Segunda Lista de Lógica Fuzzy

Cursos de Verão IME-USP - 2002

1. Seja U um conjunto e $\mathcal{P}(U)$ o conjunto das partes de U. Mostre em detalhe que $\mathcal{P}(U)$ é uma álgebra de Boole.

2. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais (inteiros positivos). Seja R a relação: mRn se n é um múltiplo de m. Mostre que com esta relação $\mathbb{N}$ é um reticulado distributivo.

3. Seja $f : U \to V$ uma função entre dois conjuntos. Mostre que se f for sobrejetora então $ff^{-1} : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ é a identidade e que se f for bijetora então $f^{-1}f : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ é a identidade.

4. Sejam A e B conjuntos nebulosos e $\alpha \in [0,1]$, então vale

$$(A \vee B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$$

e

$$(A \wedge B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$$

5. Seja A um conjunto nebuloso de U e A_α o α-corte de A.
(a) Mostre que para todo $x \in U$

$$A(x) = \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \alpha\chi_{A_\alpha(x)}$$

6. Suponha que $\{B_\alpha\}$ é uma família de subconjuntos de U que satisfaz para todo $x \in U$:

$$A(x) = \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \alpha\chi_{B_\alpha(x)}.$$

Mostre que para todo α vale $B_\alpha \subset A_\alpha$.

7. Seja C um reticulado completo e $\mathcal{P}(U)$ o conjunto das partes de um conjunto U. Escolha um subconjunto qualquer D de C e seja $A : U \to C$. Prove o seguinte:
(a) Se $\alpha \leq \beta$ então $A_\alpha \supseteq A_\beta$.
(b) $\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha \subseteq A_{\wedge D}$

8. Seja $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ um conjunto nebuloso de $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definidos abaixo:

$$\begin{aligned} A(x) &= \chi_{\{0\}}(x) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\chi_{(0,\infty)}(x) \\ f(x) &= x\chi_{(0,1)}(x) + \chi_{[0,1)}(x) \end{aligned}$$

Mostre que $\hat{f}(A)_1 \neq f(A_1)$.