

# EQUAÇÕES RELACIONAIS FUZZY E COMO RESOLVÊ-LAS

PEDRO ALADAR TONELLI

## 1. INTRODUÇÃO

Nosso objetivo é apresentar de uma forma simples o procedimento para achar soluções de uma equação relacional fuzzy para alguns casos particulares.

Uma relação binária fuzzy entre dois conjuntos  $U$  e  $V$  é simplesmente uma aplicação

$$R : U \times V \rightarrow [0, 1]$$

o número  $R(x, y)$  é interpretado como o grau de relacionamento entre os elementos  $x \in U$  e  $y \in V$ . Usamos também a notação:

$$R : U \rightsquigarrow V$$

para expressarmos esta relação.

Se  $A : U \rightarrow [0, 1]$  é um conjunto fuzzy em  $U$  a imagem de  $A$  pela relação fuzzy  $R$  é o subconjunto fuzzy de  $V$  dado por

$$R(A)(y) = \bigvee_x R(x, y) \wedge A(x)$$

Se  $R : U \rightsquigarrow V$  e  $S : V \rightsquigarrow W$  são duas relações fuzzy, podemos então compô-las como a extensão de composição clássica. A composição será uma relação  $T : U \rightsquigarrow W$  definida como:

$$T(x, w) = \bigvee_{y \in V} R(x, y) \wedge S(y, w)$$

Uma notação natural para esta composição é  $T = S \circ R$ .

De fato, esta não é a única forma de se definir razoavelmente uma composição. Se  $*$  denotar uma t-norma contínua em  $[0, 1]$  então podemos definir uma composição usando esta t-norma no lugar do  $\wedge$ :

$$T_*(x, w) = \bigvee_{y \in V} R(x, y) * S(y, w) = S \circ_* R$$

No caso dos espaços envolvidos serem finitos, digamos que

$$U = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$V = \{y_1, \dots, y_m\}$$

$$W = \{z_1, \dots, z_p\}$$

as relações fuzzy podem ser representadas por matrizes  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$  cujas entradas são, respectivamente:

$$(1) \quad r_{ij} = R(x_i, y_j)$$

$$(2) \quad s_{jl} = S(y_j, z_l)$$

$$(3) \quad t_{il} = T_*(x_i, z_l)$$

Olhando a definição da composição de relações fuzzy obtemos:

$$(4) \quad t_{il} = \bigvee_k r_{ik} * s_{kl}$$

ou seja  $t_{il}$  é obtida da  $i$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{R}$  comparada com a  $l$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{S}$  usando a t-norma  $*$ . Isto define então um produto de matrizes usando a t-norma, e vamos escrever usando a equação 4

$$(5) \quad \mathbf{T} = \mathbf{R} * \mathbf{S}$$

O problema de resolução de uma equação relacional fuzzy é o seguinte: Conhecidas as matrizes  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{R}$ , determinar a matriz  $\mathbf{S}$  (ou equivalentemente a relação  $S$ ) que satisfaz a equação (5)

## 2. CASO SIMPLES COM UMA EQUAÇÃO E UMA INCÓGNITA

Vamos começar com o caso mais simples, mas antes faremos uma observação sobre a equação geral 5. Note que para cada coluna  $l$  de  $\mathbf{T}$  fixada teremos que resolver o conjunto de  $n$  equações com  $m$  incógnitas:

$$(6) \quad t_{il} = \bigvee_k r_{ik} * s_{kl}$$

Assim do ponto de vista geral, ou para ver o método de resolução basta analisar o caso em que  $p = 1$ , ou seja só precisamos nos preocupar com as soluções de:

$$(7) \quad b_i = \bigvee_k r_{ik} * x_k$$

onde a incógnita é o vetor  $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_m$

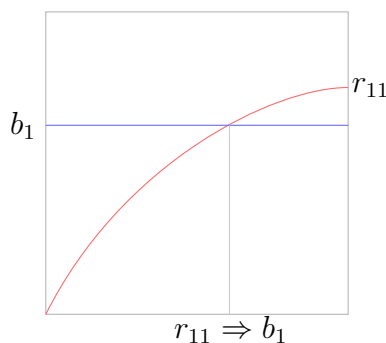
No caso mais simples vamos supor que nossa única equação é

$$(8) \quad b_1 = r_{11} * x_1$$

Para este caso note como a t-norma  $*$  é contínua então a função  $F_{r_{11}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$F_{r_{11}}(z) = r_{11} * z$$

é contínua. Por causa da propriedade de t-norma temos que  $r_{11} * x_1 \leq r_{11}$  assim a equação só tem solução quando  $b_1 \leq r_{11}$ . Da continuidade de  $F_{r_{11}}$  o número que satisfaz esta equação é  $x_1 = \sup\{z := r_{11} * z \leq b_1\}$  este número é também conhecido como  $r_{11} \Rightarrow b_1$ . Aqui  $\Rightarrow$  denota a implicação residual com relação à t-norma  $*$ .



Note que podem existir outras soluções  $x_1$  menores que aquele dada pelo resíduo mas não pode existir nenhuma maior já que se  $z > r_{11} \Rightarrow b_1$  então  $z * r_{11} > b_1$ .

Uma outra coisa: suponha que  $x_0$  e  $x_1 > x_0$  são soluções então se  $x_2$  é tal que  $x_0 < x_2 < x_1$  então  $x_2$  também é solução pois pelas propriedades de t-norma temos  $r_{11} * x_0 \leq r_{11} * x_2 \leq r_{11} * x_1$

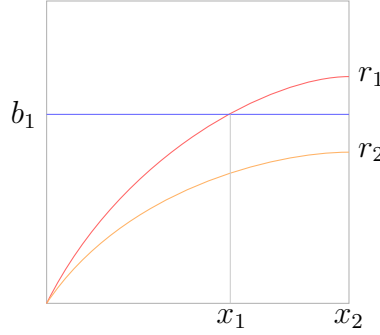
### 3. O PRÓXIMO PASSO: DUAS INCÓNITAS E UMA EQUAÇÃO.

Agora podemos considerar as soluções de

$$(9) \quad b_1 = (r_1 * x_1) \bigvee (r_2 * x_2)$$

Em primeiro lugar observamos que no caso de  $b_1 > \sup\{r_1, r_2\}$  não podemos ter solução pois (como já observamos)  $r_i * x_i \leq r_i$  e portanto  $(r_1 * x_1) \bigvee (r_2 * x_2) \leq r_1 \vee r_2 < b_1$ .

Quando, digamos,  $r_2 < b_1 < r_1$  temos o caso ilustrado na figura abaixo.



Neste caso  $x_1 = r_1 \Rightarrow b_1$  e  $x_2 = r_2 \Rightarrow b_2$  é uma solução. De fato, é fácil ver neste caso que podemos tomar  $x_2$  um número qualquer entre 0 e 1 que sempre o par  $(x_1, x_2)$  será solução. Só não podemos mexer em  $x_1$ .

No terceiro caso teremos  $b_1 < r_2 < r_1$ . Novamente a solução maximal é  $x_1 = r_1 \Rightarrow b_1$  e  $x_2 = r_2 \Rightarrow b_2$ . Nenhum destes número pode ser aumentado, pois o resultado ficaria maior que  $b_1$ , por isso a chamamos de solução maximal. Mas podemos baixar estes valores, um de cada vez, que ainda assim teriamos solução da nossa equação. Por exemplo,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = r_2 \Rightarrow b_2$  é uma outra solução do sistema. Assim a equação 9 pode ter muitas soluções. Se consideramos o conjunto:

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] \text{ soluções de 9}\}$$

**Proposição 1.** Se  $(u_1, u_2) \in \mathcal{S}$  e  $(v_1, v_2) \in \mathcal{S}$  então  $(u_1 \vee v_1, u_2 \vee v_2) \in \mathcal{S}$ .

Basta fazer a conta

$$\begin{aligned} r_1 * (u_1 \vee v_1) \bigvee r_2 * (u_2 \vee v_2) &= (r_1 * u_1) \vee (r_1 * v_1) \vee (r_2 * u_2) \vee (r_2 * v_2) = \\ &= (r_1 * u_1) \vee (r_2 * u_2) \vee (r_1 * v_1) \vee (r_2 * v_2) = b_1 \vee b_1 = b_1 \end{aligned}$$

**Proposição 2.** Se  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathcal{S}$  são tais que  $u_1 \leq v_1$  e  $u_2 \leq v_2$  então para todo  $x \in [u_1, v_1]$  e  $y \in [u_2, v_2]$  temos que  $(x, y) \in \mathcal{S}$ .

Pois

$$b_1 = r_1 * u_1 \bigvee r_2 * u_2 \leq r_1 * x \bigvee r_2 * y \leq r_1 * v_1 \bigvee r_2 * v_2 = b_1$$

#### 4. DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS

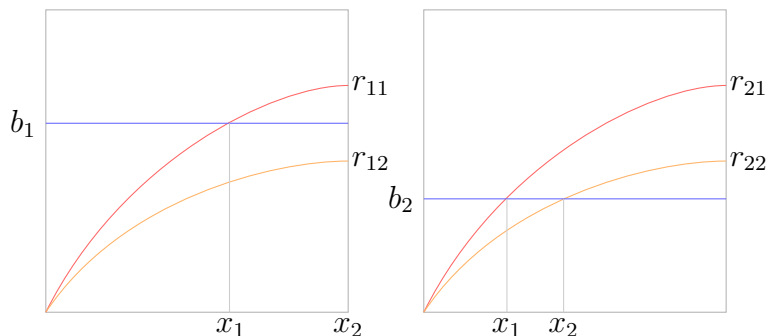
Consideremos agora a resolução simultânea das seguintes equações:

$$(10) \quad b_1 = (r_{11} * x_1) \bigvee (r_{12} * x_2)$$

$$(11) \quad b_2 = (r_{21} * x_1) \bigvee (r_{22} * x_2)$$

Primeiro resolvemos separadamente cada uma das equações acima se estiverem satisfeitas as condições de solução:  $b_1 \leq r_{11} \vee r_{12}$  e  $b_2 \leq r_{21} \vee r_{22}$ .

A solução maximal da primeira equação é  $x_1 = r_{11} \Rightarrow b_1$  e  $x_2 = r_{12} \Rightarrow b_1$ . E da mesma forma expressa-se a solução da segunda equação:  $x_1 = r_{21} \Rightarrow b_2$  e  $x_2 = r_{22} \Rightarrow b_2$ . Veja a figura:



Para que um para  $(x_1, x_2)$  seja solução do sistema de equações é necessário que ele satisfaça cada uma das equações separadamente. Neste caso devemos ter

$$\begin{aligned} x_1 &\leq r_{11} \Rightarrow b_1 \text{ e } x_1 \leq r_{21} \Rightarrow b_2 \\ x_2 &\leq r_{12} \Rightarrow b_1 \text{ e } x_2 \leq r_{22} \Rightarrow b_2 \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} x_1 &\leq r_{11} \Rightarrow b_1 \bigwedge r_{21} \Rightarrow b_2 \\ x_2 &\leq r_{12} \Rightarrow b_1 \bigwedge r_{22} \Rightarrow b_2 \end{aligned}$$

Vamos estipular que

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= r_{11} \Rightarrow b_1 \bigwedge r_{21} \Rightarrow b_2 \\ \bar{x}_2 &= r_{12} \Rightarrow b_1 \bigwedge r_{22} \Rightarrow b_2 \end{aligned}$$

Claramente se  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  for solução do sistema, será uma solução maximal. E se não for? Será que pode acontecer de existir uma solução  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  com, digamos,  $\tilde{x}_1 < \bar{x}_1$ ? Mostraremos que não.

Se  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  não é solução do sistema então não é solução de alguma das duas equações. (Digamos da primeira, tanto faz!) Mas  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  é solução desta equação também (já que é solução do sistema). Das desigualdades  $\tilde{x}_i \leq \bar{x}_i \leq x_i$  temos:

$$(r_{11} * \tilde{x}_1) \bigvee (r_{12} * \tilde{x}_2) \leq (r_{11} * \bar{x}_1) \bigvee (r_{12} * \bar{x}_2) \leq (r_{11} * x_1) \bigvee (r_{12} * x_2)$$

Como o último e o primeiro termo desta desigualdade é  $b_1$  o termo intermediário também é  $b_1$  contradizendo nossa hipótese de  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  não satisfaz a primeira equação.

Assim temos a proposição:

**Proposição 3.** *O sistema tem solução se e somente se  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , como definido anteriormente é a solução maximal.*

## 5. CASO GERAL

Agora voltamos à situação geral descrita na introdução. Trata-se de determinar a matriz  $\mathbf{S}$  tal que:

$$(12) \quad t_{il} = \bigvee_k r_{ik} * s_{kl}$$

Como já observado, para cada  $l \in \{1 \dots p\}$  temos um sistema da forma estudada no parágrafo anterior. Fazendo o mesmo tipo de análise que fizemos naquele parágrafo temos que se a condição  $t_{il} \leq \bigvee_k r_{ik}$  estiver satisfeita e existir solução então a solução maximal será:

$$s_{kl} = \bigwedge_i r_{ik} \Rightarrow t_{il}$$

Em alguns livros esta solução é denotada assim:

$$(13) \quad \mathbf{S} = \mathbf{R}^t \circ_{\Rightarrow} \mathbf{T}$$

Onde o operador é definido para que a fórmula dê certo.

Como vimos, é fácil achar a solução maximal de uma equação relacional. Basta conhecermos a t-norma e a implicação residual envolvidas que temos uma fórmula direta para o cálculo. No entanto as entradas  $s_{kl}$  desta solução maximal só nos informa qual é o grau máximo de relacionamento entre  $y_k$  e  $z_l$ . Se obtemos que esta entre é 1 a conclusão é que o grau máximo de relacionamento é este, mas não é uma informação prática boa pois pode não haver relacionamento nenhum. Por outro lado, se obtemos um  $s_{kl}$  muito baixo (ou mesmo zero) isto significa que, qualquer que seja a solução, o relacionamento entre  $y_k$  e  $z_l$  será muito pequeno. Achar soluções menores é difícil pois se temos duas soluções não sabemos se podemos criar uma menor que estas duas. Mas dadas duas soluções é fácil conseguir uma maior que as duas (veja a primeira proposição acima). Terminamos com uma pergunta para os bons espíritos: Será que as equações relacionais têm utilidade em sistemas dinâmicos fuzzy?