 2 A composição não é comutativa

Sejam $T_1 : R^2 \to R^2$ a reflexão na reta $y = x$ e $T_2 : R^2 \to R^2$ a projeção ortogonal sobre o eixo y. A Figura 4.10.3 ilustra graficamente que $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ têm efeitos diferentes sobre um vetor $\mathbf{x}$. Essa mesma conclusão pode ser alcançada mostrando que as matrizes canônicas de T_1 e T_2 não comutam.

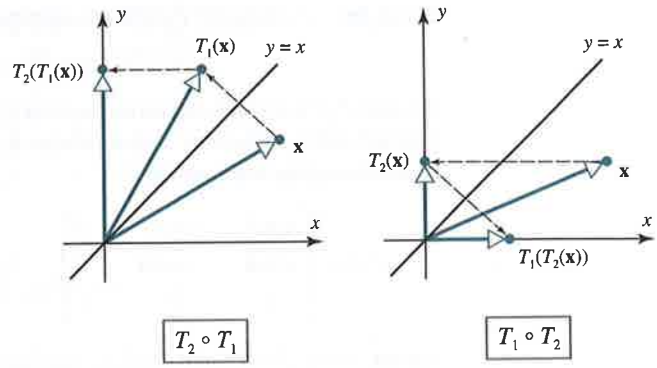
$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $[T_2 \circ T_1] \neq [T_1 \circ T_2]$.



▲ Figura 4.10.2



▲ Figura 4.10.3

▶ **EXEMPLO 3 A composição de duas reflexões**

Sejam $T_1 : R^2 \rightarrow R^2$ a reflexão no eixo y e $T_2 : R^2 \rightarrow R^2$ a reflexão no eixo x. Nesse caso, $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ são idênticas, ambas aplicando cada vetor $\mathbf{x} = (x, y)$ em seu negativo $-\mathbf{x} = (-x, -y)$ (Figura 4.10.4), como segue.

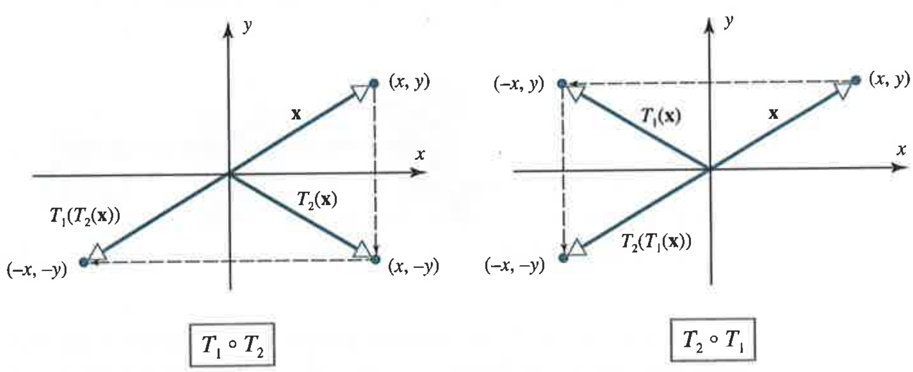
$$(T_1 \circ T_2)(x, y) = T_1(x, -y) = (-x, -y)$$
$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(-x, y) = (-x, -y)$$

A igualdade de $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$ também pode ser deduzida mostrando que as matrizes canônicas de T_1 e T_2 comutam, como segue.

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O operador $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ de R^2 ou R^3 é denominado ***reflexão na origem***. Como mostram as contas acima, a matriz canônica desse operador de R^2 é

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



▶ Figura 4.10.4

▶ **EXEMPLO 4 Composição de três transformações**

Encontre a matriz canônica do operador $T : R^3 \rightarrow R^3$ que primeiro gira um vetor no sentido anti-horário em torno do eixo z por um ângulo θ, depois reflete o vetor resultante no plano yz e, finalmente, projeta esse vetor ortogonalmente sobre o plano xy.

Solução O operador T pode ser expresso como a composição

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

em que T_1 é a rotação em torno do eixo z, T_2 é a reflexão no plano yz, e T_3 é a projeção ortogonal sobre o plano xy. Pelas Tabelas 6, 2 e 4 da Seção 4.9, as matrizes canônicas dessas transformações lineares são

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, segue de (5) que a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

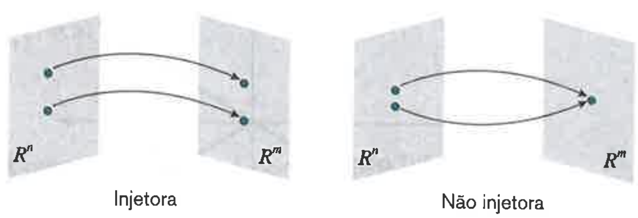
Transformações matriciais injetoras

Nosso próximo objetivo é estabelecer uma relação entre a invertibilidade de uma matriz A e as propriedades da transformação matricial T_A correspondente.

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que uma transformação matricial $T_A : R^n \to R^m$ é ***injetora*** se T_A aplica vetores (pontos) distintos em R^n em vetores (pontos) distintos em R^m.

(Ver Figura 4.10.5.) Essa ideia pode ser expressa de várias maneiras. Por exemplo, o leitor deve reconhecer que as afirmações seguintes são simplesmente reformulações da Definição 1.

1. T_A é injetora se para cada vetor $\mathbf{b}$ na imagem de T_A existir exatamente um vetor $\mathbf{x}$ em R^n tal que $T_A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. T_A é injetora se a igualdade $T_A(\mathbf{u}) = T_A(\mathbf{v})$ implicar $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.



▶ **Figura 4.10.5**

As rotações de R^2 são injetoras porque vetores distintos que são girados pelo mesmo ângulo têm imagens distintas (Figura 4.10.6). Em contrapartida, a projeção ortogonal de R^3 sobre o plano xy não é injetora porque transforma pontos distintos da mesma reta vertical num mesmo ponto (Figura 4.10.7).

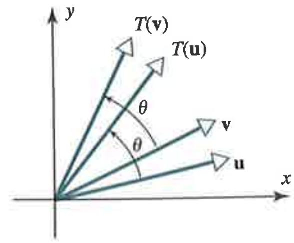
O teorema seguinte estabelece uma relação fundamental entre a invertibilidade de uma matriz e as propriedades da transformação matricial correspondente.

TEOREMA 4.10.1 *Se A for uma matriz $n \times n$ e $T_A : R^n \to R^n$ o operador matricial correspondente, então as afirmações seguintes são equivalentes.*

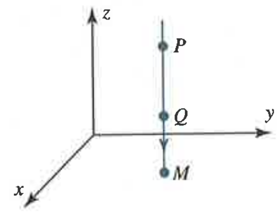
(*a*) *A é invertível.*

(*b*) *A imagem de T_A é R^n.*

(*c*) *T_A é injetor.*



▲ **Figura 4.10.6** Vetores **u** e **v** distintos são girados em vetores $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ distintos.



▲ **Figura 4.10.7** Os pontos distintos *P* e *Q* são aplicados no mesmo ponto *M*.

Prova Vamos estabelecer a sequência de implicações $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

(*a*) ⇒ (*b*) Suponha que *A* seja invertível. Pelas partes (*a*) e (*e*) do Teorema 4.8.10, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com qualquer matriz **b** de tamanho $n \times 1$ em R^n. Isso implica que T_A transforma **x** no vetor arbitrário **b** em R^n, o que por sua vez significa que a imagem de T_A é todo o R^n.

(*b*) ⇒ (*c*) Suponha que a imagem de T_A seja todo o R^n. Isso implica que para cada vetor **b** em R^n existe algum vetor **x** em R^n com o qual $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ e, portanto, que o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com qualquer vetor **b** em R^n. Pela equivalência das partes (*e*) e (*f*) do Teorema 4.8.10, decorre que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução, com qualquer vetor **b** em R^n. Assim, para cada vetor **b** na imagem de T_A, existe exatamente um vetor **x** em R^n tal que $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

(*c*) ⇒ (*a*) Suponha que o operador T_A seja injetor. Assim, dado um vetor **b** qualquer em T_A, existe um único vetor **x** em R^n tal que $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Deixamos para o leitor completar a prova usando o Exercício 30. ◀

▶ EXEMPLO 5 Propriedades de uma rotação

Conforme indicado na Figura 4.10.6, o operador $T : R^n \to R^n$ que efetua a rotação em R^2 pelo ângulo θ é injetor. Confirme que $[T]$ é invertível, de acordo com o Teorema 4.10.1.

Solução Pela Tabela 5 da Seção 4.9, a matriz canônica de *T* é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Essa matriz é invertível, pois

$$\det[T] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \neq 0$$

▶ EXEMPLO 6 Propriedades de uma projeção

Conforme indicado na Figura 4.10.7, o operador $T : R^n \to R^n$ que projeta cada vetor em R^3 ortogonalmente no plano *xy* não é injetor. Confirme que $[T]$ não é invertível, de acordo com o Teorema 4.10.1.

Solução Pela Tabela 4 da Seção 4.9, a matriz canônica de *T* é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz não é invertível, pois $\det[T] = 0$. ◀

Inversa de um operador matricial injetor

Se $T_A : R^n \to R^n$ for um operador matricial injetor, então a matriz A é invertível pelo Teorema 4.10.1. O operador matricial

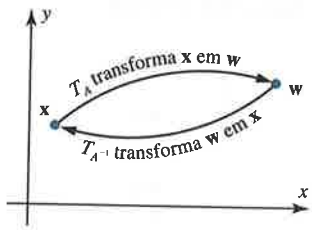
$$T_{A^{-1}} : R^n \to R^n$$

que corresponde a A^{-1} é denominado ***operador inverso*** (ou, simplesmente, ***inverso***) de T_A. Essa terminologia é apropriada, porque T_A e $T_{A^{-1}}$ cancelam um o efeito do outro, no sentido de que se $\mathbf{x}$ for um vetor em R^n, então

$$T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{x})) = AA^{-1}\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$
$$T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

ou, equivalentemente,

$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$$
$$T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I$$



▲ **Figura 4.10.8**

De um ponto de vista mais geométrico, se $\mathbf{w}$ for a imagem de $\mathbf{x}$ por T_A, então $T_{A^{-1}}$ transforma $\mathbf{w}$ de volta em $\mathbf{x}$, pois

$$T_{A^{-1}}(\mathbf{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

(Figura 4.10.8).

Antes de passar aos exemplos, é útil mencionar um assunto de notação. Se $T_A : R^n \to R^n$ for um operador matricial injetor e se $T_{A^{-1}} : R^n \to R^n$ for seu inverso, então as matrizes canônicas desses operadores estão relacionadas pela equação

$$T_{A^{-1}} = T_A^{-1} \tag{6}$$

Nos casos em que for preferível não associar um nome à matriz, escrevemos essa equação como

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} \tag{7}$$

▶ EXEMPLO 7 A matriz canônica de T^{-1}

Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador que efetua a rotação de cada vetor em R^2 pelo ângulo θ, de modo que, pela Tabela 5 da Seção 4.9,

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{8}$$

É geometricamente evidente que, para desfazer o efeito de T, devemos efetuar a rotação de cada vetor em R^2 pelo ângulo $-\theta$. Ocorre que isso é exatamente o que o operador T^{-1} faz, pois a matriz canônica de T^{-1} é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

(verifique), que é a matriz canônica da rotação pelo ângulo $-\theta$.

▶ EXEMPLO 8 Encontrando T^{-1}

Mostre que o operador matricial $T : R^2 \to R^2$ definido pelas equações

$$w_1 = 2x_1 + x_2$$
$$w_2 = 3x_1 + 4x_2$$

é injetor e encontre $T^{-1}(w_1, w_2)$.

Solução A forma matricial dessas equações é

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Essa matriz é invertível (e, portanto, T é injetor), e a matriz canônica de T^{-1} é

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T^{-1}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_1 \\ -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_1 \end{bmatrix}$$

pelo que concluímos que

$$T^{-1}(w_1, w_2) = \left(\tfrac{4}{5}w_1 - \tfrac{1}{5}w_2, -\tfrac{3}{5}w_1 + \tfrac{2}{5}w_2\right) \blacktriangleleft$$

Propriedades de linearidade

Até aqui, enfocamos exclusivamente as transformações matriciais de R^n em R^m. Contudo, esses não são os únicos tipos de transformações de R^n em R^m. Por exemplo, se $f_1, f_2, \ldots, f_m$ forem quaisquer funções reais das n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então as equações

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_1(x_1, x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

definem uma transformação $T : R^n \to R^m$ que aplica o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no vetor $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$. No entanto, só no caso em que essas equações forem lineares é que T será uma transformação matricial. A questão que passamos a considerar é a seguinte.

> **Questão** Existem propriedades algébricas de uma transformação $T : R^n \to R^m$ que possam ser usadas para determinar se T é uma transformação matricial?

A resposta é dada pelo teorema seguinte.

> **TEOREMA 4.10.2** *$T : R^n \to R^m$ é uma transformação matricial se, e só se, as relações seguintes forem válidas com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n e escalar k.*
>
> (i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ **[Aditividade]**
>
> (ii) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ **[Homogeneidade]**

Prova Se T for uma transformação matricial, então as propriedades (i) e (ii) seguem das partes (*c*) e (*b*) do Teorema 4.9.1, respectivamente.

Reciprocamente, suponha que valham as propriedades (i) e (ii). Devemos mostrar que existe alguma matriz A de tamanho $m \times n$ tal que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

com qualquer vetor $\mathbf{x}$ em R^n. Como um primeiro passo, lembramos que a Fórmula (10) da Seção 4.9, juntamente com a aditividade e a homogeneidade, implicam em

$$T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_rT(\mathbf{v}_r) \tag{9}$$

com escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$ e vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em R^n quaisquer. Seja A a matriz

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)] \tag{10}$$

em que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ são os vetores da base canônica de R^n. Segue do Teorema 1.3.1 que $A\mathbf{x}$ é uma combinação linear das colunas de A em que os sucessivos coeficientes são as entradas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathbf{x}$. Dessa forma,

$$A\mathbf{x} = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

Usando (9), podemos reescrever isso como

$$A\mathbf{x} = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = T(\mathbf{x})$$

o que completa a prova. ◄

Dizemos que as propriedades de aditividade e homogeneidade do Teorema 4.10.2 são as ***condições de linearidade***, e que uma transformação que satisfaz essas propriedades é uma ***transformação linear***. Usando essa terminologia, podemos reformular o Teorema 4.10.2 como segue.

TEOREMA 4.10.3 *Toda transformação linear de R^n em R^m é uma transformação matricial e, reciprocamente, toda transformação matricial de R^n em R^m é uma transformação linear.*

Mais sobre o teorema da equivalência

Como nosso resultado final nesta seção, acrescentamos as partes (*b*) e (*c*) do Teorema 4.10.1 ao Teorema 4.8.10.

TEOREMA 4.10.4 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*
(*b*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.*
(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*
(*e*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*
(*f*) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.*
(*g*) $\det(A) \neq 0$.
(*h*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*
(*i*) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*
(*j*) *Os vetores coluna de A geram R^n.*
(*k*) *Os vetores linha de A geram R^n.*
(*l*) *Os vetores coluna de A formam uma base de R^n.*
(*m*) *Os vetores linha de A formam uma base de R^n.*
(*n*) *A tem posto n.*
(*o*) *A tem nulidade 0.*
(*p*) *O complemento ortogonal do espaço nulo de A é R^n.*
(*q*) *O complemento ortogonal do espaço linha de A é $\{\mathbf{0}\}$.*
(*r*) *A imagem de T_A é R^n.*
(*s*) *T_A é um operador injetor.*

Revisão de conceitos

- Composição de transformações matriciais
- Reflexão na origem
- Transformação injetora
- Inversa de operador matricial
- Condições de linearidade
- Transformação linear
- Caracterizações equivalentes de invertibilidade de matrizes

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar a matriz canônica de uma composta de transformações matriciais.
- Determinar se um operador matricial é injetor e, se for, encontrar o operador inverso.
- Determinar se uma transformação é linear.

Conjunto de exercícios 4.10

Nos Exercícios **1–2**, considere os operadores matriciais $T_A \circ T_B$ das matrizes dadas. Encontre a matriz canônica de $T_A \circ T_B$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

3. Sejam $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ e $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$.

(a) Encontre as matrizes canônicas de T_1 e T_2.

(b) Encontre as matrizes canônicas de $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$.

(c) Use as matrizes encontradas na parte (b) para encontrar fórmulas para $T_1(T_2(x_1, x_2))$ e $T_2(T_1(x_1, x_2))$.

4. Sejam $T_1(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, -2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2)$ e $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_3, 4x_1 - x_3)$.

(a) Encontre as matrizes canônicas de T_1 e T_2.

(b) Encontre as matrizes canônicas de $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$.

(c) Use as matrizes encontradas na parte (b) para encontrar fórmulas para $T_1(T_2(x_1, x_2, x_3))$ e $T_2(T_1(x_1, x_2, x_3))$.

5. Encontre a matriz canônica para a composição dada em R^2.

(a) Uma rotação de 90° seguida de uma reflexão na reta $y = x$.

(b) Uma projeção ortogonal sobre o eixo y seguida de uma contração de fator $k = \frac{1}{2}$.

(c) Uma reflexão em torno do eixo x seguida de uma dilatação de fator $k = 3$.

6. Encontre a matriz canônica para a composição dada em R^2.

(a) Uma rotação de 60°, seguida de uma projeção ortogonal sobre o eixo x, seguida de uma reflexão na reta $y = x$.

(b) Uma dilatação de fator $k = 2$, seguida de uma rotação de 45°, seguida de uma reflexão no eixo y.

(c) Uma rotação de 15°, seguida de uma rotação de 105°, seguida de uma rotação de 60°.

7. Encontre a matriz canônica para a composição dada em R^3.

(a) Uma reflexão no plano yz, seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano xz.

(b) Uma rotação de 45° em torno do eixo y, seguida de uma dilatação de fator $k = \sqrt{2}$.

(c) Uma projeção ortogonal sobre o plano xy, seguida de uma reflexão no plano yz.

8. Encontre a matriz canônica para a composição dada em R^3.

(a) Uma rotação de 30° em torno do eixo x, seguida de uma rotação de 30° em torno do eixo z, seguida de uma contração de fator $k = \frac{1}{4}$.

(b) Uma reflexão em torno do plano xy, seguida de uma reflexão em torno do plano xz, seguida de uma projeção ortogonal sobre o plano yz.

(c) Uma rotação de 270° em torno do eixo x, seguida de uma rotação de 90° em torno do eixo y, seguida de uma rotação de 180° em torno do eixo z.

9. Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

(a) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo y.

(b) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ_2.

(c) $T_1 : R^2 \to R^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo x e $T_2 : R^2 \to R^2$ é a rotação por um ângulo θ.

10. Determine se $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

(a) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a dilatação de fator k e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ.

(b) $T_1 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo x por um ângulo θ_1 e $T_2 : R^3 \to R^3$ é a rotação em torno do eixo z por um ângulo θ_2.

11. Em cada parte, determine por inspeção se o operador matricial é injetor.

(a) Uma projeção ortogonal sobre o eixo x em R^2.

(b) Uma reflexão no eixo y em R^2.

(c) Uma reflexão na reta $y = x$ em R^2.

(d) Uma contração de fator $k > 0$ em R^2.

(e) Uma rotação em torno do eixo z em R^3.

(f) Uma reflexão no plano xy em R^3.

(g) Uma dilatação de fator $k > 0$ em R^3.

12. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial definido pelas equações e use o Teorema 4.10.4 para determinar se o operador é injetor.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 8x_1 + 4x_2 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ w_2 &= 5x_1 + x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 \qquad\quad + 4x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ w_3 &= x_1 \qquad\quad + 8x_3 \end{aligned}$

13. Em cada parte, determine se o operador matricial $T: R^2 \to R^2$ definido pelas equações é injetor e, se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre $T^{-1}(w_1, w_2)$.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= 4x_1 - 6x_2 \\ w_2 &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_2 \\ w_2 &= -x_1 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 \\ w_1 &= -5x_1 \end{aligned}$

14. Em cada parte, determine se o operador matricial $T: R^3 \to R^3$ definido pelas equações é injetor e, se for, encontre a matriz canônica do operador inverso e encontre $T^{-1}(w_1, w_2, w_3)$.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= \qquad - 2x_2 + 5x_3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 4x_2 - x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 7x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ w_2 &= -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ w_3 &= 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 \end{aligned}$

15. Em cada parte, determine por inspeção a inversa do operador matricial injetor dado.

(a) A reflexão no eixo x em R^2.

(b) A rotação por um ângulo $\pi/4$ em R^2.

(c) A dilatação de fator 3 em R^2.

(d) A reflexão no plano xy em R^3.

(e) A contração de fator $\frac{1}{5}$ em R^3.

Nos Exercícios 16–17, em cada parte, use o Teorema 4.10.2 para determinar se $T: R^2 \to R^2$ é um operador matricial.

16. (a) $T(x, y) = (2x, y)$ (b) $T(x, y) = (x^2, y)$

(c) $T(x, y) = (-y, x)$ (d) $T(x, y) = (x, 0)$

17. (a) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

(b) $T(x, y) = (x + 1, y)$ (c) $T(x, y) = (y, y)$

(d) $T(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$

Nos Exercícios 18–19, em cada parte, use o Teorema 4.10.2 para determinar se $T: R^3 \to R^2$ é uma transformação matricial.

18. (a) $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$

(b) $T(x, y, z) = (1, 1)$

19. (a) $T(x, y, z) = (0, 0)$

(b) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$

20. Em cada parte, use o Teorema 4.10.3 para encontrar a matriz canônica do operador matricial a partir das imagens dos vetores da base canônica.

(a) As reflexões em R^2 da Tabela 1 da Seção 4.9.

(b) As reflexões em R^3 da Tabela 2 da Seção 4.9.

(c) As projeções em R^2 da Tabela 3 da Seção 4.9.

(d) As projeções em R^3 da Tabela 4 da Seção 4.9.

(e) As rotações em R^2 da Tabela 5 da Seção 4.9.

(f) As dilatações e contrações em R^3 da Tabela 8 da Seção 4.9.

21. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial dado.

(a) $T: R^2 \to R^2$ projeta cada vetor ortogonalmente sobre o eixo x e, em seguida, reflete esse vetor no eixo y.

(b) $T: R^2 \to R^2$ reflete cada vetor na reta $y = x$ e, em seguida, reflete esse vetor no eixo x.

(c) $T: R^2 \to R^2$ dilata cada vetor pelo fator 3, em seguida, reflete esse vetor na reta $y = x$ e, finalmente, projeta esse vetor ortogonalmente sobre o eixo y.

22. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial dado.

(a) $T: R^3 \to R^3$ reflete cada vetor no plano xz e, em seguida, contrai esse vetor pelo fator $\frac{1}{5}$.

(b) $T: R^3 \to R^3$ projeta cada vetor ortogonalmente sobre o plano xz e, em seguida, projeta esse vetor ortogonalmente sobre o plano xy.

(c) $T: R^3 \to R^3$ reflete cada vetor no plano xy, em seguida, reflete esse vetor no plano xz e, finalmente, reflete esse vetores no plano yz.

23. Seja $T_A: R^3 \to R^3$ a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

e sejam $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ os vetores da base canônica de R^3. Em cada parte, encontre o vetor por inspeção.

(a) $T_A(\mathbf{e}_1)$, $T_A(\mathbf{e}_2)$ e $T_A(\mathbf{e}_3)$

(b) $T_A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ (c) $T_A(7\mathbf{e}_3)$

24. Em cada parte, determine se a multiplicação por A é uma transformação matricial injetora.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

25. (a) Será injetora a composta de transformações matriciais injetoras? Justifique sua resposta.

(b) Pode ser injetora a composta de uma transformação matricial injetora com uma transformação matricial que não é injetora? Considere ambas ordens de composição e justifique sua resposta.

26. Mostre que $T(x, y) = (0, 0)$ define um operador matricial em R^2, mas $T(x, y) = (1, 1)$ não.

27. (a) Prove que se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ou seja, T transforma o vetor nulo de R^n no vetor nulo de R^m.

(b) A recíproca de (a) não é verdadeira. Dê um exemplo de uma transformação T tal que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, mas tal que T não é uma transformação matricial.

28. Prove: uma matriz A de tamanho $n \times n$ é invertível se, e só se, o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem exatamente uma solução com qualquer vetor $\mathbf{w}$ em R^n tal que o sistema seja consistente.

29. Sejam A uma matriz $n \times n$ tal que $\det(A) = 0$ e $T: R^n \to R^n$ a multiplicação por A.

(a) O que pode ser dito sobre a imagem do operador matricial T? Dê um exemplo que ilustre sua conclusão.

(b) O que pode ser dito sobre o número de vetores que T aplica em $\mathbf{0}$?

30. Prove: se a transformação matricial $T_A: R^n \to R^n$ for injetora, então A é invertível.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então T é uma transformação matricial.

(b) Se $T: R^n \to R^m$ e $T(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1T(\mathbf{x}) + c_2T(\mathbf{y})$ com quaisquer escalares c_1 e c_2 e quaisquer vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em R^n, então T é uma transformação matricial.

(c) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial injetora, então não existem vetores distintos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ com os quais $T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

(d) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m > n$, então T é injetora.

(e) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m = n$, então T é injetora.

(f) Se $T: R^n \to R^m$ for uma transformação matricial e $m < n$, então T é injetora.

4.11 A geometria de operadores matriciais de R^2

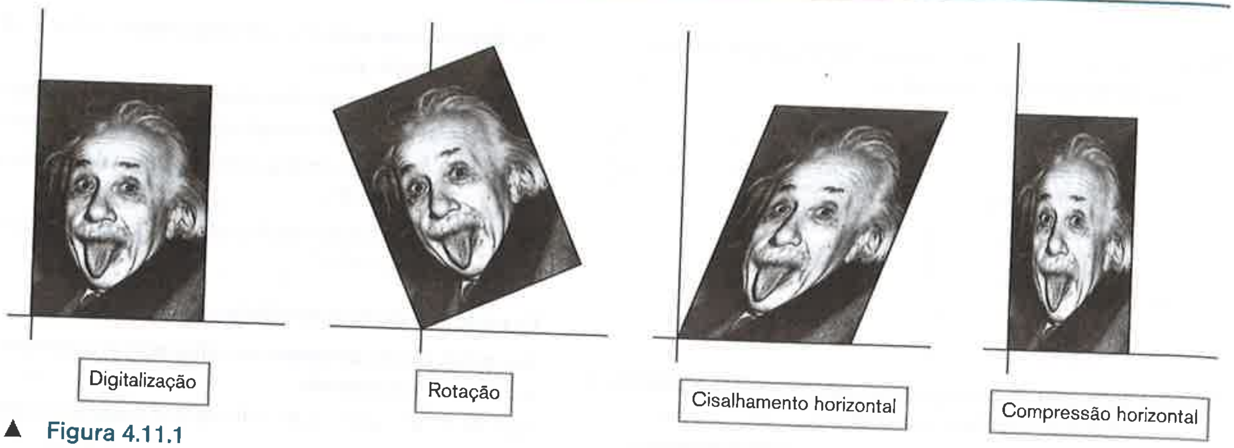
Nesta seção opcional, discutimos mais detalhadamente os operadores matriciais de R^2. As ideias aqui desenvolvidas têm aplicações importantes na Computação Gráfica.

Transformação de regiões

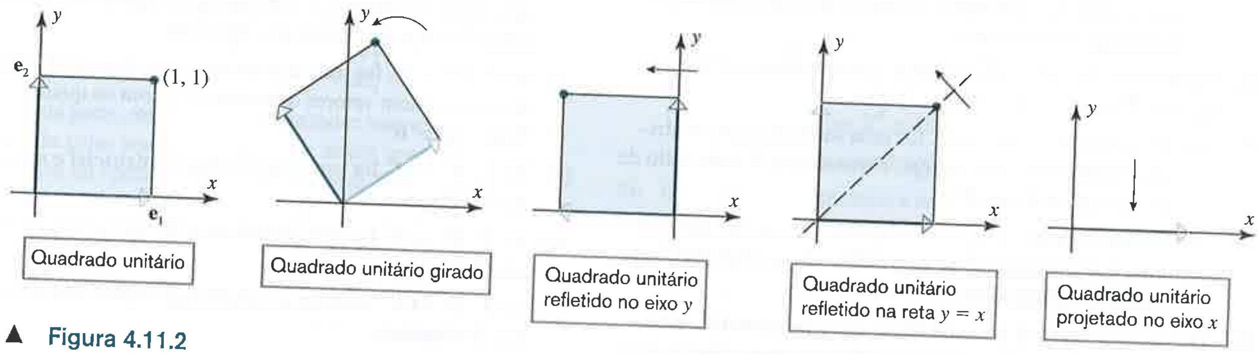
Na Seção 4.9, enfocamos o efeito que um operador matricial tem sobre vetores individuais em R^2 e R^3. No entanto, também é importante entender como esses operadores afetam os formatos de regiões. Por exemplo, a Figura 4.11.1 mostra uma fotografia famosa de Albert Einstein e três modificações dessa fotografia geradas por computador, que são o resultado de operadores matriciais de R^2. A figura original foi escaneada e, em seguida, digitalizada para decompô-la num arranjo retangular de pixels. Esses pixels foram então transformados como segue.

- Foi utilizado o programa MATLAB para associar coordenadas e um nível de cinza a cada pixel.
- As coordenadas dos pixels foram transformadas por multiplicação matricial.
- Os níveis originais de cinza foram então associados aos pixels para produzir a figura transformada.

Muitas vezes, o efeito geral de um operador matricial de R^2 pode ser entendido olhando para as imagens dos vértices (0, 0), (1, 0), (0, 1) e (1, 1) do quadrado unitário (Figura 4.11.2).



▲ **Figura 4.11.1**



▲ **Figura 4.11.2**

A Tabela 1 mostra o efeito que algumas transformações matriciais estudadas na Seção 4.9 têm sobre o quadrado unitário. Para isso ficar mais claro, destacamos uma metade do quadrado original e a parte correspondente na imagem.

▶ EXEMPLO 1 Transformando com matrizes diagonais

Suponha que o plano xy seja inicialmente comprimido ou expandido pelo fator k_1 na direção x, e depois comprimido ou expandido pelo fator k_2 na direção y. Encontre um só operador matricial que efetue ambas operações.

Solução As matrizes canônicas das duas operações são

$$\underset{\textbf{expansão (compressão) em } x}{\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\textbf{expansão (compressão) em } y}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}}$$

Assim, a matriz canônica da composta da operação em x seguida pela operação em y é

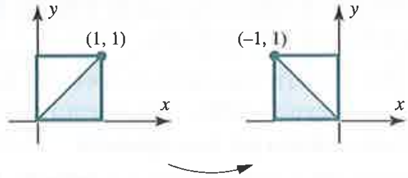
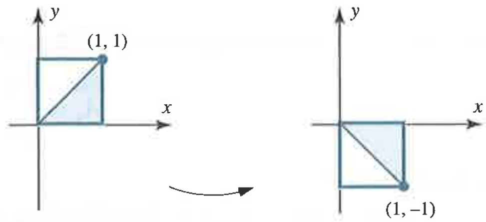
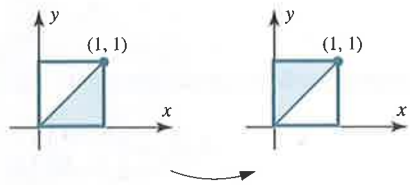
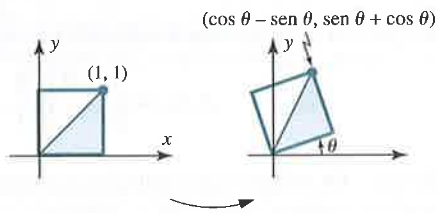
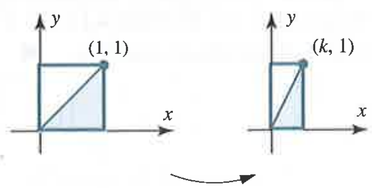
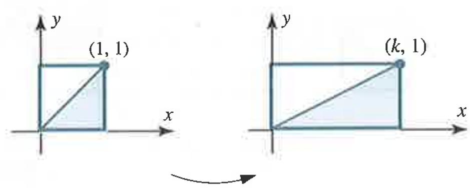
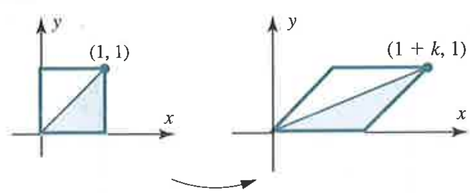
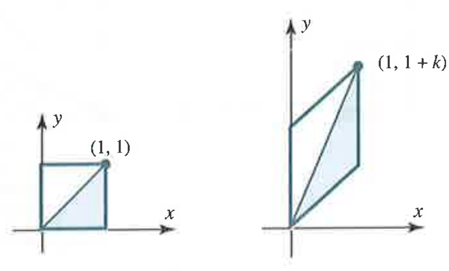
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Isso mostra que a multiplicação por uma matriz diagonal 2×2 com entradas não negativas expande ou comprime o plano na direção x e também na direção y. No caso especial em que k_1 e k_2 são iguais, digamos $k_1 = k_2 = k$, a Fórmula (1) é simplificada para

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

que é uma dilatação ou contração (Tabela 7 da Seção 4.9). ◀

Tabela 1

Operador	Matriz canônica	Efeito no quadrado unitário
Reflexão no eixo y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Reflexão no eixo x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
Reflexão na reta $y = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
Rotação anti-horária pelo ângulo θ	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	
Compressão na direção x pelo fator k ($0 < k < 1$)	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Expansão na direção x pelo fator k ($k > 1$)	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Cisalhamento de fator $k > 0$ na direção x	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Cisalhamento de fator $k > 0$ na direção y	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$	

▶ EXEMPLO 2 Encontrando operadores matriciais

(a) Encontre a matriz canônica do operador matricial de R^2 que é dado pelo cisalhamento de fator 2 na direção x seguido da reflexão na reta $y = x$. Esboce a imagem do quadrado unitário por esse operador.

(b) Encontre a matriz canônica do operador matricial de R^2 que é dado pela reflexão na reta $y = x$ seguida pelo cisalhamento de fator 2 na direção x. Esboce a imagem do quadrado unitário por esse operador.

(c) Confirme que o cisalhamento e a reflexão das partes (a) e (b) não comutam.

Solução (a) A matriz canônica do cisalhamento é

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a da reflexão é

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

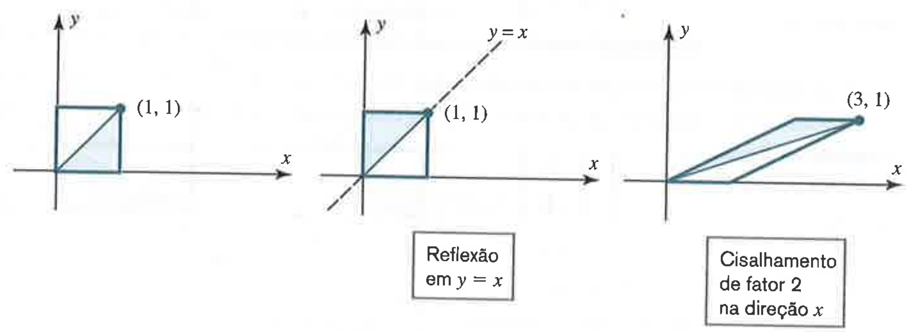
Assim, a matriz canônica do cisalhamento seguido pela rotação é

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

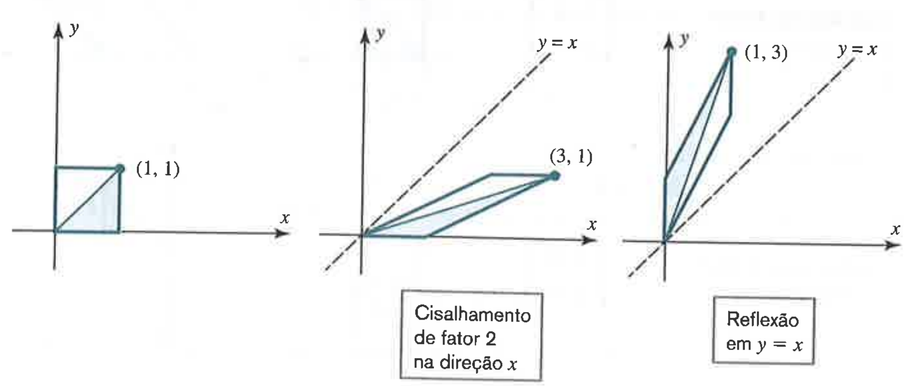
Solução (b) A matriz canônica da reflexão seguida pelo cisalhamento é

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução (c) Os cálculos nas soluções das partes (a) e (b) mostram que $A_1A_2 \neq A_2A_1$, de modo que as matrizes canônicas e, portanto, os operadores matriciais, não comutam. A mesma conclusão segue das Figuras 4.11.3 e 4.11.4, já que os dois operadores produzem imagens diferentes do quadrado unitário. ◀



▶ **Figura 4.11.3**



▶ **Figura 4.11.4**

A geometria de operadores matriciais injetores

Voltamos nossa atenção aos operados matriciais injetores de R^2, que são importantes por aplicarem pontos distintos em pontos distintos. Pelo Teorema 4.10.4 (das afirmações equivalentes), sabemos que uma transformação matricial T_A é injetora se, e só se, A puder ser expressa como um produto de matrizes elementares. Assim, podemos analisar o efeito de qualquer transformação injetora T_A fatorando a matriz A num produto de matrizes elementares, digamos,

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r$$

e expressando T_A como a composta

$$T_A = T_{E_1 E_2 \cdots E_r} = T_{E_1} \circ T_{E_2} \circ \cdots \circ T_{E_r} \tag{2}$$

O teorema seguinte explica o efeito geométrico dos operadores matriciais correspondentes a matrizes elementares.

TEOREMA 4.11.1 *Se E for uma matriz elementar, então $T_E : R^2 \to R^2$ é um dos operadores seguintes.*

(*a*) *Um cisalhamento na direção de um eixo coordenado.*

(*b*) *Uma reflexão na reta $y = x$.*

(*c*) *Uma compressão na direção de um eixo coordenado.*

(*d*) *Uma expansão na direção de um eixo coordenado.*

(*e*) *Uma reflexão num eixo coordenado.*

(*f*) *Uma compressão ou expansão na direção de um eixo coordenado seguida de uma reflexão num eixo coordenado.*

Prova Como uma matriz elementar 2×2 resulta de uma única operação elementar nas linhas da matriz identidade 2×2, uma matriz dessas necessariamente tem um dos formatos seguintes (verifique).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

As primeiras duas matrizes representam cisalhamentos na direção de um eixo coordenado; e a terceira, uma reflexão na reta $y = x$. Se $k > 0$, as duas últimas matrizes representam expansões ou compressões na direção de um eixo coordenado, dependendo se $0 \leq k < 1$ ou $k > 1$. Se $k < 0$ e se expressarmos k na forma $k = -k_1$, com $k_1 > 0$, então as duas últimas matrizes podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Como $k_1 > 0$, o produto em (3) representa uma compressão ou expansão na direção x seguida de uma reflexão no eixo y, e (4) representa uma compressão ou expansão na direção y seguida de uma reflexão no eixo x. No caso em que $k = -1$, as transformações (3) e (4) são simplesmente reflexões nos eixos y e x, respectivamente. ◀

Como toda matriz invertível é o produto de matrizes elementares, o próximo resultado decorre do Teorema 4.11.1 e da Fórmula (2).

TEOREMA 4.11.2 *Se $T_A : R^2 \to R^2$ for a multiplicação pela matriz invertível A, então o efeito geométrico de T_A é igual ao de uma sucessão apropriada de cisalhamentos, compressões, expansões e reflexões.*

▶ EXEMPLO 3 Analisando o efeito geométrico de um operador matricial

Supondo que k_1 e k_2 sejam positivos, expresse a matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

como um produto de matrizes elementares, e descreva o efeito geométrico da multiplicação por A em termos de compressões e expansões.

Solução Pelo Exemplo 1, temos

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o que mostra que a multiplicação por A tem o efeito geométrico de comprimir ou expandir pelo fator k_1 na direção x e depois comprimir ou expandir pelo fator k_2 na direção y.

▶ EXEMPLO 4 Analisando o efeito geométrico de um operador matricial

Expresse

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

como um produto de matrizes elementares e então e descreva o efeito geométrico da multiplicação por A em termos de cisalhamentos, expansões e reflexões.

Solução A pode ser reduzida a I como segue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somamos 23 vezes a primeira linha à segunda

Multiplicamos a segunda linha por $-\frac{1}{2}$

Somamos 22 vezes a segunda linha à primeira

As três operações sucessivas com as linhas podem ser efetuadas multiplicando A pela esquerda sucessivamente por

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertendo essas três matrizes e usando a Fórmula (4) da Seção 1.5, obtemos

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lendo da direita para a esquerda e observando que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

segue que o efeito de multiplicar por A equivale a

1. um cisalhamento de fator 2 na direção x,
2. seguido por uma expansão de fator 2 na direção y,
3. seguida por uma reflexão no eixo x e, então,
4. um cisalhamento de fator 3 na direção y. ◀

Imagens de retas por operadores matriciais

Na Computação Gráfica, muitas imagens são construídas ligando pontos por segmentos de retas. O próximo teorema ajuda a entender como os operadores matriciais transformam tais imagens. A prova de algumas partes do teorema fica como exercícios.

TEOREMA 4.11.3 *Seja $T: R^2 \to R^2$ a multiplicação por uma matriz invertível.*

(*a*) *A imagem de uma reta é uma reta.*

(*b*) *A imagem de uma reta pela origem é uma reta pela origem.*

(*c*) *As imagens de retas paralelas são retas paralelas.*

(*d*) *A imagem do segmento de reta ligando P e Q é o segmento de reta ligando as imagens de P e Q.*

(*e*) *As imagens de três pontos são colineares se, e somente se, os pontos são colineares.*

Observe que, do Teorema 4.11.3, segue que se A for uma matriz 2×2 invertível, então a multiplicação por A transforma triângulos em triângulos e paralelogramos em paralelogramos.

▶ EXEMPLO 5 Imagem de um quadrado

Esboce a imagem do quadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1) pela multiplicação por

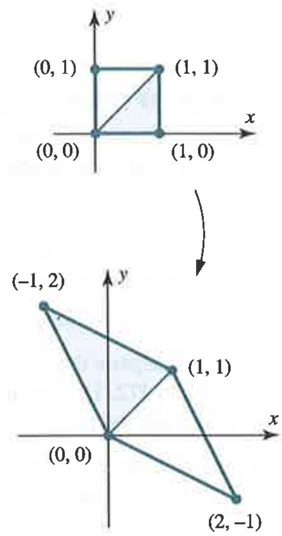
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução Como

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a imagem do quadrado é um paralelogramo de vértices (0, 0), (−1, 2), (2, −1) e (1, 1) (Figura 4.11.5).



▲ **Figura 4.11.5**

▶ EXEMPLO 6 Imagem de uma reta

De acordo com o Teorema 4.11.3, a matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

leva a reta $y = 2x + 1$ em alguma outra reta. Encontre sua equação.

Solução Seja (x, y) um ponto da reta $y = 2x + 1$ e seja (x', y') sua imagem pela multiplicação por A. Então

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x &= x' - y' \\ y &= -2x' + 3y' \end{aligned}$$

Substituindo em $y = 2x + 1$, obtemos

$$-2x' + 3y' = 2(x' - y') + 1 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y' = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{1}{5}$$

Assim, (x', y') satisfaz

$$y = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{1}{5}$$

que é a equação procurada. ◀

Revisão de conceitos

- Efeito de um operador matricial no quadrado unitário
- Geometria de operadores matriciais invertíveis
- Imagens de retas por operadores matriciais

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar as matrizes canônicas de transformações geométricas de R^2.
- Descrever o efeito geométrico de um operador matricial invertível.
- Encontrar a imagem do quadrado unitário por um operador matricial.
- Encontrar a imagem de uma reta por um operador matricial.

Conjunto de exercícios 4.11

1. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador $T: R^2 \to R^2$ que transforma cada ponto (x, y) na sua
  (a) reflexão na reta $y = -x$.
  (b) reflexão na origem.
  (c) projeção ortogonal sobre o eixo x.
  (d) projeção ortogonal sobre o eixo y.

2. Em cada parte do Exercício 1, use a matriz obtida para calcular $T(2, 1)$. Confira suas respostas geometricamente esboçando os pontos $(2, 1)$ e $T(2, 1)$.

3. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador $T: R^3 \to R^3$ que transforma cada ponto (x, y, z) na sua
  (a) reflexão no plano xy.
  (b) reflexão no plano xz.
  (c) reflexão no plano yz.

4. Em cada parte do Exercício 3, use a matriz obtida para calcular $T(1, 1, 1)$. Confira suas respostas geometricamente esboçando os vetores $(1, 1, 1)$ e $T(1, 1, 1)$.

5. Encontre a matriz canônica do operador $T: R^3 \to R^3$ que efetua a
  (a) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo z (olhando ao longo do eixo z positivo para a origem).
  (b) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo x (olhando ao longo do eixo x positivo para a origem).
  (c) rotação de cada vetor por 90° no sentido anti-horário em torno do eixo y (olhando ao longo do eixo y positivo para a origem).

6. Esboce a imagem do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$
  (a) pela reflexão no eixo x.
  (b) pela reflexão no eixo y.
  (c) pela compressão na direção y de fator $\frac{1}{4}$.
  (d) pela expansão na direção x de fator $k = 2$.
  (e) pelo cisalhamento de fator $k = 3$ na direção x.
  (f) pelo cisalhamento de fator $k = 2$ na direção y.

7. Esboce a imagem do quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ pela multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Em cada parte, encontre a matriz que faz a rotação de cada ponto (x, y) em torno da origem por
  (a) 45° (b) 90° (c) 180° (d) 270° (e) −30°

9. Em cada parte, encontre a matriz 2×2 que efetua um cisalhamento
  (a) de fator $k = 4$ na direção y.
  (b) de fator $k = -2$ na direção x.

10. Em cada parte, encontre a matriz 2×2 que comprime ou expande
  (a) por um fator $\frac{1}{3}$ na direção y.
  (b) por um fator 6 na direção x.

11. Em cada parte, descreva o efeito geométrico da multiplicação por A.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Em cada parte, expresse a matriz como um produto de matrizes elementares e descreva o efeito da multiplicação por A em termos de compressões, expansões, reflexões e cisalhamentos.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

13. Em cada parte, encontre uma única matriz 2×2 que efetue a sucessão de operações indicadas.

(a) A compressão de fator $\frac{1}{2}$ na direção x seguida da expansão de fator 5 na direção y.

(b) A expansão de fator 5 na direção y seguida do cisalhamento de fator 2 na direção y.

(c) A reflexão na reta $y = x$ seguida da rotação pelo ângulo de 180° em torno da origem.

14. Em cada parte, encontre uma única matriz 2×2 que efetue a sucessão de operações indicadas.

(a) A reflexão no eixo y, seguida da expansão de fator 5 na direção x, seguida pela reflexão na reta $y = x$.

(b) A rotação pelo ângulo de 30° em torno da origem, seguida pelo cisalhamento de fator -2 na direção y, seguido pela expansão de fator 3 na direção y.

15. Em cada parte, use inversão matricial para mostrar a afirmação.

(a) A transformação inversa da reflexão na reta $y = x$ é a reflexão na reta $y = x$.

(b) A transformação inversa de uma compressão na direção de um eixo é uma expansão na direção daquele eixo.

(c) A transformação inversa da reflexão num eixo coordenado é a reflexão naquele eixo.

(d) A transformação inversa de um cisalhamento na direção de um eixo coordenado é um cisalhamento na direção daquele eixo.

16. Encontre a equação da imagem da reta $y = -4x + 3$ pela multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

17. Em cada parte, encontre a equação da imagem da reta $y = 2x$ pelo operador.

(a) O cisalhamento de fator $k = 3$ na direção x.

(b) A compressão de fator $\frac{1}{2}$ na direção y.

(c) A reflexão no eixo $y = x$.

(d) A reflexão no eixo y.

(e) A rotação de 60° em torno da origem.

18. Encontre a matriz de um cisalhamento na direção x que transforma o triângulo de vértices (0, 0), (2, 1) e (3, 0) num triângulo retângulo com o ângulo reto na origem.

19. (a) Mostre que a multiplicação por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

aplica cada ponto no plano sobre a reta $y = 2x$.

(b) Segue da parte (a) que os pontos não colineares (1, 0), (0, 1) e (−1, 0) são transformados em pontos de uma reta. Isso contradiz a parte (*e*) do Teorema 4.11.3?

20. Prove a parte (*a*) do Teorema 4.11.3. [*Sugestão*: uma reta no plano tem uma equação da forma $Ax + By + C = 0$, com A e B não ambos zero. Use o método do Exemplo 6 para mostrar que a imagem dessa reta pela multiplicação pela matriz invertível

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tem a equação $A'x + B'y + C = 0$, com

$$A' = (dA - cB)/(ad - bc)$$

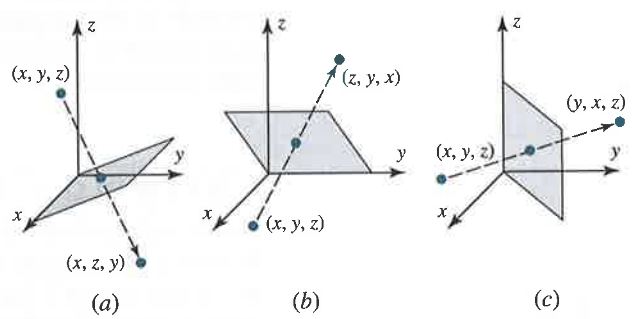
e

$$B' = (-bA + aB)/(ad - bc)$$

Em seguida, mostre que A' e B' não são ambos nulos para concluir que a imagem é uma reta.]

21. Use a sugestão do Exercício 20 para provar as partes (*b*) e (*c*) do Teorema 4.11.3.

22. Em cada parte, encontre a matriz canônica do operador matricial descrito pela figura.

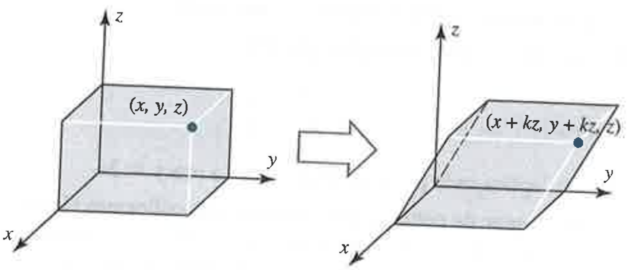


▲ **Figura Ex-22**

23. Em R^3, o ***cisalhamento de fator k na direção xy*** é a transformação matricial que aplica cada ponto (x, y, z) paralelamente ao plano xy no novo ponto $(x + kz, y + kz, z)$. (Ver figura.)

(a) Encontre a matriz canônica do cisalhamento de fator k na direção xy.

(b) Como você definiria o cisalhamento de fator k na direção xz e o cisalhamento de fator k na direção yz? Encontre as matrizes canônicas dessas transformações matriciais.



▲ Figura Ex-23

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) A imagem do quadrado unitário por um operador matricial injetor é um quadrado.

(b) Um operador matricial 2×2 invertível tem o efeito geométrico de uma sucessão de cisalhamentos, compressões, expansões e reflexões.

(c) A imagem de uma reta por um operador matricial injetor é uma reta.

(d) Toda reflexão de R^2 é sua própria inversa.

(e) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ representa uma reflexão numa reta.

(f) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ representa um cisalhamento.

(g) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ representa uma expansão.

4.12 Sistemas dinâmicos e cadeias de Markov

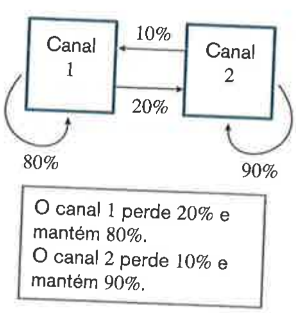
Nesta seção opcional, mostraremos como os métodos matriciais podem ser usados para analisar o comportamento de sistemas físicos que evolvem com o passar do tempo. Os métodos que estudamos aqui têm sido aplicados a problemas de Administração, de Ecologia, de Demografia, de Sociologia e da maioria das ciências físicas.

Sistemas dinâmicos

Um ***sistema dinâmico*** é um conjunto finito de variáveis cujos valores mudam com o passar do tempo. O valor de uma variável num dado instante de tempo é denominado o ***estado da variável*** naquele instante de tempo, e o vetor formado pelos estados é denominado o ***estado do sistema dinâmico*** naquele instante de tempo. Nosso principal objetivo nesta seção é analisar como o estado de um sistema dinâmico evolui com o tempo. Comecemos com um exemplo.

▶ EXEMPLO 1 Índice de audiência como um sistema dinâmico

Suponha que cada um de dois canais de televisão concorrentes, os canais 1 e 2, tenha 50% da audiência num dado instante de tempo inicial. Suponha que ao longo de cada período de um ano, o canal 1 atraia 10% da audiência do canal 2 e o canal 2 capture 20% da audiência do canal 1 (ver Figura 4.12.1). Qual é a audiência de cada canal ao final de um ano?



▲ Figura 4.12.1

Solução Comecemos introduzindo as variáveis

$x_1(t)$ = fração de audiência do canal 1 no instante de tempo t

$x_2(t)$ = fração de audiência do canal 2 no instante de tempo t

que dependem do tempo e o vetor coluna

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \textbf{Fração de audiência do canal 1 no instante de tempo } t \\ \leftarrow \textbf{Fração de audiência do canal 2 no instante de tempo } t \end{matrix}$$

As variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ formam um sistema dinâmico cujo estado no instante de tempo t é o vetor $\mathbf{x}(t)$. Tomando $t = 0$ como o ponto inicial no qual ambos canais têm 50% da audiência, temos que o estado do sistema naquele instante de tempo é

CAPÍTULO 5

Autovalores e Autovetores

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, abordamos as classes de escalares e vetores conhecidas como "autovalores" e "autovetores", que são especiais por suas características peculiares. A ideia subjacente surgiu no estudo do movimento rotacional e, mais tarde, foi usada para classificar vários tipos de superfícies e para descrever soluções de certas equações diferenciais. No início do século XX, foi aplicada a matrizes e transformações matriciais e hoje tem aplicações a áreas tão diversas como computação gráfica, vibrações mecânicas, fluxo do calor, dinâmica populacional, mecânica quântica e até economia.

5.1 Autovalores e autovetores

Nesta seção, definimos os conceitos de "autovalor" e "autovetor" e discutimos algumas de suas propriedades básicas.

Definição de autovalor e autovetor

Começamos com a definição principal desta seção.

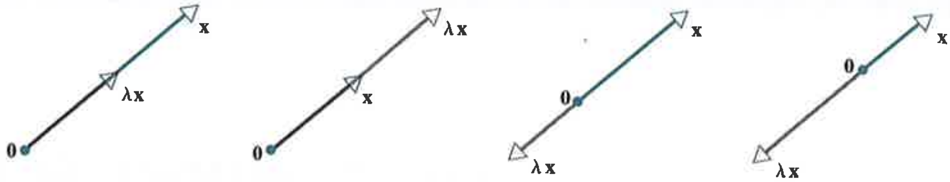
DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo $\mathbf{x}$ em R^n é denominado ***autovetor*** de A (ou do operador matricial T_A) se Ax for um múltiplo escalar de x, isto é,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

com algum escalar λ. O escalar λ é denominado ***autovalor*** de A (ou de T_A), e dizemos que $\mathbf{x}$ é um ***autovetor associado a*** λ.

Impomos a exigência de um autovetor ser não nulo para evitar o caso irrelevante $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$, que vale com quaisquer A e λ.

Em geral, a imagem de um vetor $\mathbf{x}$ pela multiplicação com uma matriz quadrada A defere de $\mathbf{x}$ tanto em magnitude quanto em direção e sentido. No entanto, no caso especial em que $\mathbf{x}$ for um autovetor de A, a multiplicação por A deixa a direção inalterada. Por exemplo, em R^2 ou R^3, a multiplicação por A aplica cada autovetor $\mathbf{x}$ de A (se houver) sobre a mesma reta pela origem determinada por $\mathbf{x}$. Dependendo do sinal e da magnitude do autovalor λ associado a $\mathbf{x}$, a operação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ comprime ou expande $\mathbf{x}$ pelo fator λ, invertendo o sentido no caso em que λ for negativo (Figura 5.5.1).



(a) $0 \leq \lambda \leq 1$ (b) $\lambda \geq 1$ (c) $-1 \leq \lambda \leq 0$ (d) $\lambda \leq -1$

▲ **Figura 5.1.1**

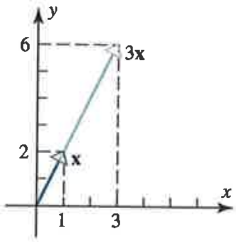
▶ EXEMPLO 1 Autovetor de uma matriz 2 × 2

O vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

associado ao autovalor $\lambda = 3$, pois

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$



▲ **Figura 5.1.2**

Geometricamente, a multiplicação por A expandiu o vetor $\mathbf{x}$ pelo fator 3 (Figura 5.1.2). ◀

Calculando autovalores e autovetores

Nosso próximo objetivo é elaborar um procedimento geral para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz A de tamanho $n \times n$. Começamos com um procedimento para encontrar os autovalores de A. Inicialmente, observe que a equação $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$, ou, equivalentemente, como

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

Para que λ seja um autovalor de A, essa equação deve possuir alguma solução $\mathbf{x}$ não nula. No entanto, segue das partes (*b*) e (*g*) do Teorema 4.10.4 que isso ocorre se, e só se, a matriz de coeficientes $\lambda I - A$ tem determinante nulo. Assim, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 5.1.1 *Se A for uma matriz n × n, então λ é um autovalor de A se, e só se, λ satisfaz a equação*

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{1}$$

Essa equação é a ***equação característica*** *de A.*

▶ EXEMPLO 2 Encontrando autovalores

No Exemplo 1, observamos que $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

mas não explicamos como foi encontrado. Use a equação característica para encontrar todos os autovalores dessa matriz.

Solução Segue da Fórmula (1) que os autovalores de A são as soluções da equação $\det(\lambda I - A) = 0$, que pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

da qual obtemos

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \tag{2}$$

Isso mostra que os autovalores de A são $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Assim, além do autovalor $\lambda = 3$ usado no Exemplo 1, descobrimos o segundo autovalor $\lambda = -1$. ◀

Quando o determinante $\det(\lambda I - A)$ do lado esquerdo de (1) é expandido, resulta um polinômio $p(\lambda)$ de grau n denominado ***polinômio característico*** de A. Por exemplo, segue de (2) que o polinômio característico da matriz A de tamanho 2×2 do Exemplo 2 é

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

que é um polinômio de grau 2. Em geral, o polinômio característico de uma matriz $n \times n$ é da forma

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

em que 1 é o coeficiente de λ^n (Exercício 17). Como um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas, segue que a equação

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \tag{3}$$

tem, no máximo, n soluções distintas e, consequentemente, que uma matriz $n \times n$ tem, no máximo, n autovalores distintos. Como algumas dessas soluções podem ser números complexos, é possível que uma matriz tenha autovalores complexos, mesmo se a própria matriz tiver entradas reais. Discutiremos esse assunto numa seção posterior, pois agora vamos nos concentrar em exemplos nos quais os autovalores são números reais.

▶ EXEMPLO 3 Autovalores de uma matriz 3 × 3

Encontre os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução O polinômio característico de A é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Portanto, os autovalores de A satisfazem a equação cúbica

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \tag{4}$$

Para resolver essa equação, começamos procurando soluções inteiras. Essa tarefa pode ser simplificada se lembrarmos do fato de que todas as soluções inteiras (se houver) de uma equação polinomial

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

de *coeficientes inteiros* são divisores do termo constante c_n. Assim, as únicas possíveis soluções inteiras de (4) são os divisores de -4, ou seja, ± 1, ± 2, ± 4. Substituir sucessivamente cada um desses valores em (4) mostra que $\lambda - 4$ é uma solução inteira. Consequentemente, $\lambda = 4$ deve ser um fator do lado esquerdo de (4). Dividindo $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$ por $\lambda - 4$, temos que (4) pode ser reescrita como

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Assim, as demais soluções de (4) satisfazem a equação quadrática

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

Nas aplicações que envolvem matrizes grandes, muitas vezes não é factível calcular a equação característica diretamente, de modo que devem ser usados outros métodos para encontrar autovalores. Esses métodos serão abordados no Capítulo 9.

que pode ser resolvida pela fórmula quadrática. Assim, os autovalores de A são

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{e} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

▶ EXEMPLO 4 Autovalores de uma matriz triangular superior

Encontre os autovalores da matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Solução Lembrando que o determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas na diagonal principal (Teorema 2.1.2), obtemos

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{12} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) \end{aligned}$$

Assim, a equação característica é

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

e os autovalores são

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda = a_{22}, \quad \lambda = a_{33}, \quad \lambda = a_{44}$$

que são precisamente as entradas na diagonal principal de A. ◀

O teorema geral seguinte deveria ser evidente a partir das contas no exemplo precedente.

TEOREMA 5.1.2 *Se A for uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior, ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A.*

▶ EXEMPLO 5 Autovalores de uma matriz triangular inferior

Por inspeção, os autovalores da matriz triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

são $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{2}{3}$ e $\lambda = -\frac{1}{4}$. ◀

Se tivéssemos o Teorema 5.1.2 à nossa disposição no Exemplo 2, poderíamos ter antecipado o resultado obtido naquele exercício.

TEOREMA 5.1.3 *Se A for uma matriz $n \times n$, são equivalentes as afirmações seguintes.*

(a) λ é um autovalor de A.

(b) O sistema $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de equações tem soluções não triviais.

(c) Existe algum vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

(d) λ é uma solução da equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$.

Encontrando autovetores e bases para autoespaços

Agora que sabemos como encontrar autovalores de uma matriz, passamos ao problema de encontrar os autovetores associados. Como os autovetores associados a um autovalor λ de uma matriz A são os vetores não nulos que satisfazem a equação

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

esses autovetores são os vetores não nulos do espaço nulo da matriz $\lambda I - A$. Dizemos que esse espaço nulo é o ***autoespaço*** de A associado a λ. Enunciado de outra forma, *o autoespaço de A associado ao autovalor λ é o espaço solução do sistema homogêneo* $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Observe que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ está em cada autoespaço, mesmo não sendo um autovetor. Assim, são os vetores *não nulos* de um autoespaço que são os autovetores.

▶ EXEMPLO 6 Bases de autoespaços

Encontre bases dos autoespaços da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução No Exemplo 1, vimos que a equação característica de A é

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

da qual obtemos os autovalores $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Assim, temos dois autoespaços de A, cada um associado a um autovalor.

Por definição,

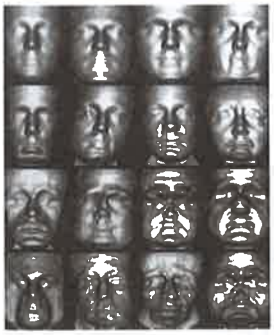
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$ se, e só se, $\mathbf{x}$ é uma solução não trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou seja, de

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $\lambda = 3$, essa equação é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Nota histórica Os métodos da Álgebra Linear estão sendo utilizados no novo campo do reconhecimento facial computadorizado. Os pesquisadores da área estão trabalhando com a ideia que toda face humana num certo grupo racial é uma combinação de umas poucas dúzias de formatos primários. Por exemplo, analisando as imagens tridimensionais escaneadas de muitas faces, pesquisadores da Universidade Rockefeller produziram tanto um formato facial médio do grupo caucásico, denominado ***face média*** (à esquerda na linha superior na figura dada), quanto um conjunto de variações padronizadas daquele formato, denominadas ***autofaces*** (15 das quais estão exibidas na figura dada). Essas formas são assim denominadas por serem autovetores de uma certa matriz que armazena a informação facial digitalizada. Os formatos faciais são representados matematicamente como combinações lineares das autofaces.

[Imagem: Cortesia Dr. Joseph Atick, Dr. Norman Redlich e Dr. Paul Griffith.]

cuja solução geral é

$$x_1 = \tfrac{1}{2}t, \quad x_2 = t$$

(verifique) ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 3$. Deixamos para o leitor seguir o padrão dessas contas para mostrar que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = -1$.

▶ EXEMPLO 7 Autovetores e bases de autoespaços

Encontre bases dos autoespaços de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução A equação característica de A é $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ ou, fatorada, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$ (verifique). Assim, os autovalores distintos de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, e existem dois autoespaços de A.

Por definição,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de A associado a λ se, e só se, $\mathbf{x}$ é uma solução não trivial de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

No caso $\lambda = 2$, a Fórmula (5) se torna

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema por eliminação gaussiana, obtemos (verifique)

$$x_1 = -s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = s$$

Assim, os autovetores de A associados a $\lambda = 2$ são os vetores não nulos da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes, (por quê?), esses vetores formam uma base do autoespaço associado a $\lambda = 2$.

Se $\lambda = 1$, então (5) se torna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos (verifique)

$$x_1 = -2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = s$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores não nulos da forma

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{de modo que} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 1$. ◀

Potências de uma matriz

Uma vez obtidos os autovalores e autovetores de uma matriz A, é uma questão simples obter os autovalores e autovetores de qualquer potência inteira positiva de A; por exemplo, se λ for um autovalor de A e $\mathbf{x}$ um autovetor associado, então

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

o que mostra que λ^2 é um autovalor de A^2 e que $\mathbf{x}$ é um autovetor associado. Em geral, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 5.1.4 *Se k for um inteiro positivo, λ um autovalor de uma matriz A e $\mathbf{x}$ um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado.*

▶ EXEMPLO 8 Potências de uma matriz

No Exemplo 7, mostramos que os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

são $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$, de modo que, pelo Teorema 5.1.4, ambos $\lambda = 2^7 = 128$ e $\lambda = 1^7 = 1$ são autovalores de A^7. Também mostramos que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são autovetores de A associados ao autovetor $\lambda = 2$, de modo que, pelo Teorema 5.1.4, esses vetores também são autovetores de A^7 associados a $\lambda = 2^7 = 128$. Analogamente, o autovetor

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de A associado a $\lambda = 1$ também é um autovetor de A^7 associado a $\lambda = 1^7 = 1$. ◀

Autovalores e invertibilidade

O teorema seguinte estabelece uma relação entre os autovalores e a invertibilidade de uma matriz.

TEOREMA 5.1.5 *Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, $\lambda = 0$ não é um autovalor de A.*

Prova Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ e observe primeiro que $\lambda = 0$ é uma solução da equação característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

se, e só se, o termo constante c_n for zero. Assim, é suficiente provar que A é invertível se, e só se, $c_n \neq 0$. Mas

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

ou, tomando $\lambda = 0$,

$$\det(-A) = c_n \quad \text{ou} \quad (-1)^n \det(A) = c_n$$

Segue da última equação que $\det(A) = 0$ se, e só se, $c_n = 0$ e isso, por sua vez, implica que A é invertível se, e só se, $c_n \neq 0$. ◀

▶ EXEMPLO 9 Autovalores e invertibilidade

A matriz A no Exemplo 7 é invertível, pois tem autovalores $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$, nenhum dos quais é zero. Deixamos para o leitor conferir essa conclusão mostrando que $\det(A) \neq 0$. ◀

Mais sobre o teorema da equivalência

Como nosso resultado final nesta seção, usamos o Teorema 5.1.5 para acrescentar mais uma parte ao Teorema 4.10.4.

TEOREMA 5.1.6 Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(*a*) *A é invertível.*
(*b*) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*
(*c*) *A forma escalonada reduzida por linhas de A é I_n.*
(*d*) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*
(*e*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é consistente com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$.*
(*f*) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tem exatamente uma solução com cada matriz* $\mathbf{b}$ *de tamanho $n \times 1$.*
(*g*) $\det(A) \neq 0$.
(*h*) *Os vetores coluna de A são linearmente independentes.*
(*i*) *Os vetores linha de A são linearmente independentes.*
(*j*) *Os vetores coluna de A geram R^n.*
(*k*) *Os vetores linha de A geram R^n.*
(*l*) *Os vetores coluna de A formam uma base de R^n.*
(*m*) *Os vetores linha de A formam uma base de R^n.*
(*n*) *A tem posto n.*
(*o*) *A tem nulidade* 0.
(*p*) *O complemento ortogonal do espaço nulo de A é R^n.*
(*q*) *O complemento ortogonal do espaço linha de A é* $\{\mathbf{0}\}$.
(*r*) *A imagem de T_A é R^n.*
(*s*) *T_A é um operador injetor.*
(*t*) *$\lambda = 0$ não é um autovalor de A.*

Esse teorema relaciona todos os principais tópicos que estudamos até aqui.

Revisão de conceitos

- Autovetor
- Autovalor
- Equação característica
- Polinômio característico
- Autoespaço
- Teorema das equivalências

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os autovalores de uma matriz.
- Encontrar bases dos autoespaços de uma matriz.

Conjunto de exercícios 5.1

Nos Exercícios **1–2**, confirme por multiplicação que $\mathbf{x}$ é um autovetor de A e encontre o autovalor correspondente.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, encontre a equação característica da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Encontre os autovalores das matrizes no Exercício 3.

5. Encontre bases dos autoespaços das matrizes do Exercício 3.

6. Em cada parte, encontre a equação característica da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7. Encontre os autovalores das matrizes no Exercício 6.

8. Encontre bases dos autoespaços das matrizes do Exercício 6.

9. Em cada parte, encontre a equação característica da matriz.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. Encontre os autovalores das matrizes no Exercício 9.

11. Encontre bases dos autoespaços das matrizes do Exercício 9.

12. Em cada parte, encontre os autovalores por inspeção.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13. Encontre os autovalores de A^9, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

14. Encontre os autovalores e bases dos autoespaços de A^{25}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

15. Seja A uma matriz 2×2. Dizemos que uma reta pela origem de R^2 é ***invariante*** por A se $A\mathbf{x}$ estiver nessa reta sempre que $\mathbf{x}$ estiver. Em cada parte, obtenha as equações de todas as retas de R^2 que são invariantes pela matriz dada.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

16. Encontre $\det(A)$, sabendo que A tem polinômio característico $p(\lambda)$.

(a) $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5$

(b) $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 7$

[*Sugestão*: ver a prova do Teorema 5.1.5.]

17. Seja A uma matriz $n \times n$.

(a) Prove que o polinômio característico de A tem grau n.

(b) Prove que o coeficiente de λ^n no polinômio característico é 1.

18. Mostre que a equação característica de uma matriz A de tamanho 2×2 pode ser expressa como $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, onde $\text{tr}(A)$ é o traço de A.

19. Use o resultado do Exercício 18 para mostrar que se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então as soluções da equação característica de A são

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right]$$

Use esse resultado para mostrar que A tem

(a) dois autovalores reais distintos se $(a-d)^2 + 4bc > 0$.

(b) um autovalor real se $(a-d)^2 + 4bc = 0$.

(c) nenhum autovalor real se $(a-d)^2 + 4bc < 0$.

20. Seja A a matriz do Exercício 19. Mostre que se $b \neq 0$, então

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

são autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left[(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right]$$

e

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{2}\left[(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right]$$

21. Use o resultado do Exercício 18 para provar que se $p(\lambda)$ for o polinômio característico de uma matriz A de tamanho 2×2, então $p(A) = 0$.

22. Prove: se a, b, c e d são números inteiros tais que $a + b = c + d$, então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tem autovalores inteiros, a saber, $\lambda_1 = a + b$ e $\lambda_2 = a - c$.

23. Prove: se λ for um autovalor de uma matriz invertível A com autovetor associado $\mathbf{x}$, então $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1} com autovetor associado $\mathbf{x}$.

24. Prove: se λ for um autovalor de A com autovetor associado $\mathbf{x}$ e se s for um escalar, então $\lambda - s$ é um autovalor de $A - sI$ com autovetor associado $\mathbf{x}$.

25. Prove: se λ for um autovalor de A com autovetor associado $\mathbf{x}$, então λ é um autovalor de sA com autovetor associado $\mathbf{x}$, qualquer que seja o escalar s.

26. Encontre os autovalores e bases dos autoespaços de

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

e use os Exercícios 23 e 24 para encontrar os autovalores e bases dos autoespaços de

(a) A^{-1} (b) $A - 3I$ (c) $A + 2I$

27. (a) Prove que se A for uma matriz quadrada, então A e A^T têm os mesmos autovalores. [*Sugestão*: olhe para a equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$.]

(b) Mostre que A e A^T não precisam ter os mesmos autoespaços. [*Sugestão*: use o resultado do Exercício 20 para encontrar uma matriz 2×2 tal que A e A^T têm autoespaços diferentes.]

28. Suponha que o polinômio característico de alguma matriz A seja $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$. Em cada parte responda a pergunta e explique seu raciocínio.

(a) Qual é o tamanho de A?

(b) A é invertível?

(c) Quantos autoespaços tem A?

29. Às vezes, os autovetores que estudamos nesta seção são denominados ***autovetores à direita***, para distingui-los de ***autovetores à esquerda***, que são matrizes coluna $\mathbf{x}$ de tamanho $n \times 1$ que satisfazem a equação $\mathbf{x}^T A = \mu \mathbf{x}^T$ com algum escalar μ. Qual será a relação, se houver, entre os autovetores à direita e autovalores correspondentes e os autovetores à esquerda e autovalores correspondentes?

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se A for uma matriz quadrada e $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ com algum escalar não nulo λ, então $\mathbf{x}$ é um autovetor de A.

(b) Se λ for um autovalor de uma matriz A, então o sistema linear $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

(c) Se o polinômio característico de uma matriz A for $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, então A é invertível.

(d) Se λ for um autovalor de uma matriz A, então o autoespaço de A associado a λ é o conjunto de autovetores de A associados a λ.

(e) Se 0 for um autovalor de uma matriz A, então A^2 é singular.

(f) Os autovalores de uma matriz A são iguais aos autovalores da forma escalonada reduzida por linhas de A.

(g) Se 0 for um autovalor de uma matriz A, então o conjunto de vetores coluna de A é linearmente independente.

5.2 Diagonalização

Nesta seção, abordamos o problema de encontrar uma base de R^n que consista em autovetores de uma dada matriz A de tamanho $n \times n$. Essas bases podem ser usadas para estudar propriedades geométricas de A e para simplificar muitas contas envolvendo A. Essas bases também têm significado físico numa variedade de aplicações, algumas das quais consideramos mais adiante neste texto.

O problema da diagonalização matricial

Nosso primeiro objetivo nesta seção é mostrar que são equivalentes os dois problemas a seguir que, aparentemente, são bastante diferentes.

Problema 1 Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existe alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Problema 2 Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existem n autovetores de A linearmente independentes?

Semelhança

O produto matricial $P^{-1}AP$ que aparece no Problema 1 é denominado uma ***transformação de semelhança*** da matriz A. Esses produtos são importantes no estudo de autovetores e autovalores, de modo que começamos com alguma terminologia associada.

DEFINIÇÃO 1 Se A e B forem matrizes quadradas, dizemos que B é ***semelhante*** a A se existir alguma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$.

Note que se B for semelhante a A, então também é verdade que A é semelhante a B, já que podemos expressar A como $A = Q^{-1}BQ$ tomando $Q = P^{-1}$. Por isso, em geral dizemos que A e B são ***matrizes semelhantes*** se uma delas for semelhante à outra.

Invariantes de semelhança

As matrizes semelhantes têm muitas propriedades em comum. Por exemplo, se $B = P^{-1}AP$, então decorre que A e B têm o mesmo determinante, já que

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)\\ &= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A)\end{aligned}$$

Em geral, dizemos que uma propriedade de matrizes é ***invariante por semelhança*** ou que a propriedade é um ***invariante de semelhança***, se ela for compartilhada por quaisquer duas matrizes semelhantes. A Tabela 1 lista os invariantes de semelhança mais importantes. As provas de alguns desses resultados são dadas nos exercícios.

Expresso na linguagem de semelhança, o Problema 1 é equivalente a perguntar se a matriz A é semelhante a alguma matriz diagonal. Nesse caso, a matriz diagonal terá todas as propriedades invariantes por semelhança de A, mas por ter uma forma mais simples, é mais simples analisar e trabalhar com a matriz diagonal. Essa importante ideia tem uma terminologia associada.

DEFINIÇÃO 2 Uma matriz quadrada A é dita ***diagonalizável*** se for semelhante a alguma matriz diagonal, ou seja, se existir alguma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Nesse caso, dizemos que a matriz P ***diagonaliza*** A.

Tabela 1 Invariantes de semelhança

Propriedade	Descrição
Determinante	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo determinante.
Invertibilidade	A é invertível se, e só se, $P^{-1}AP$ é invertível.
Posto	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo posto.
Nulidade	A e $P^{-1}AP$ têm a mesma nulidade.
Traço	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo traço.
Polinômio característico	A e $P^{-1}AP$ têm o mesmo polinômio característico.
Autovalores	A e $P^{-1}AP$ têm os mesmos autovalores.
Dimensão de autoespaço	Se λ for um autovalor de A e, portanto, de $P^{-1}AP$, então o autoespaço de A associado a λ e o autoespaço de $P^{-1}AP$ associado a λ têm a mesma dimensão.

O teorema seguinte mostra que os Problemas 1 e 2 colocados no início desta seção são, na verdade, formas diferentes do mesmo problema matemático.

TEOREMA 5.2.1 *Se A for uma matriz $n \times n$, são equivalentes as afirmações seguintes.*

(a) A é diagonalizável.

(b) A tem n autovetores linearmente independentes.

A parte (*b*) do Teorema 5.2.1 é equivalente a dizer que existe alguma base de R^n consistindo em autovetores de A. Por quê?

Prova (a) ⇒ (b) Como estamos supondo que A é diagonalizável, existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$ ou, equivalentemente,

$$AP = PD \tag{1}$$

Denotando os vetores coluna de P por $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ e supondo que as entradas diagonais de D sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ segue, pela Fórmula (6) da Seção 1.3, que o lado esquerdo de (1) pode ser expresso por

$$AP = A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n]$$

e, como observamos logo depois do Exemplo 1 da Seção 1.7, o lado direito de (1) pode ser expresso por

$$PD = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n]$$

Assim, segue de (1) que

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \ldots, \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n \tag{2}$$

Como P é invertível, sabemos do Teorema 5.1.6 que seus vetores coluna $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ são linearmente independentes (e, portanto, não nulos). Assim, segue de (2) que esses n vetores coluna são autovetores de A.

Prova (b) ⇒ (a) Suponha que A tenha n autovetores linearmente independentes $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ com autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Escrevendo

$$P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$$

e denotando por D a matriz diagonal de entradas diagonais sucessivas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, obtemos

$$\begin{aligned} AP &= A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n] = PD \end{aligned}$$

Como os vetores coluna de P são linearmente independentes, segue do Teorema 5.1.6 que P é invertível, de modo que essa última equação pode ser reescrita como $P^{-1}AP = D$, mostrando que A é diagonalizável. ◀

O teorema precedente garante que uma matriz A de tamanho $n \times n$ com n autovetores linearmente independentes é diagonalizável, e a prova sugere o método seguinte para diagonalizar A.

Um procedimento para diagonalizar uma matriz

Procedimento para diagonalizar uma matriz

Passo 1. Confirme que a matriz é realmente diagonalizável encontrando n autovetores linearmente independentes. Uma maneira de fazer isso é encontrar uma base de cada autoespaço e juntar todos esses vetores num único conjunto S. Se esse conjunto tiver menos do que n elementos, a matriz não é diagonalizável.

Passo 2. Forme a matriz $P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$ que tem os vetores de S como vetores coluna.

Passo 3. A matriz $P^{-1}AP$ será diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ correspondentes aos autovetores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ como entradas diagonais sucessivas.

▶ EXEMPLO 1 Encontrando uma matriz *P* que diagonaliza uma matriz *A*

Encontre uma matriz P que diagonalize

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução No Exemplo 7 da seção precedente, verificamos que a equação característica de A é

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

e encontramos as seguintes bases dos autoespaços,

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Há um total de três vetores de base, portanto, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza A. Para conferir, deixamos para o leitor verificar que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ◀

Em geral, não existe uma ordem preferencial para as colunas de P. Como a i-ésima entrada diagonal de $P^{-1}AP$ é um autovalor do i-ésimo vetor coluna de P, mudar a ordem das colunas de P só muda a ordem dos autovalores na diagonal de $P^{-1}AP$. Assim, se tivéssemos escrito

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

no exemplo precedente, teríamos obtido

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

▶ EXEMPLO 2 Uma matriz que não é diagonalizável

Encontre uma matriz P que diagonalize

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução O polinômio característico de A é

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 3 & -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

de modo que a equação característica é

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Assim, os autovalores distintos de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Deixamos para o leitor mostrar que são bases dos autoespaços os vetores

$$\lambda = 1: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 2: \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como A é 3×3 e só há um total de dois vetores de base, A não é diagonalizável.

Solução alternativa Se só estivermos interessados em determinar se uma dada matriz é ou não diagonalizável, sem precisar encontrar uma matriz P que diagonalize A, então não é necessário calcular bases para os autoespaços, bastando encontrar as dimensões dos autoespaços. Nesse exemplo, o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é o espaço solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz de coeficientes tem posto 2 (verifique), o Teorema 4.8.2 traz que a nulidade dessa matriz é 1 e, portanto, o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é unidimensional.

O autoespaço associado a $\lambda = 2$ é o espaço solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz de coeficientes também tem posto 2 e nulidade 1 (verifique), de modo que o autoespaço associado a $\lambda = 2$ também é unidimensional. Como os autoespaços produzem um total de dois vetores de base, sendo necessários três, a matriz A não é diagonalizável. ◀

No Exemplo 1, usamos, sem justificar, que são linearmente independentes os vetores coluna de P, que consistem em vetores de bases dos vários autoespaços de A. O próximo teorema, demonstrado ao final desta seção, mostra que isso realmente é justificável.

TEOREMA 5.2.2 *Se* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *forem autovetores de uma matriz A associados a autovalores distintos, então* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *é um conjunto linearmente independente.*

Observação O Teorema 5.2.2 é um caso especial de um resultado mais geral, como segue. Suponha que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sejam autovalores distintos e que escolhamos um conjunto linearmente independente em cada autoespaço correspondente. Se juntarmos todos esses vetores num único conjunto, o resultado será um conjunto que ainda é linearmente independente. Por exemplo, escolhendo três vetores linearmente independentes de um autoespaço e dois vetores linearmente independentes de um outro autoespaço, então os cinco vetores juntos formam um conjunto linearmente independente. Omitimos a prova.

Como uma consequência do Teorema 5.2.2, obtemos o resultado importante a seguir.

TEOREMA 5.2.3 *Se uma matriz A de tamanho* $n \times n$ *tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.*

Prova Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ então, pelo Teorema 5.2.2, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes. Assim, A é diagonalizável pelo Teorema 5.2.1. ◀

▶ EXEMPLO 3 Usando o Teorema 5.2.3

Vimos, no Exemplo 3 da seção anterior, que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

tem três autovalores distintos, $\lambda = 4$, $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ e $\lambda = 2 - \sqrt{3}$. Portanto, A é diagonalizável e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

com alguma matriz invertível P. Se quisermos, poderemos obter a matriz P pelo método mostrado no Exemplo 1 desta seção.

▶ EXEMPLO 4 Diagonalizabilidade de matrizes triangulares

Pelo Teorema 5.1.2, os autovalores de uma matriz triangular são as entradas na diagonal principal. Assim, uma matriz triangular com entradas distintas na diagonal principal é diagonalizável. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizável de autovalores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = -2$. ◀

Calculando as potências de uma matriz

Em muitas aplicações, é necessário calcular potências elevadas de uma matriz quadrada. Veremos a seguir que se a matriz for diagonalizável, podemos simplificar as contas diagonalizando essa matriz.

Para começar, digamos que A seja uma matriz diagonalizável de tamanho $n \times n$, que P diagonaliza A e que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

Elevando ambos os lados dessa equação ao quadrado, obtemos

$$(P^{-1}AP)^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} = D^2$$

Podemos reescrever o lado esquerdo dessa equação como

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

de onde encontramos a relação $P^{-1}A^2P = D^2$. Mais geralmente, se k for um inteiro positivo, então uma conta análoga mostra que

$$P^{-1}A^kP = D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

que pode ser reescrita como

$$A^k = PD^kP^{-1} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}P^{-1} \tag{3}$$

> A Fórmula (3) revela que elevar uma matriz diagonalizável A a uma potência inteira positiva tem o efeito de elevar seus autovalores a essa potência.

Observe que o cálculo do lado direito dessa fórmula envolve somente três multiplicações matriciais e as potências das entradas diagonais de D. Para matrizes grandes e potências elevadas de λ, isso envolve substancialmente menos operações que calcular A^k diretamente.

▶ EXEMPLO 5 Potência de uma matriz

Use (3) para calcular A^{13}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução Mostramos no Exemplo 1 que a matriz A é diagonalizada por

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e que

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, segue de (3) que

$$A^{13} = PD^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{bmatrix} -8.190 & 0 & -16.382 \\ 8.191 & 8.192 & 8.191 \\ 8.191 & 0 & 16.383 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Observação A maior parte do trabalho no método do exemplo precedente é diagonalizar A. Uma vez concluído esse trabalho, podemos utilizá-lo para calcular qualquer potência de A. Assim, para calcular λ, só precisamos trocar os expoentes de 13 para 1.000 em (4).

Autovalores de potências de uma matriz

Uma vez encontrados os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada A qualquer, é uma tarefa simples encontrar os autovalores e autovetores de qualquer potência inteira positiva de A. Por exemplo, se λ for um autovalor de A e $\mathbf{x}$ um autovetor associado, então

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$$

o que mostra que não só λ^2 é um autovalor de A^2, mas que $\mathbf{x}$ é um autovetor associado. Em geral, temos o resultado seguinte.

TEOREMA 5.2.4 *Se λ for um autovalor de uma matriz quadrada A com autovetor associado $\mathbf{x}$ e se k for algum inteiro positivo qualquer, então λ^k é um autovalor de A^k e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado.*

Note que a diagonalizabilidade não é exigida no Teorema 5.2.4.

Alguns problemas em que se utiliza esse teorema estão dados nos exercícios.

Multiplicidades geométrica e algébrica

O Teorema 5.2.3 não resolve totalmente o problema da diagonalização, pois somente garante que uma matriz quadrada com n autovalores distintos é diagonalizável, mas não impede a possibilidade de existirem matrizes diagonalizáveis com menos que n autovalores distintos. O exemplo seguinte mostra que isso realmente pode ocorrer.

▶ EXEMPLO 6 A recíproca do Teorema 5.2.3 é falsa

Considere as matrizes

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue do Teorema 5.1.2 que ambas as matrizes têm somente um autovalor distinto, a saber, $\lambda = 1$ e, portanto, somente um autoespaço. Deixamos para o leitor resolver as equações características

$$(\lambda I - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\lambda I - J)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

com $\lambda = 1$ e mostrar que, para I o autoespaço é tridimensional (todo o R^3) e que, para J é unidimensional, consistindo em todos os múltiplos escalares de

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso mostra que a recíproca do Teorema 5.2.3 é falsa, pois produzimos duas matrizes 3×3 com menos do que 3 autovalores distintos, uma sendo diagonalizável e a outra não. ◀

Uma excursão completa no estudo da diagonalização é deixada para textos mais avançados, mas queremos tocar num teorema que é importante para um melhor entendimento da diagonalizabilidade. Pode ser provado que se λ_0 for um autovalor de A, então a dimensão do autoespaço associado a λ_0 não pode exceder o número de vezes que $\lambda - \lambda_0$ aparece como um fator do polinômio característico de A. Por exemplo, nos Exemplos 1 e 2, o polinômio característico é

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Assim, o autoespaço associado a $\lambda = 1$ é, no máximo, unidimensional (e, portanto, exatamente unidimensional) e o autoespaço associado a $\lambda = 2$ é, no máximo, bidimensional. No Exemplo 1, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ de fato tem dimensão 2, resultando em diagonalizabilidade, mas no Exemplo 2, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ tem dimensão somente 1, resultando na não diagonalizabilidade.

Existe alguma terminologia relacionada com esse assunto. Se λ_0 for um autovalor de uma matriz A de tamanho $n \times n$, então a dimensão do autoespaço associado a λ_0 é denominada ***multiplicidade geométrica*** de λ_0, e o número de vezes que $\lambda - \lambda_0$ aparece como um fator do polinômio característico de A é denominado ***multiplicidade algébrica*** de λ_0. O teorema a seguir, que apresentamos sem prova, resume a discussão precedente.

TEOREMA 5.2.5 Multiplicidades geométrica e algébrica

Se A for uma matriz quadrada, valem as afirmações seguintes.

(*a*) *Dado qualquer autovalor de A, a multiplicidade geométrica é menor do que ou igual à multiplicidade algébrica.*

(*b*) *A é diagonalizável se, e só se, a multiplicidade geométrica de cada autovalor é igual à multiplicidade algébrica.*

OPCIONAL

Completamos esta seção com uma prova opcional do Teorema 5.2.2.

Prova do Teorema 5.2.2 Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ autovetores de A associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Vamos supor que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ sejam linearmente dependentes e obter uma contradição. Assim, poderemos concluir que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes.

Como um autovetor é não nulo por definição, $\{\mathbf{v}_1\}$ é linearmente independente. Seja r o maior inteiro tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é linearmente independente. Como estamos supondo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente dependente, r satisfaz $1 \leq r < k$. Além disso, pela definição de r, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{r+1}\}$ é linearmente dependente. Assim, existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$, não todos nulos, tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \tag{5}$$

Multiplicando ambos os lados de (5) por A e usando o fato de que

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, \quad A\mathbf{v}_{r+1} = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}$$

obtemos

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Multiplicando, agora, ambos os lados de (5) por λ_{r+1} e subtraindo a equação resultante de (6), obtemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto linearmente independente, essa equação implica

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \cdots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

e, como os $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1}$ são distintos, segue que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0 \tag{7}$$

Substituindo esses valores em (5) obtemos

$$c_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$$

Como o autovetor $\mathbf{v}_{r+1}$ é não nulo, segue que

$$c_{r+1} = 0 \tag{8}$$

Mas as Equações (7) e (8) contradizem o que supomos a respeito dessas constantes, a saber, que $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ não são todos nulos, e completamos a prova. ◀

Revisão de conceitos

- Transformação de semelhança
- Invariante de semelhança
- Matrizes semelhantes
- Matriz diagonalizável
- Multiplicidade geométrica
- Multiplicidade algébrica

Aptidões desenvolvidas

- Determinar se uma matriz quadrada é diagonalizável.
- Diagonalizar uma matriz quadrada.
- Encontrar potências de uma matriz usando semelhança.
- Encontrar as multiplicidades geométrica e algébrica de um autovalor.

Conjunto de exercícios 5.2

Nos Exercícios 1–4, mostre que A e B não são matrizes semelhantes.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Seja A uma matriz 6×6 com equação característica $\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3 = 0$. Quais são as possíveis dimensões dos autoespaços de A?

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre os autovalores de A.

(b) Para cada autovalor λ, encontre o posto da matriz $\lambda I - A$.

(c) Será A diagonalizável? Justifique sua conclusão.

Nos Exercícios 7–11, use o método do Exercício 6 para determinar se a matriz é diagonalizável.

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 12–15, encontre uma matriz P que diagonalize A e calcule $P^{-1}AP$.

12. $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ **13.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios **16–21**, encontre as multiplicidades geométrica e algébrica de cada autovalor de A e determine se A é diagonalizável. Se for, encontre uma matriz P que diagonalize A e calcule $P^{-1}AP$.

16. $A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$ **17.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **19.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

22. Use o método do Exemplo 5 para calcular A^{10}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

23. Use o método do Exemplo 5 para calcular A^{11}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

24. Em cada parte, calcule a potência indicada de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) $A^{1.000}$ (b) $A^{-1.000}$ (c) $A^{2.301}$ (d) $A^{-2.301}$

25. Encontre A^n se n for um inteiro positivo e

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

26. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Mostre que

(a) A é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc > 0$.

(b) A não é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

[*Sugestão*: ver o Exercício 19 da Seção 5.1.]

27. No caso em que a matriz A do Exercício 26 for diagonalizável, encontre uma matriz P que diagonalize A. [*Sugestão*: ver o Exercício 20 da Seção 5.1.]

28. Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo posto.

29. Prove que matrizes semelhantes têm a mesma nulidade.

30. Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo traço.

31. Prove que se A for uma matriz diagonalizável, então A^k é diagonalizável, qualquer que seja o inteiro positivo k.

32. Prove que se A for uma matriz diagonalizável, então o posto de A é o número de autovalores não nulos de A.

33. Suponha que o polinômio característico de alguma matriz A seja $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$. Em cada parte, responda a pergunta e explique seu raciocínio.

(a) O que pode ser dito sobre as dimensões dos autoespaços de A?

(b) O que pode ser dito sobre as dimensões dos autoespaços sabendo que A é diagonalizável?

(c) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for um conjunto linearmente independente de vetores de A, cada um dos quais está associado ao mesmo autovalor de A, o que pode ser dito sobre esse autovalor?

34. Este problema conduz a uma prova do fato de que a multiplicidade algébrica de um autovalor de uma matriz A de tamanho $n \times n$ é maior do que ou igual à multiplicidade geométrica. Para isso, suponha que λ_0 seja um autovalor de multiplicidade geométrica k.

(a) Prove que existe alguma base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de R^n na qual os primeiros k vetores formam uma base do autoespaço associado a λ_0.

(b) Seja P a matriz cujos vetores coluna são os vetores de B. Prove que o produto AP pode ser dado por

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_0 I_k & X \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

[*Sugestão*: compare os k primeiros vetores coluna de ambos os lados.]

(c) Use o resultado da parte (b) para provar que A é semelhante a

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_k & X \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

e que, portanto, A e C têm o mesmo polinômio característico.

(d) Considerando $\det(\lambda I - C)$, prove que o polinômio característico de C (e, portanto, de A) contém o fator $(\lambda - \lambda_0)$ pelo menos k vezes, provando, assim, que a multiplicidade algébrica de λ_0 é maior do que ou igual à multiplicidade geométrica k.

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)-(h), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Toda matriz quadrada é semelhante a si mesma.

(b) Se A, B e C forem matrizes tais que A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

(c) Se A e B forem matrizes invertíveis semelhantes, então A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.

(d) Se A for diagonalizável, então existe uma única matriz P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

(e) Se A for diagonalizável e invertível, então A^{-1} será diagonalizável.

(f) Se A for diagonalizável, então A^T é diagonalizável.

(g) Se existir alguma base de R^n consistindo em autovetores de uma matriz A de tamanho $n \times n$, então A é diagonalizável.

(h) Se todo autovalor de uma matriz A tiver multiplicidade algébrica 1, então A é diagonalizável.

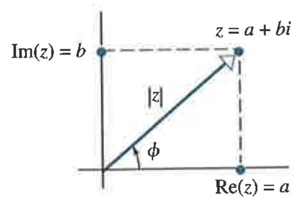
5.3 Espaços vetoriais complexos

As noções de autovalor e autovetor complexos surgem naturalmente, mesmo no contexto de matrizes de entradas reais, porque a equação característica de qualquer matriz quadrada pode ter soluções complexas. Nesta seção, discutimos essa ideia e aplicamos nossos resultados ao estudo mais aprofundado de matrizes simétricas. No final deste texto, apresentamos uma revisão das propriedades essenciais dos números complexos.

Revisão de números complexos

Lembre que se $z = a + bi$ for um número complexo, então

- $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = b$ são denominados ***parte real*** de z e ***parte imaginária*** de z, respectivamente,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é denominado ***módulo***, ou ***valor absoluto***, de z,
- $\bar{z} = a - bi$ é denominado ***conjugado complexo*** de z,
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$,
- dizemos que o ângulo ϕ na Figura 5.3.1 é um ***argumento*** de z,
- $\text{Re}(z) = |z| \cos \phi$
- $\text{Im}(z) = |z| \text{ sen } \phi$
- $z = |z|(\cos \phi + i \text{ sen } \phi)$ é denominada ***forma polar*** de z.



▲ **Figura 5.3.1**

Autovalores complexos

Observamos, na Fórmula (3) da Seção 5.1, que a equação característica de uma matriz A de tamanho $n \times n$ arbitrária tem a forma

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \tag{1}$$

em que o coeficiente da maior potência de λ é 1. Até aqui, limitamos nossa discussão a matrizes tais que as soluções de (1) eram números reais. Contudo, é possível que a equação característica de uma matriz A de entradas reais tenha soluções imaginárias. Por exemplo, o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

é

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

que tem as soluções imaginárias $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. Para tratar desse caso, precisamos explorar as noções de espaço vetorial complexo e algumas ideias relacionadas.