

# Teoria Fuzzy x Biomatemática

Laécio Carvalho de Barros      IMECC- UNICAMP- 2001

January 8, 2002

## Apresentação

A característica essencial da modelagem matemática de processos variacionais, utilizando sistemas de equações determinísticas, é a precisão obtida nas previsões do fenômeno. Evidentemente, tais previsões ou inferências estão sempre dependentes de informações precisas que são inseridas nos *valores médios* dos parâmetros utilizados. Por outro lado, nos modelos estocásticos, as soluções médias dos modelos são obtidas a posteriori quando se tem alguma distribuição estatísticas de dados referentes ao fenômeno analisado.

Os modelos estocásticos, como o de Pielou, são frequentemente utilizados para analisar variações sujeitas às distribuições de dados estatísticos. Entretanto, se pretendemos modelar alguma situação onde seus elementos ou variáveis são heterogêneos, relativamente a alguma característica, devemos considerar o comportamento desta característica no processo evolutivo. Por exemplo, se temos uma população de “*fumantes*” num instante  $t_0$ , sujeita a alguma taxa de mortalidade, podemos querer saber como estará composta esta população no futuro. Se considerarmos que cada indivíduo desta população é simplesmente fumante ou não-fumante o problema pode ser resolvido com um modelo determinístico, tomando separadamente ambas as populações - Por outro lado, se temos inicialmente uma distribuição de probabilidades dos fumantes desta população, podemos usar um modelo estocástico para estudar a evolução desta distribuição inicial. Agora, se a característica de ser *fumante* depender da quantidade de cigarros que se fuma diariamente, qualidade dos cigarros fumados, intermitência do ato de fumar etc., devemos caracterizar também o *grau* de ser fumante. Neste caso, cada indivíduo pertence à população de *fumantes* com um *grau específico de pertinência* : Se não fumar, seu grau de pertinência é zero- se fumar 3 carteiras

diárias podemos dizer que é uma fumante de grau 1; Agora, se o indivíduo fumar 10 cigarros por dia o quanto ele será *fumante*? Esta subjetividade, ser fumante, pode ser expressa por uma função  $\mu_A(x)$  que indica o grau com que o elemento  $x$  de um conjunto  $U$  está em “concordância” com o conceito que caracteriza os “elementos” de um subconjunto  $A \subset U$ .

Um *subconjunto fuzzy*  $A$  de um conjunto  $U$  é caracterizado pois por uma função  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ , onde  $\mu_A(x)$  atribui o grau com que o elemento  $x$  pertence ao subconjunto fuzzy  $A$ .

Os modelos clássicos de biomatemática, particularmente, os modelos de dinâmica populacional e epidemiologia são fundamentados em hipóteses, quase sempre, provenientes da fisico-química onde o encontro de duas substâncias (variáveis de estado) é modelado pelo produto de suas concentrações - *lei da ação das massas*. Isto é usado nos modelos de Lotka-Volterra de interação de duas espécies ou nos modelos de Kermack-MacKendrick de epidemiologia. A taxa de predação do modelo presa-predador ou a força de infecção dos modelos epidemiológicos são valores médios obtidos empiricamente ou simulados o que nem sempre traduz corretamente o fenômeno correspondente.

Por outro lado, se considerarmos a população de *presas* de uma determinada espécie, tal variável pode ser considerada como um subconjunto fuzzy, se associarmos a cada presa a *facilidade como é predada*, o que está relacionada com a sua idade, seu estado de saúde, habitat etc. Variáveis deste tipo são muito frequentes em fenômenos biológicos e difíceis de serem avaliadas como médias de dados experimentais.

Os modelos variacionais fuzzy podem comportar vários tipos de subjetividades (fuzziness), dependendo da escolha da variável de estado e dos parâmetros dos modelos. Temos uma *fuzziness demográfica* quando a variável de estado é um subconjunto fuzzy, e *fuzziness ambiental* quando somente os parâmetros são considerados subconjuntos fuzzy. Em geral ambos os tipos de fuzziness estão presentes nos fenômenos biológicos.

Esta nova maneira de modelar problemas ligados à realidade biológica, onde tanto as variáveis de estado como os parâmetros são empregados de subjetividade, vem ganhando terreno na área de biomatemática com resultados significativos e animadores, sendo o que motivou este minicurso de aplicações da Teoria Fuzzy neste congresso.

# 1 Incertezas e Conjuntos fuzzy

## 1.1 Incertezas

A subjetividade intrínseca de variáveis, apesar de serem utilizadas em nosso cotidiano, transmitidas e perfeitamente compreendidas linguisticamente entre interlocutores, têm invariavelmente permanecido fora do tratamento matemático tradicional. Esse é o caso, por exemplo, dos conceitos de *alto*, *fumante*, *infeccioso* etc. Usando uma linguagem conjuntista poderíamos nos referir, respectivamente aos “conjuntos” das pessoas *altas*, *fumantes* ou *infecciosas*. Estes são exemplos típicos de “conjuntos” cujas fronteiras podem ser consideradas incertas. Isto é, definidos por propriedades subjetivas.

A seguir vamos nos fixar apenas no exemplo das pessoas *altas*; Uma proposta para formalizar matematicamente tal conjunto poderia ter pelo menos duas abordagens. A primeira, mais clássica, distinguindo a partir de que valor (altura) um indivíduo é considerado *alto*. Neste caso, o conjunto está bem definido. A segunda, menos convencional, é dada de maneira que todos os indivíduos são considerados altos com mais ou menos intensidade, ou seja, existem elementos que pertenceriam mais à classe dos altos que outros. Isto significa que quanto menor for a altura do indivíduo, menor será seu grau de pertinência à esta classe. Podemos dizer que todos os indivíduos pertencem à classe das pessoas *altas*, com mais ou menos intensidade. Pois bem, é esta segunda abordagem que pretendemos discutir um pouco mais neste texto.

Foram através de desafios como este, onde a propriedade que define o conjunto é incerta, que surgiu a **Teoria dos Conjuntos Fuzzy**, que tem crescido consideravelmente em nossos dias, tanto do ponto de vista teórico como nas aplicações em diversas áreas de estudo, sobretudo em tecnologia.

A palavra “fuzzy”, de origem inglesa, significa incerto, impreciso, subjetivo, nebuloso etc. Porém, como pudemos apurar até agora, nenhuma dessas traduções é tão fiel ao sentido amplo dado pela palavra *fuzzy* em inglês. Além disso, temos observado que todos os países têm usado a palavra *fuzzy*, sem traduzir este termo para sua língua pátria, com exceção da França, que traduziu-a por *nebule*. Essas têm sido as justificativas para não traduzirmos esta palavra para o português.

A teoria de conjuntos fuzzy foi introduzida, em 1965, pelo matemático de origem iraniana Lotfi Asker Zadeh, professor da Universidade de Berkley - Estados Unidos ([16]), com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos lingüísticos subjetivos, como “aproximadamente”,

“em torno de” dentre outros. Esse seria um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas, a exemplo do que faz o ser humano. Por exemplo, todos nós somos unânimes em dizer que o dobro de uma quantidade “em torno de 3” resulta em outra “em torno de 6”.

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função: sua função característica, cuja definição é dada a seguir.

Seja  $U$  um conjunto e  $A$  um subconjunto de  $U$ . A função característica de  $A$  é dada por

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Desta forma,  $C_A$  é uma função cujo domínio é  $U$  e a imagem está contida no conjunto  $\{0, 1\}$ , com  $C_A(x) = 1$  indicando que o elemento  $x$  está em  $A$ , enquanto  $C_A(x) = 0$  indica que  $x$  não é elemento de  $A$ . Assim, a função característica descreve completamente o conjunto  $A$  já que indica quais elementos do conjunto universo  $U$  são elementos também de  $A$ .

Permitindo uma espécie de “relaxamento” no conjunto imagem da função característica de um conjunto foi que Zadeh formalizou matematicamente um subconjunto fuzzy.

## 1.2 Conjunto Fuzzy

Seja  $U$  um conjunto (clássico).

**Definição 1** Um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função  $\mu : U \rightarrow [0, 1]$ , chamada função de pertinência do conjunto fuzzy  $F$ .

O valor  $\mu(x) \in [0, 1]$  indica o grau com que o elemento  $x$  de  $U$  está no conjunto fuzzy  $F$ , com  $\mu(x) = 0$  e  $\mu(x) = 1$  indicando, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de  $x$  ao conjunto fuzzy  $F$ . Do ponto de vista formal, a definição de um subconjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra-domínio da função característica, que é o conjunto  $\{0, 1\}$ , para o intervalo  $[0, 1]$ . Neste sentido, podemos dizer que um conjunto clássico é um caso particular de conjunto fuzzy. Por exemplo, o conjunto  $P$ , dos números pares, tem função característica  $C_P(n) = 1$  se  $n$  é par e  $C_P(n) = 0$  se  $n$  é ímpar. Portanto o conjunto dos pares é um particular conjunto fuzzy já que  $C_P(n) \in [0, 1]$ . Neste caso foi possível descrever todos os elementos de  $P$  a partir da função característica porque todo número natural ou é par ou

é ímpar. O mesmo não pode ser dito para outros conjuntos com fronteiras imprecisas como o

**Exemplo 1** Considere o subconjunto fuzzy  $F$  dos números naturais pequenos:

$$F = \{n \in N : n \text{ é pequeno}\}.$$

O número 0(zero) pertence a esse conjunto? E o número 1000? Dentro do espírito da teoria fuzzy, poderíamos dizer que ambos pertencem a  $F$  porém com diferentes graus de pertinência, de acordo com a propriedade que o caracteriza. Ou seja, a função de pertinência de  $F$  deve ser “construída” de forma coerente com o termo “pequeno” que caracteriza seus elementos no conjunto universo dos números naturais. Uma possibilidade para a função de pertinência de  $F$  é

$$\mu(n) = \frac{1}{n+1}.$$

Se esse for o caso, poderíamos dizer que o número 0 pertence a  $F$  com grau de pertinência  $\mu(0) = 1$ , enquanto 1000 pertence a  $F$  com grau de pertinência  $\mu(1000) = 0,0011$ .

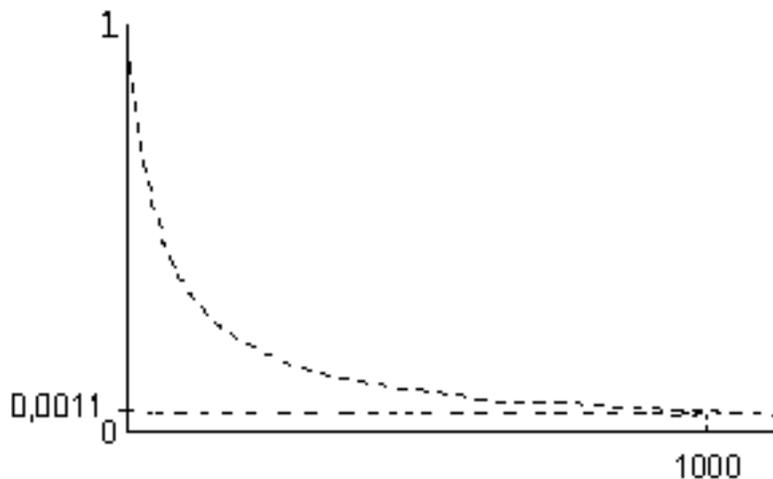


Figure 1: Conjunto fuzzy dos números naturais “pequenos”.

Claro que a escolha da função  $\mu$  neste caso foi escolhida de maneira totalmente arbitrária, levando-se em conta apenas o significado da palavra

“pequeno”. Isto é, tratando-se de modelar este conjunto fuzzy  $F$ , podemos escolher qualquer seqüência monótona decrescente,

$$\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \text{ com } 0 \leq \mu_0 \leq 1$$

para modelar matematicamente o conceito de “número natural pequeno ” como, por exemplo,

$$\mu(n) = e^{-n}.$$

Claro que a escolha de qual das funções deve ser adotada para representar o conjunto fuzzy em questão depende de fatores que estão relacionados com o contexto do problema a ser estudado. Do ponto de vista apenas da teoria fuzzy, qualquer uma das duas funções de pertinência acima podem ser representantes do nosso conjunto fuzzy  $F$ . Porém, o que deve ser notado é que cada uma destas funções produzem conjuntos fuzzy distintos. Desta forma, é comum representar tanto o conjunto fuzzy  $F$  como a sua função de pertinência pelo mesmo símbolo, que aqui optamos pela letra que designa o conjunto fuzzy. Assim, tanto o conjunto fuzzy  $F$  como sua função de pertinência  $\mu$  serão indicados por  $F$ .

### 1.3 Operações entre Conjuntos Fuzzy

Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos fuzzy de  $U$ , com funções de pertinências indicadas também por  $A$  e  $B$ .

Dizemos que  $A$  é subconjunto fuzzy de  $B$ , e escrevemos  $A \subset B$ , se  $A(x) \leq B(x)$  para todo  $x \in U$ .

Note que o conjunto vazio( $\phi$ ) tem função de pertinência  $\phi(x) = 0$  enquanto o conjunto universo( $U$ ) tem função de pertinência  $U(x) = 1$  para todo  $x \in U$ . Assim, podemos dizer que  $\phi \subset A$  e que  $A \subset U$  para todo  $A$ .

#### 1.3.1 União, Intersecção e Complementar de Conjuntos Fuzzy

. A união entre  $A$  e  $B$  é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é dada por

$$(A \cup B)(x) = \text{máximo}_{x \in U} \{A(x), B(x)\}.$$

. A intersecção entre  $A$  e  $B$  é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é dada por

$$(A \cap B)(x) = \text{mínimo}_{x \in U} \{A(x), B(x)\}.$$

. O Complemento de  $A$  é o conjunto fuzzy  $A'$  cuja função de pertinência é dada por

$$A'(x) = 1 - A(x), \quad x \in U.$$

Particularmente, se  $A$  e  $B$  forem conjuntos clássicos, então as funções características das respectivas operações, acima definidas, satisfazem estas igualdades, mostrando a coerência destas definições. Por exemplo, se  $A$  é um subconjunto (clássico) de  $U$ , então a função característica,  $A$ , do seu complementar é tal que  $A'(x) = 0$  se  $A(x) = 1$  (i.é.  $x \in A$ ) e  $A'(x) = 1$  se  $A(x) = 0$  (i.é.  $x \notin A$ ). Neste caso, ou  $x \in A$  ou  $x \notin A$ . Na teoria fuzzy não temos necessariamente essa dicotomia, nem sempre é verdade que  $A \cap A' = \phi$  assim como não é verdade que  $A \cup A' = U$ . O exemplo a seguir ilustra tais fatos.

**Exemplo 2** Suponha que o conjunto universo  $U$  seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam  $A$  e  $B$  os conjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e gripe, respectivamente. A tabela abaixo ilustra a união, intersecção e o complemento

Paciente	Febre( $A$ )	Gripe( $B$ )	$A \cup B$	$A \cap B$	$A'$	$A \cap A'$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,3
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,4
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	0,0

Os valores das colunas, exceto os da primeira, indicam os graus com que cada paciente pertence aos conjuntos fuzzy  $A, B, A \cup B, A \cap B, A', A \cap A'$ , respectivamente, onde  $A$  e  $B$  são supostamente dados. Na coluna  $A \cap A'$ , o valor 0,3 indica que o paciente 1 está tanto no grupo dos febris como no dos não febris. Como dissemos antes, este é um fato inadmissível na teoria clássica de conjuntos na qual tem-se a lei do terceiro excluído ( $A \cap A' = \phi$ ).

## 2 Número Fuzzy

De um modo geral pode-se dizer que, em um problema concreto, muitos números que lá aparecem são idealizações de informações imprecisas envolvendo valores numéricos, como são os casos de frases como “em torno de”. Por exemplo, quando se mede a altura de um indivíduo, o que se obtém é um valor numérico carregado de imprecisões. Tais imprecisões podem ter sido

causadas pelos instrumentos de medidas, pelos indivíduos que estão medindo, pelo indivíduo que está sendo medido etc. Finalmente opta-se por um valor preciso (um número real)  $a$  para indicar a altura. No entanto, seria mais prudente dizer que a altura é *em torno de*  $a$ . Neste caso, matematicamente, indica-se a expressão *em torno de*  $a$  por um conjunto fuzzy  $A$  cujo domínio é o conjunto dos números reais. Também é razoável esperar que  $A(a) = 1$ . A escolha dos números reais como domínio é porque, teoricamente, os possíveis valores para a *altura* são números reais.

Para definir número fuzzy, precisamos introduzir o conceito de  $\alpha$ -níveis de um conjunto fuzzy  $A$ , que são os subconjuntos clássicos dos números reais definidos por

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq \alpha\}, \text{ para } \alpha \in [0, 1].$$

**Definição 2.1** Um conjunto fuzzy  $A$  é chamado de *número fuzzy* quando o conjunto universo, onde  $A$  está definido, é o conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) e satisfaz às condições:

1. Todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são não vazios.
2. Todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ .
3. O suporte de  $A$ ,  $\{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\} = \text{sup } pA$ , é limitado.

Observamos que, com a Definição 2.1 acima, todo número real  $r$  é um particular número fuzzy cuja função de pertinência é a sua função característica:

$$C_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r. \end{cases}$$

Denotaremos aqui  $C_r(x)$  por  $\hat{r}$ . Por exemplo, o *número fuzzy*  $\hat{2}$  tem a seguinte representação gráfica

A família dos números fuzzy será indicada por  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  e, de acordo com o observado acima, temos que  $\mathbb{R}$  é um subconjunto (clássico) de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

Os números fuzzy mais comuns são os *triangulares*, *trapezoidais* e os *em forma de sino*. A seguir são dadas as definições para números fuzzy triangulares.

Um número fuzzy  $A$  é dito *triangular* se sua função de pertinência é da forma

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & \text{se } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{se } x > c \end{cases}$$

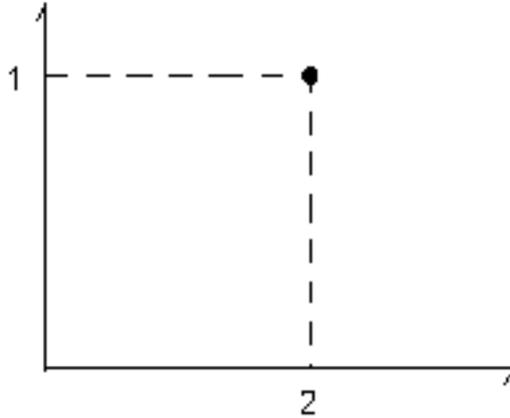


Figure 2: Número fuzzy

para  $a < b < c$ .

O gráfico de um número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, tendo como base o intervalo  $[a, c]$  e, como único vértice fora desta base, o ponto  $(b, 1)$ . Deste modo, os números reais  $a, b$  e  $c$  definem o número fuzzy triangular  $A$  que será denotado pela terna ordenada  $(a; b; c)$ .

Note que o conjunto fuzzy acima não é necessariamente simétrico já que  $c - b$  pode ser diferente de  $b - a$ . Porém,  $A(b) = 1$ , pode-se dizer que o conjunto fuzzy  $A$  é um modelo matemático razoável para a expressão lingüística “*perto de b*”. O mesmo não pode-se dizer da expressão “*em torno de b*”, onde espera-se uma simetria.

## 2.1 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

Aqui definiremos apenas as operações de adição entre números fuzzy e multiplicação de número real por números fuzzy.

**Definição 2.2** Sejam  $A$  e  $B$  dois números fuzzy, e  $\lambda$  um número real.

(a) A soma dos números fuzzy  $A$  e  $B$  é o número fuzzy,  $A + B$ , cuja função de pertinência é

$$(A + B)(x) = \sup_{y+z=x} \min[A(y), B(z)].$$

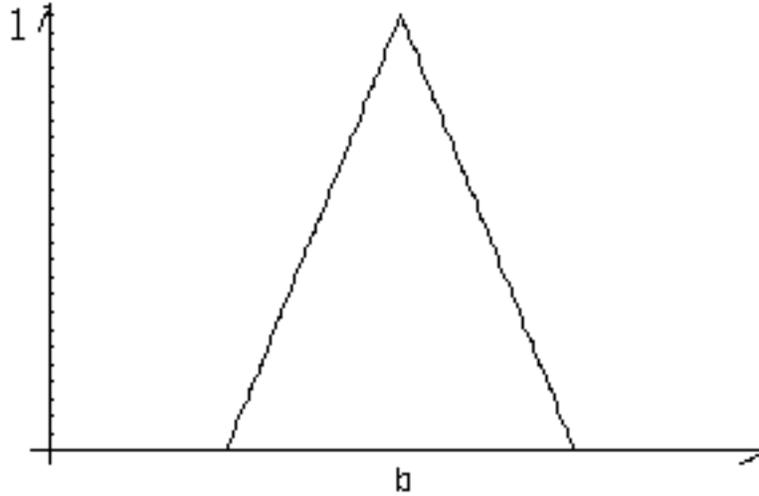


Figure 3: Número fuzzy “em torno de  $b$ ”.

(b) A multiplicação de  $\lambda$  por  $A$  é o número fuzzy,  $\lambda A$ , cuja função de pertinência é

$$(\lambda A)(x) = \begin{cases} A(\lambda^{-1}x) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \hat{0} & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

Uma maneira alternativa, e mais prática, de se fazer estas operações é por meio dos  $\alpha$  – *níveis* dos conjuntos fuzzy envolvidos, de acordo com o teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em Puri e Ralescu [12].

**Teorema 1** Se  $A$  e  $B$  são dois números fuzzy e  $\lambda$  um número real, então para todo  $\alpha \in [0, 1]$  tem-se

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

e

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda[A]^\alpha = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Por exemplo, da definição,  $2(\hat{4}) = \hat{8}$  e, do Teorema 1,  $[2(\hat{4})]^\alpha = \{8\}$  para todo  $\alpha \in (0, 1]$ .

### 3 Relações Fuzzy

Estudos de associações, relações ou interações, entre os elementos de diversas classes, é de grande interesse na análise e compreensão de muitos fenômenos do mundo real. Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Desta forma, intuitivamente pode-se dizer que a relação será fuzzy quando optamos pela teoria dos conjuntos fuzzy, e será crisp quando optamos pela teoria clássica de conjuntos para conceituar a relação em estudo. A adoção por qual dos modelos, dentre estes dois, depende muito do fenômeno estudado. Porém, a opção pela teoria fuzzy sempre tem maior robustez no sentido que esta inclui a teoria clássica de conjuntos ( lembremos um conjunto clássico é um particular conjunto fuzzy). A principal consequência na opção pela relação fuzzy, como será visto nesta secção, é que uma relação clássica indica se há ou não relação entre dois objetos enquanto, uma relação fuzzy além de indicar se há ou não relação, indica também o grau desta relação.

O conceito matemático de uma relação é formalizado utilizando-se do produto cartesiano clássico entre conjuntos que será dado a seguir.

**Definição 3.1** Uma *relação* (clássica)  $R$ , sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ , é qualquer subconjunto (clássico) do produto cartesiano  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ . Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos,  $U_1 \times U_2$ , a relação é chamada de *binária sobre  $U_1 \times U_2$* . Se  $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$ , diz-se que  $R$  é uma *relação sobre  $U$*  e, se o produto cartesiano for composto por dois conjuntos iguais,  $U \times U$ ,  $R$  é chamada de *relação binária sobre  $U$* .

Como a relação  $R$  é um subconjunto do produto cartesiano, então ela pode ser representada por sua função característica  $C_R$ . Assim,

$$C_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin R \end{cases}$$

**Definição 3.2** Uma *relação fuzzy*  $R$  sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  é qualquer subconjunto fuzzy de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ . Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos,  $U_1 \times U_2$ , a relação é chamada de *fuzzy binária sobre  $U_1 \times U_2$* . Se os conjuntos  $U_i$  forem todos iguais a  $U$ ,  $R$  é uma *relação fuzzy sobre  $U$*  e, sobre  $U \times U$ ,  $R$  é chamada apenas de *relação fuzzy binária*.

Se a função de pertinência da relação fuzzy  $R$  for também indicada por  $R$ , então o número  $R(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]$  indica o grau com que os elementos  $x_i$  que compõem a *n-upla*  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  estão relacionados segundo a relação  $R$ .

Uma relação fuzzy sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  que é de grande utilidade, principalmente na teoria de controladores fuzzy, é o produto cartesiano entre conjuntos fuzzy, cuja definição é

**Definição 3.3** O *produto cartesiano fuzzy* dos subconjuntos fuzzy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , respectivamente, é a relação fuzzy

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \wedge \dots \wedge A_n(x_n),$$

onde  $\wedge$  representa o mínimo.

### 3.1 Relação Fuzzy Binária

Aqui serão destacadas as formas de representação e algumas propriedades das relações binárias e fuzzy binárias, as quais estarão ilustradas com alguns exemplos.

**Exemplo 3** Considere, num determinado ecossistema,  $U$  como a comunidade das populações de *águias(a)*, *cobras(c)*, *insetos(i)*, *lebres(l)* e *sapos(s)*. Um estudo de interesse entre os indivíduos destas populações é o de predação. Isto é, da *relação predador-presa*.

Ao optar-se pela relação entre dois indivíduos deste ecossistema, esta pode ser modelada matematicamente por uma *relação binária*  $R$ , com  $R(x, y) = 0$  se  $x$  não é predador de  $y$  e  $R(x, y) \neq 0$  se  $x$  é predador de  $y$ , onde  $x$  e  $y$  representam indivíduos do conjunto  $U$ . A seguir são discutidos dois possíveis casos do emprego da relação clássica e da relação fuzzy para este exemplo.

Se o interesse sobre a relação for apenas para indicar quem é predador e quem é presa neste conjunto  $U$ , então pode-se optar pela teoria clássica e  $R$  é uma relação binária clássica e, neste caso,

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ for predador de } y \\ 0 & \text{se } x \text{ não for predador de } y. \end{cases}$$

Uma representação gráfica para esta relação, colocando os animais em ordem alfabética em um par de eixos, seria como a da Figura 4

Os pontos marcados na Figura 4 indicam os pares que fazem parte da relação  $R$ , ou seja, quem é predador de quem, de acordo com um especialista. Informações além desta a relação não revela.

Se há interesse em estudar, por exemplo, a preferência de alguma presa por parte de um predador na comunidade  $U$ , então uma boa opção é que

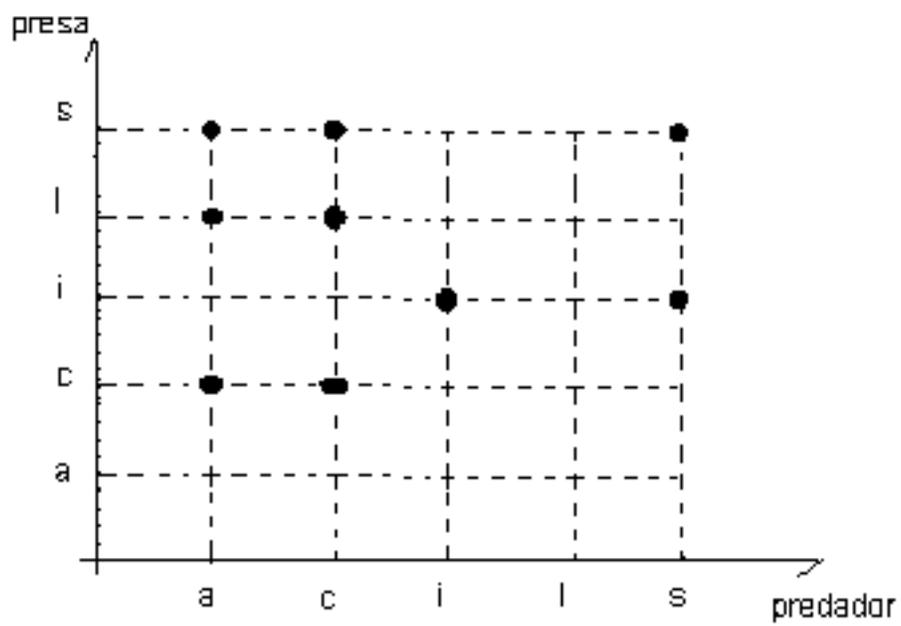


Figure 4: Relação clássica representando os predadores e suas presas.

$R$  seja uma relação fuzzy. Neste caso,  $R(x, y)$  indica o grau com que  $x$  tem preferência por  $y$ . Supondo que não haja diferenças nos graus de predação dentro de cada espécie, uma possibilidade para  $R(x, y)$ , também de acordo com um especialista, para o Exemplo 3, está ilustrada na Figura 5, onde no terceiro eixo (eixo vertical) são representados os diversos graus  $R(x, y)$ .

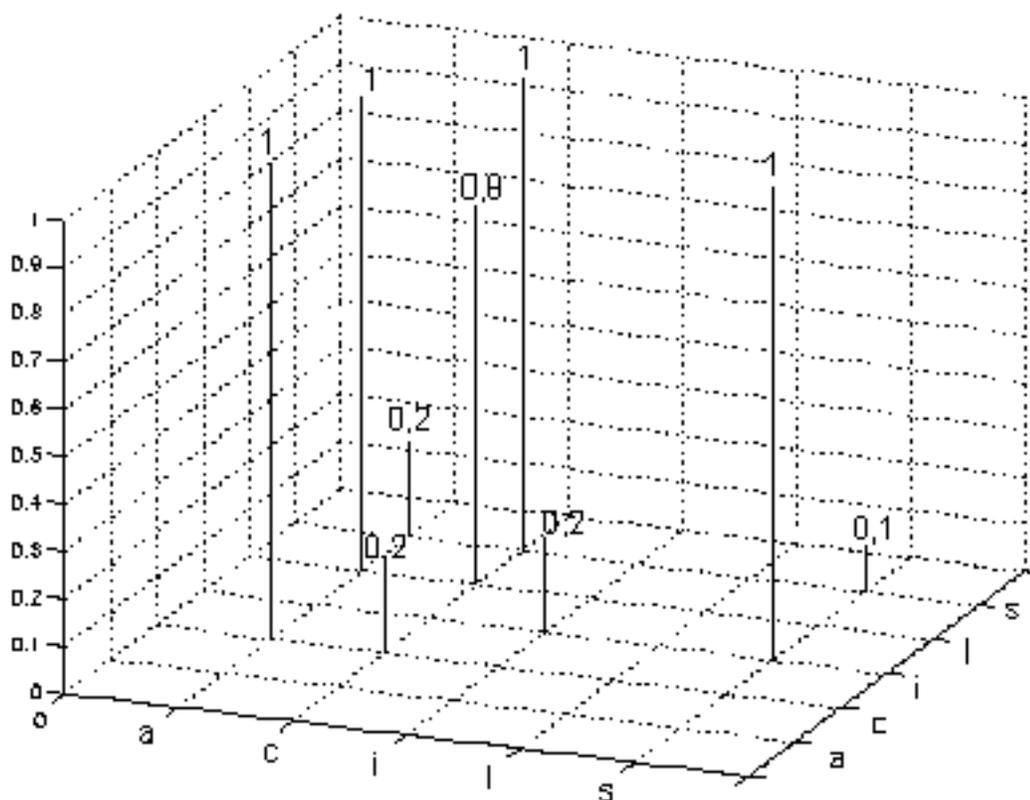


Figure 5: Relação fuzzy e os diversos graus de preferência

A forma mais comum de se representar uma relação binária em  $U_1 \times U_2$  é a de tabela ou matriz, cujos elementos são  $R(x_i, y_j) = r_{ij}$ .

$$\begin{array}{c|cccc}
R & y_1 & y_2 & \dots & y_m \\
\hline
x_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\
x_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n & r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm}
\end{array}
\quad \text{ou} \quad
R = \begin{bmatrix}
r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\
r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm}
\end{bmatrix}$$

A título de exemplo, a representação na forma de tabela e matricial da relação fuzzy do Exemplo 3 são, respectivamente,

$$\begin{array}{c|ccccc}
R & a & c & i & l & s \\
\hline
a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0,2 \\
c & 0 & 0,2 & 0 & 0,8 & 1 \\
i & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\
l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,1
\end{array}
\quad \text{e} \quad
R = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0,2 \\
0 & 0,2 & 0 & 0,8 & 1 \\
0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0,1
\end{bmatrix}$$

Para um melhor entendimento deste texto faz-se necessário a seguinte

**Definição 3.4** A relação fuzzy binária inversa da relação fuzzy binária  $R : U_1 \times U_2 \rightarrow [0, 1]$  é a relação  $R^{-1} : U_2 \times U_1 \rightarrow [0, 1]$  tal que  $R^{-1}(y, x) = R(x, y)$ .

## 3.2 Composição entre Relações Fuzzy Binárias

Considere  $R$  e  $S$  duas relações fuzzy binárias em  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente.

**Definição 3.5** A composição  $RoS$  é uma relação fuzzy binária em  $U \times W$  dada por

$$(RoS)(x, z) = \sup_{y \in V} [\min(R(x, y), S(y, z))]. \quad (1)$$

A composição acima é muitas vezes chamada de  $\max - \min$ . Quando os conjuntos  $U$ ,  $V$  e  $W$  são finitos, então a forma matricial da relação  $RoS$ , dada pela composição  $\max - \min$  acima, é obtida como uma multiplicação de matrizes substituindo-se o produto pelo *mínimo* e a soma pelo *máximo*. De fato, suponha que

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}; \quad V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad W = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$$

e que

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{np} \end{bmatrix}.$$

De acordo com a Definição 3.5, a relação binária fuzzy dada pela composição max – min,  $T = RoS$ , tem a forma matricial

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mp} \end{bmatrix}$$

onde

$$t_{ij} = \sup_k [\min(R(u_i, v_k), S(v_k, w_j))] = \sup_k [\min(r_{ik}, s_{kj})]. \quad (2)$$

Esta secção será finalizado com um caso especial da composição max – min, o qual será utilizado, de uma forma mais geral, nas secções seguintes deste texto.

Sejam  $U$  e  $V$  dois conjuntos,  $\mathcal{F}(U)$  e  $\mathcal{F}(V)$ , as classes dos subconjuntos fuzzy de  $U$  e  $V$ , respectivamente, e  $R$  uma relação binária sobre  $U \times V$ . Então a relação  $R$  define um funcional de  $\mathcal{F}(U)$  em  $\mathcal{F}(V)$  que, a cada elemento  $A \in \mathcal{F}(U)$ , faz corresponder o elemento  $B \in \mathcal{F}(V)$  dado por

$$B(y) = R(A)(y) = \sup_{x \in U} [\min(R(x, y), A(x))]. \quad (3)$$

A relação  $R$  também define um funcional de  $\mathcal{F}(V)$  em  $\mathcal{F}(U)$  da seguinte forma

$$A(x) = R^{-1}(B)(x) = \sup_{y \in V} [\min(R(x, y), B(y))], \quad (4)$$

onde  $B \in \mathcal{F}(V)$ .  $A$  é chamado de imagem inversa de  $B$  por  $R$ .

### 3.3 Equações Relacionais

Nos sistemas especialistas, por exemplo, é de fundamental importância o estudo de *Equações Relacionais* que têm a forma

$$R * X = T \quad \text{ou} \quad X * R = T$$

onde  $R$  e  $T$  são as formas matriciais das relações dadas,  $*$  uma regra de composição (não necessariamente a *max - min*) entre relações fuzzy e  $X$  a forma matricial de uma relação fuzzy incógnita a ser encontrada.

Um estudo mais aprofundado desta teoria pode ser encontrado em Pedrycz e Gomide [7] e Klir e Yuan [8]. Aqui serão utilizados apenas alguns de seus resultados.

Considere  $R$  e  $S$  relações fuzzy binárias definidas sobre  $U \times V$  e  $V \times W$ , respectivamente e, as relações de composição  $RoS$  e  $Ro_wS$ , definidas sobre  $U \times W$  por

$$(RoS)(x, z) = \sup_{y \in V} [\inf(R(x, y), S(y, z))]$$

e

$$(Ro_wS)(x, z) = \inf_{y \in V} [w(R(x, y), S(y, z))],$$

sendo  $w$  uma operação em  $[0,1] \times [0,1]$  como, por exemplo, a implicação fuzzy de Gödel

$$g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

onde,

$$g(a, b) = a \Rightarrow b = \sup\{x \in [0, 1] : \min(a, x) \leq b\} = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq b \\ b & \text{se } a > b. \end{cases}$$

Como muitas outras, esta aplicação  $g$  é uma implicação porque preserva a tabela verdade da implicação clássica:

$a$	$b$	$g(a, b)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

O teorema a seguir tem grande utilidade no estudo das equações relacionais e aqui será feito uso de seu resultado. Para uma prova ver Klir e Yuan [8].

**Teorema 2** Dadas as relações fuzzy  $S$  e  $T$  definidas em  $U \times V$  e  $U \times W$ , respectivamente, seja  $\mathcal{A} = \{R : R \text{ é relação fuzzy em } V \times W \text{ e } R \circ S = T\}$ . Então se  $\mathcal{A} \neq \phi$ , tem-se  $S^{-1} \circ_g T$  como elemento de  $\mathcal{A}$ .

Note que o teorema acima fornece  $S^{-1} \circ_g T$  como solução da equação relacional

$$X \circ S = T.$$

Deste modo, este teorema indica uma maneira de se construir uma relação fuzzy que, quando composta com uma segunda (no caso  $S$ ), produz um resultado pre-estabelecido que, neste caso, é a relação fuzzy  $T$ .

Este é portanto um resultado importante quando deseja-se obter modelos matemáticos que “preservam” as informações que o originaram, como é o caso do diagnóstico médico.

## 4 Aplicações (diagnóstico médico)

O objetivo desta aplicação é propor um sistema fuzzy que simule (imite) a atuação de um médico no diagnóstico de seus pacientes, a partir dos sintomas apresentados por eles.

A aplicação que veremos trata-se de estabelecer um diagnóstico de doenças infantis (veja Bassanezi-Romann [5]).

A idéia básica é relacionar os sintomas de pacientes com possíveis doenças, de acordo com os conhecimentos médicos de um especialista.

Considere os seguintes conjuntos universais

$U =$  conjunto dos pacientes;

$V =$  conjunto dos sintomas;

$W =$  conjunto das doenças.

Especificamente neste caso, trata-se de doenças infantis das quais tem-se conhecimentos que quatro pacientes  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , com sintomas  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$  e  $s_{11}$ , apresentaram os diagnósticos  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$ ,

onde:

$s_1 = \text{febre}; s_2 = \text{cefaleia}; s_3 = \text{garganta inflamada}; s_4 = \text{exantema};$   
 $s_5 = \text{gânglio}; s_6 = \text{coriza}; s_7 = \text{conjuntivite}; s_8 = \text{lingua de morango};$   
 $s_9 = \text{fotofobia}; s_{10} = \text{tosse seca}; s_{11} = \text{vômito}.$

$d_1 = \text{escarlatina}; d_2 = \text{rubéola}; d_3 = \text{sarampo}; d_4 = \text{gripe}.$

Esses dados irão compor a base de conhecimentos que serão expressos por meio de relações fuzzy.

O que se deseja é obter uma relação fuzzy  $R$  de modo que  $RoS = T$ , onde  $S$  e  $T$  são as representações matriciais das relações fuzzy dos sintomas e diagnósticos dados em  $U \times V$  e  $U \times V$ , respectivamente.

Construção do Sistema Fuzzy:

#### BASE DE CONHECIMENTOS

A base de conhecimentos é composta pelas relações fuzzy  $S$  e  $T$ , cujas matrizes são dadas abaixo:

$P \setminus S$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$
$P_1$	0,8	0,4	0,5	0,8	0,2	0,1	0,1	0,9	0,1	0,1	0,4
$P_2$	0,3	0,1	0,4	0,8	0,9	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
$P_3$	0,8	0,3	0,5	0,8	0,1	0,2	0,9	0,1	0,6	0,3	0,6
$P_4$	0,8	0,7	0,7	0,2	0,1	0,9	0,1	0,1	0,1	0,9	0,4

$P \setminus d$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
$P_1$	0,9	0,3	0,4	0,2
$P_2$	0,3	0,9	0,1	0,1
$P_3$	0,4	0,1	0,9	0,3
$P_4$	0,2	0,1	0,3	0,9

Do ponto de vista teórico, a base de conhecimentos está fundamentada no Teorema 2 acima e a composição  $S^{-1}o_gT$  fornece a relação fuzzy  $R$  que indica o relacionamento de cada sintoma com as diversas doenças, isto é, cada elemento  $r_{ij}$  da matriz  $R$  indica o grau com que o sintoma  $s_i$  está relacionado com a doença  $d_j$ . Por exemplo, o valor de  $r_{23}$  é

$$r_{23} = (S^{-1}o_gT)(s_2, d_3) = \min_{1 \leq i \leq 4} [g(S^{-1}(s_2, P_i), T(P_i, d_3))] = 0,3.$$

Desta forma, obtem-se a relação fuzzy  $R$  cuja representação matricial é

$$R = S^{-1}o_gT = \begin{array}{c|cccc} s \backslash d & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \hline s_1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ s_2 & 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ s_3 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ s_4 & 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ s_5 & 0,3 & 1,0 & 0,1 & 0,1 \\ s_6 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ s_7 & 0,4 & 0,1 & 1,0 & 0,3 \\ s_8 & 1,0 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ s_9 & 0,4 & 0,1 & 1,0 & 0,3 \\ s_{10} & 0,2 & 0,1 & 0,3 & 1,0 \\ s_{11} & 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{array}$$

A operação  $o_g$  foi escolhida com o principal objetivo do uso do Teorema 2. Mais precisamente, o diagnóstico de cada um dos pacientes  $P_i$  que compõem a base de conhecimentos, traduzida matematicamente pelas matrizes  $S$  e  $T$ , pode ser “recuperado” por meio da relação  $R$  já que, de acordo com a fórmula (3)

$$R(P)(d) = \sup_{s \in V} [\min[R(d, s), P(s)]]. \quad (5)$$

Por exemplo, o diagnóstico do paciente  $P_1$ , via relação fuzzy  $R$ , é facilmente obtido. De acordo com os sintomas apresentados, o paciente  $P_1$  pode ter uma das doenças  $d_i$  com os respectivos graus de possibilidades:

$$\begin{aligned} R(P_1)(d_1) &= \sup_{1 \leq i \leq 11} [\min[R(d_1, s_i), P_1(s_i)]] = 0,9 \\ R(P_1)(d_2) &= \sup_{1 \leq i \leq 11} [\min[R(d_2, s_i), P_1(s_i)]] = 0,3 \\ R(P_1)(d_3) &= \sup_{1 \leq i \leq 11} [\min[R(d_3, s_i), P_1(s_i)]] = 0,4 \\ R(P_1)(d_4) &= \sup_{1 \leq i \leq 11} [\min[R(d_4, s_i), P_1(s_i)]] = 0,2 \end{aligned}$$

Desta forma, obtem-se os diagnósticos para os quatro pacientes:

$$\begin{aligned} R(P_1) &= (0,9; 0,3; 0,4; 0,2); & R(P_2) &= (0,3; 0,9; 0,1; 0,1) \\ R(P_3) &= (0,4; 0,1; 0,9; 0,3); & R(P_4) &= (0,2; 0,1; 0,3; 0,9). \end{aligned}$$

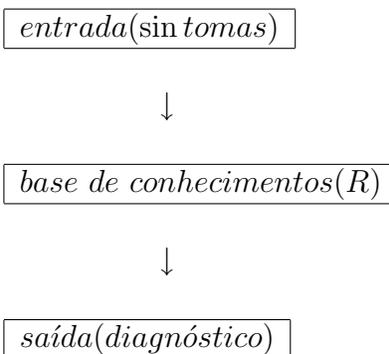
Duas importantes propriedades desta relação fuzzy  $R$  podem ser ressaltadas:

1. Ela “recupera” os diagnósticos dos pacientes que compõem a base de conhecimentos.

2. Ao se adicionar informações na base de conhecimentos, isto é, à medida que tem-se diagnósticos de novos pacientes, estes podem ser incluídos na base de conhecimentos e assim aumentar a capacidade de se obter mais diagnósticos por meio da relação fuzzy  $R$ , tal como faz um médico.

Essas duas propriedades da relação fuzzy  $R$  é que legitimam o seu uso no fornecimento do diagnóstico de um paciente. Dentro do conjunto  $V$ , composto pelos sintomas usados na base de conhecimentos, o diagnóstico de um paciente  $P$  é obtido pela fórmula (5).

Esta aplicação pode ser resumida no sistema de entradas e saídas:



Para finalizar esta secção, vale a pena alguns comentários:

A propriedade 1 é a principal característica dos chamados *Sistemas Especialistas*. Sistemas especialistas são aqueles que **imitam** especialistas humanos. Por outro lado, a propriedade 2, de atualizar a base de conhecimentos, é o que caracteriza as chamadas *Redes Neurais*. Redes neurais são sistemas que **aprendem** no sentido de incorporarem novas situações na sua base de conhecimentos, assim como o fazem sistemas humanos.

Estes assuntos podem ser encontrados em Pedrycz e Gomide [7].

## 5 Medidas Fuzzy

A noção de medida fuzzy foi introduzida por Sugeno em 1974 [15] com um principal objetivo de flexibilizar a rígida propriedade de aditividade exigida

na medida clássica. Com isso é possível ampliar o alcance de ferramentas matemáticas na modelagem de problemas da realidade. O exemplo a seguir mostra uma situação prática.

**Exemplo 4** Suponha que queremos “medir” a produtividade de um grupo de trabalhadores de uma determinada indústria. Se  $\mu(A)$  é a produtividade de um conjunto clássico( $A$ ) destes trabalhadores. Então, é razoável que:

- 1)  $\mu(\phi) = 0$
- 2)  $\mu(A) \leq \mu(B)$  se  $A \subseteq B$ .

Para este exemplo, não é razoável que  $\mu$  seja necessariamente aditiva, isto é, que  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

Se os grupos  $A$  e  $B$  trabalham separados, então teremos  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ . Mas, se os grupos  $A$  e  $B$  interagem, a igualdade pode não se verificar. Se houver cooperação entre os grupos, então pode ser que  $\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$ . Por outro lado, pode ocorrer  $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$  se houver incompatibilidade entre as operações de  $A$  e  $B$ .

**Definição 5.1** Se  $\Omega \neq \phi$  e  $A, B$  são subconjuntos(cássicos) de  $\Omega$ , então  $\mu$  é uma medida fuzzy se

- a)  $\mu(\phi) = 0$  e  $\mu(\Omega) = 1$ ;
- b)  $\mu(A) \leq \mu(B)$  se  $A \subseteq B$ .

Note que toda medida de probabilidade é uma particular medida fuzzy, já que uma medida de probabilidade  $P$ , além de satisfazer as condições a) e b) acima, satisfaz também  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , se  $A \cap B = \phi$ . Um exemplo de medida fuzzy muito explorado é a medida de possibilidade ([17]).

**Medida de Possibilidade** Sejam  $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , com  $f(x) = 1$ , para algum  $x \in \Omega$  e  $A \subset \Omega$ . A medida de possibilidade de  $A$  é o número real dado por

$$\pi(A) = \begin{cases} \sup_{x \in A} f(x) & \text{se } A \neq \phi \\ 0 & \text{se } A = \phi \end{cases}$$

## 5.1 Integral Fuzzy e Esperança Fuzzy

A integral fuzzy, introduzida por Sugeno [15], é um instrumento apropriado para avaliar conjuntos fuzzy, usando medidas fuzzy. A integral fuzzy é usada aqui em substituição à integral clássica com o intuito de obter um número real que represente um conjunto fuzzy. Na linguagem da teoria fuzzy, a integral fuzzy é um defuzificado do conjunto fuzzy. A esperança fuzzy desempenha

função análoga à esperança na teoria estocástica, onde uma distribuição é “representada” por sua média.

**Definição 5.2** Sejam  $\mu$  uma medida fuzzy e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $\Omega$ . A *integral fuzzy* de  $A$  ou *Esperança Fuzzy* de  $A$ , denotada por  $EF(A)$ , é o número real

$$EF(A) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\min[\alpha, \mu\{A \geq \alpha\}],$$

onde  $\mu\{A \geq \alpha\} = \mu\{x \in \Omega : A(x) \geq \alpha\}$ . Isto é,  $\mu\{A \geq \alpha\}$  é o  $\alpha$  – nível do conjunto fuzzy  $A$ . Os teoremas a seguir têm grande utilidade nos exemplos e aplicações vistas aqui neste texto.

**Teorema 3** Se a função  $H(\alpha) = \mu\{x \in \Omega : A(x) \geq \alpha\}$  tem único ponto fixo  $\bar{\alpha}$ , então  $EF(A) = \bar{\alpha}$ .

O teorema a seguir relaciona as esperanças clássica e fuzzy.

**Teorema 4**(Sugeno) Se  $A$  é um conjunto fuzzy então

$$|EF(A) - E(A)| \leq \frac{1}{4}.$$

onde  $E(A)$  é a esperança clássica de  $A$ . Isto é, a medida fuzzy em questão é a medida de probabilidade. Este teorema legitima o uso da esperança fuzzy em substituição à clássica, quando não temos uma medida de probabilidade para o fenômeno estudado e sim, apenas uma medida fuzzy. Também já provamos que se a função de densidade de distribuição da variável aleatória  $A$  for simétrica, então temos  $EF(A) = E(A)$ .

A seguir vamos fazer uma aplicação dos conceitos e técnicas da teoria fuzzy até aqui expostos.

## 6 Um Modelo de Expectativa de Vida: Mortalidade x Pobreza

Faremos agora um estudo da expectativa de vida, que pode ser encontrado com mais detalhes em Barros [2] e Bassanezi [4], considerando a pobreza como um agravante na taxa de mortalidade dos indivíduos, por meio de um conjunto fuzzy. Em seguida faremos uma comparação entre os métodos estocástico e fuzzy, para obter a expectativa de vida do grupo estudado.

Para modelar a pobreza, poderíamos usar qualquer indicador, como por exemplo, consumo de calorias, de vitaminas, saneamento básico etc. Aqui, usaremos a renda do grupo estudado.

## 6.1 O Modelo

Suponha que  $A$  seja um grupo com  $n(t)$  indivíduos no instante  $t$ . Assumindo que a pobreza (aqui avaliada subjetivamente pelo nível de renda) seja um fator de redução no tempo de vida de cada elemento de  $A$ , podemos considerar que

$$\frac{dn}{dt} = -(\lambda_1 + \beta(r)\lambda_2)n \quad (6)$$

onde

$\lambda_1$  é a taxa de mortalidade natural (obtida em um grupo que dispões de condições satisfatórias de sobrevivência);

$\beta(r)\lambda_2$  indica a influência da pobreza no aumento de  $\lambda_1$ ;

$\beta(r)$  indica o conjunto fuzzy dos pobres de acordo com a renda  $r$ .

Note que a taxa máxima de mortalidade é  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

A solução de (6) é

$$n(t) = n(0)e^{-(\lambda_1 + \beta(r)\lambda_2)t}.$$

O conjunto fuzzy  $\beta(r)$  pode ser representado por uma função decrescente com  $r$  e, aqui, achamos conveniente

$$\beta(r) = \begin{cases} [1 - (\frac{r}{r_0})^2]^k & \text{se } 0 < r < r_0 \\ 0 & \text{se } r \geq r_0 \end{cases}$$

onde  $k$  é um parâmetro que fornece alguma característica do grupo.

Podemos observar que quanto maior o valor de  $k$ , menor será a dependência do indivíduo em relação à renda. Assim, intuitivamente,  $k$  revela se o ambiente em que o grupo é mais ou menos favorável à vida.

Observamos que (6) é uma família de equações diferenciais. Assim, para cada  $r$  fixo,  $n(t)$  é uma família de soluções da equação diferencial. Deste modo, supondo que  $r$  tenha uma distribuição estocástica,  $n(t)$  é uma variável aleatória.

Nosso objetivo a seguir é obter a expectativa de vida do grupo por meio das esperanças fuzzy e clássica.

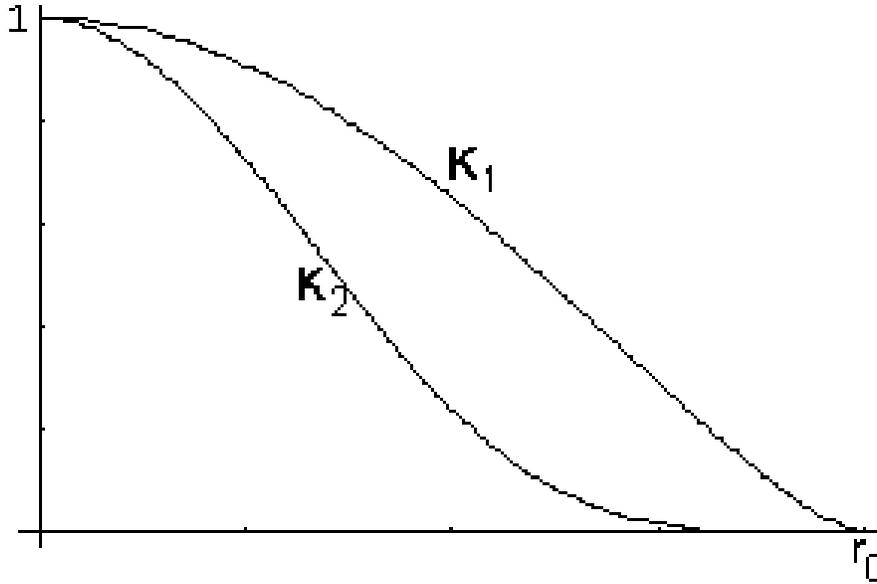


Figure 6: Conjunto fuzzy dos pobres para dois ambientes.

### 6.1.1 Esperança Estocástica( $E(n(t))$ )

A esperança clássica é dada por

$$E(n(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)h(r)dr \quad (7)$$

onde  $h(r)$  é a densidade de distribuição da renda.

Para o nosso caso específico vamos usar a distribuição de Pareto com parâmetros  $a$  e  $b$ :

$$h(r) = \begin{cases} ab^a r^{-(a+1)} & \text{se } r \geq b \\ 0 & \text{se } r < b \end{cases}$$

Assim,

$$E(n(t)) = n(0)e^{-\lambda_1 t} ab^a \int_b^{\infty} e^{-\beta(r)\lambda_2 t} r^{-(a+1)} dr$$

ou

$$E\left(\frac{n(t)}{n(0)}\right) = e^{-\lambda_1 t} ab^a \int_b^{\infty} e^{-\beta(r)\lambda_2 t} r^{-(a+1)} dr.$$

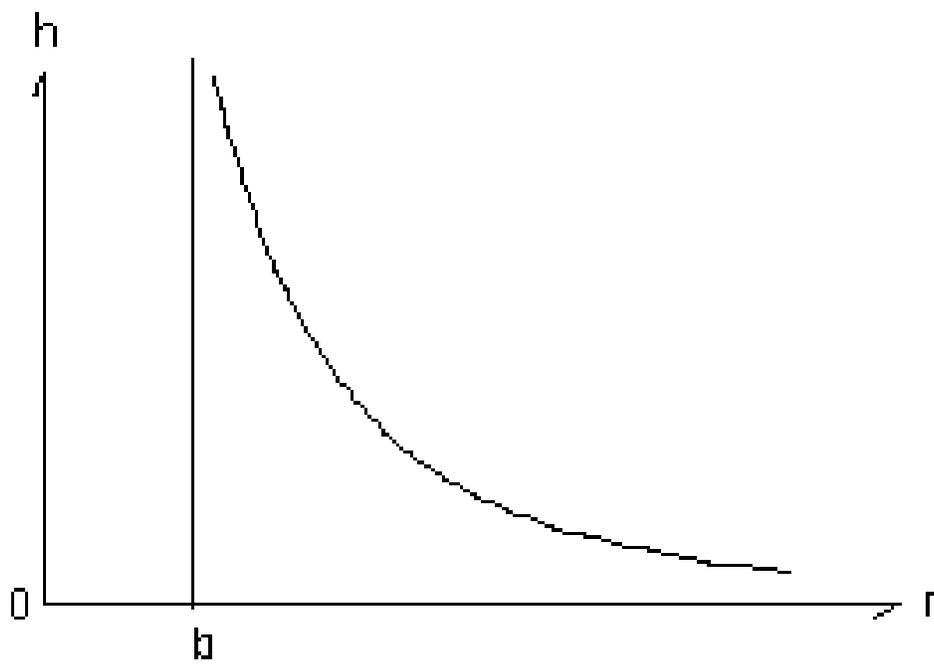


Figure 7: Densidade de distribuição da renda

Se  $r_0 \leq b$ , então  $\beta(r) = 0$  para  $r \geq b$  e assim  $E(n(t)) = n(0)e^{-\lambda_1 t} ab^a \int_b^\infty r^{-(a+1)} dr = n(0)e^{-\lambda_1 t}$ , ou  $E(\frac{n(t)}{n(0)}) = e^{-\lambda_1 t}$ , para todo  $a > 0$ , ou seja, neste caso o valor de  $b$  é suficientemente grande para que não haja interferência da pobreza na esperança de vida do grupo.

Se  $r_0 > b$ , temos que  $ab^a \int_b^\infty e^{-\beta(r)\lambda_2 t} r^{-(a+1)} dr < 1$ , de maneira que  $E(n(t)) < n(0)e^{-\lambda_1 t}$ . Assim, podemos interpretar o número

$$ab^a \int_b^\infty e^{-\beta(r)\lambda_2 t} r^{-(a+1)} dr$$

como um fator de redução na expectativa de vida devido à pobreza.

A seguir vamos calcular a esperança fuzzy a fim de comparar com a esperança estocástica obtida acima.

### 6.1.2 Esperança Fuzzy( $EF(\frac{n(t)}{n(0)})$ )

Como  $Y_t(r) = \frac{n(t)}{n(0)}$  é um conjunto fuzzy, já que  $\frac{n(t)}{n(0)} \in [0, 1]$ , vamos obter  $EF[\frac{n(t)}{n(0)}]$  usando o Teorema 3, aplicado à função

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= P\{r : Y_t(r) = \frac{n(t)}{n(0)} \geq \alpha\} = P\{r : e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 \beta(r))t} \geq \alpha\} \\ &= P\{r : e^{-\lambda_2 \beta(r)t} \geq \alpha e^{\lambda_1 t}\}, \end{aligned}$$

onde  $P$  é a probabilidade definida pela função de densidade da renda  $h(r)$ . Lembremos que  $P$  é uma particular medida fuzzy para qual vale o Teorema 4.

Assim,  $H(\alpha) = 0$  se  $\alpha > e^{-\lambda_1 t}$ . Por outro lado, se  $\alpha \leq e^{-\lambda_1 t}$ ,

$$H(\alpha) = P\{r : \alpha \leq e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 \beta(r))t} < e^{-\lambda_1 t}\} + P\{r : r \geq r_0\},$$

que, com alguma manipulação algébrica, chegamos a

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 \beta(b))t} \\ \left[ \frac{b}{r_0 \sqrt{1 - \left(-\frac{\ln \alpha + \lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{k}}}} \right]^a & \text{se } e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 \beta(b))t} < \alpha \leq e^{-\lambda_1 t} \\ 0 & \text{se } e^{-\lambda_1 t} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

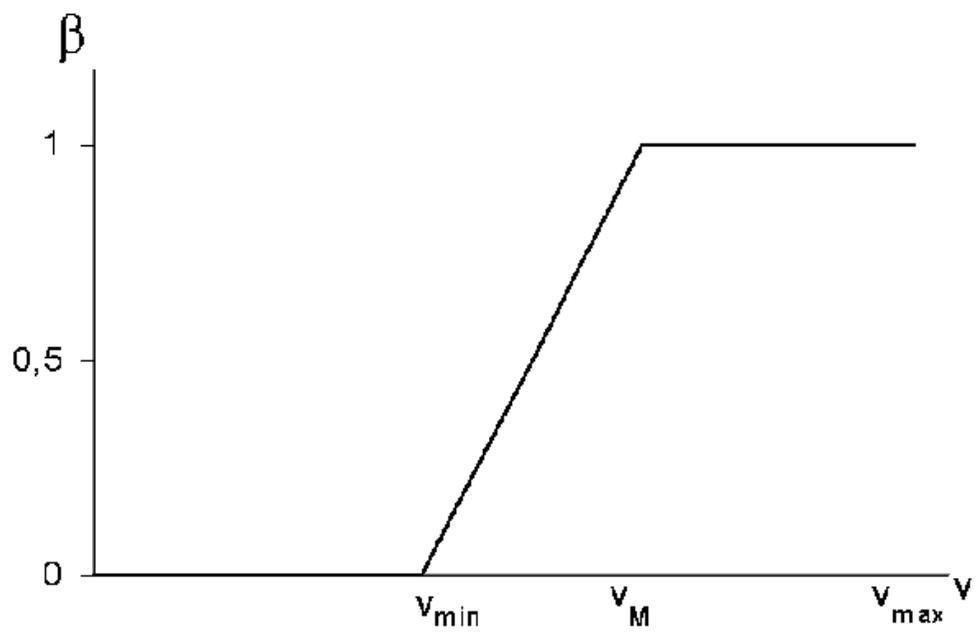


Figure 8:  $H(\alpha)$  e esperança fuzzy (EF)

É fácil ver que  $H(\alpha)$  é contínua em  $[0, 1]$ , exceto quando  $\alpha = e^{-\lambda_1 t}$  e, que o ponto fixo de  $H$  está compreendido entre  $Y_t(r)$ . Isto é,

$$Y_t(r) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 \beta(b))t} \leq EF\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right] \leq e^{-\lambda_1 t}.$$

Algumas conclusões aqui são ligeiramente diferentes das obtidas no caso da esperança estocástica. Especificamente: se  $(\frac{b}{r_0})^a \geq e^{-\lambda_1 t}$ , então  $EF\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right] = e^{-\lambda_1 t} = EF[e^{-\lambda_1 t}]$ . Em particular, temos que se  $b \geq r_0$ , a pobreza não interfere na esperança de vida. Este foi o caso que obtemos para a esperança clássica. No entanto, a esperança fuzzy indica mais: para que a pobreza não interfira na expectativa de vida, o que interessa é a relação  $((\frac{b}{r_0})^a \geq e^{-\lambda_1 t})$  entre a renda do indivíduo e a renda mínima do grupo. Por exemplo, um indivíduo pode ter renda relativamente pequena ( $b < r_0$ ) e, ainda assim, não interferir em sua expectativa de vida. Para isto, basta que  $(\frac{b}{r_0})^a \geq e^{-\lambda_1 t}$ . Este é o caso típico de alguém solteiro e que tem toda a infra-estrutura para sobreviver.

Queremos resaltar que, do ponto de vista técnico, é mais difícil obter  $E(n(t))$ , por não ter primitiva, que  $EF\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]$  cujo valor é obtido pelo ponto fixo de  $H$ , o qual pode ser obtido via Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Para encerrar esta secção queremos dizer que a incerteza no Problema de Valor Inicial(6) é devido o parâmetro  $\beta$  e não à variável de estado  $n(t)$ . Deste modo nós tratamos matematicamente o problema (6) com os conceitos clássicos, cuja solução pode ser estudada como dependente do parâmetro  $r$ . Isto é, a derivada, que lá aparece, tem o sentido que já conhecemos para funções reais. Porém, quando a própria variável de estado, como por exemplo o conceito de presa ou predador (que claramente varia de indivíduo para indivíduo, ainda que numa mesma espécie) tem caráter subjetivo, então via de regra, um novo conceito de derivada faz-se necessário. Isto é, um novo conceito de taxa de variação deve ser definido para uma variável incerta.

A seguir vamos introduzir o conceito de derivada para uma função com valores em conjuntos fuzzy, segundo Puri e Ralescu [12].

## 7 Equação Diferencial Fuzzy

Vamos aqui estudar apenas o caso unidimensional, ou seja, a derivada de uma função  $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , onde  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  representa o conjunto dos números

fuzzy, de acordo com a Definição 2 da Secção 2. Para um caso mais geral e mais informações sobre equações diferenciais fuzzy, o leitor pode consultar Barros [3] e Barros et. al. [1]. Para este caso unidimensional, a derivada de  $u(t)$  será definida a partir de seus  $\alpha$  – *níveis* da seguinte maneira.

Dado  $T > 0$ , a função  $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  está bem definida, se e somente se, para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , existem funções reais  $u_1^\alpha, u_2^\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que os  $\alpha$  – *níveis* de  $u(t)$  são  $[u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)]$ . Ou seja,

$$[u(t)]^\alpha = [u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)].$$

Desta forma, a derivada de  $u(t)$  é definida pela função  $u' : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  cujos  $\alpha$  – *níveis* são dados por

$$[u'(t)]^\alpha = [(u_1^\alpha)'(t), (u_2^\alpha)'(t)],$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

A seguir vamos ilustrar o conceito acima com um exemplo.

**Exemplo 6** Vamos resolver o Problema de Valor Inicial Fuzzy

$$u'(t) = -u(t), \quad u_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \quad (8)$$

supondo que  $[u(t)]^\alpha = [u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)]$  e  $[u_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]$ .

De acordo com o conceito de derivada acima, devemos resolver o sistema determinístico

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = -u_2^\alpha(t), & u_1^\alpha(0) = u_{01}^\alpha \\ (u_2^\alpha)'(t) = -u_1^\alpha(t), & u_2^\alpha(0) = u_{02}^\alpha \end{cases}$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} u_1^\alpha(t) &= \frac{u_{01}^\alpha - u_{02}^\alpha}{2} e^t + \frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} e^{-t} \\ u_2^\alpha(t) &= \frac{u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha}{2} e^t + \frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} e^{-t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ou seja, a solução do problema (8) é a função  $u(t)$  com  $\alpha$  – *níveis* dados pelas equações (9) acima. A Figura 9 abaixo representa a solução obtida acima.

Para encerrar esta secção, vamos fazer algumas observações a respeito da solução acima que, de um modo geral, vale para casos mais gerais:

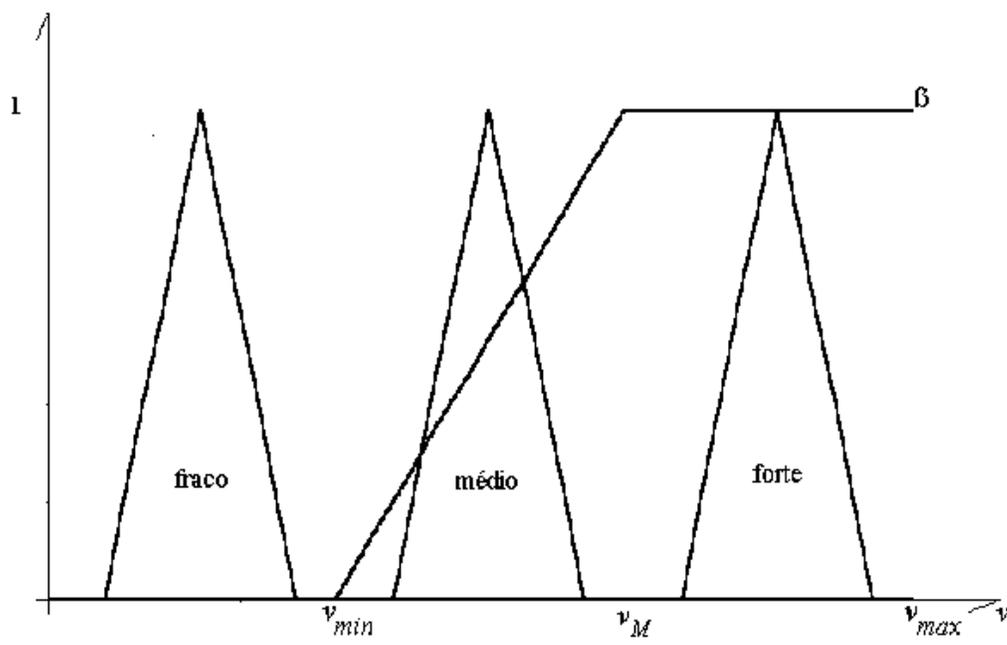


Figure 9: Sol. fuzzy  $u(t)$  e cond. inicial fuzzy  $u_0$

1. o diâmetro de  $u(t)$ ,  $diam(u(t)) = u_2^\alpha(t) - u_1^\alpha(t) = (u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha)e^t$ , é sempre crescente com  $t$ , exceto se  $u_{02}^\alpha = u_{01}^\alpha$ , ou seja, se  $u_0 \in \mathbb{R}$ . Esta é a maior dificuldade para definir o conceito de estabilidade neste tipo de Equação Diferencial Fuzzy.

2. quando temos um problema de valor inicial fuzzy no qual o campo é extensão fuzzy de um campo determinístico, então toda solução determinística é solução preferida, no sentido de ter grau de pertinência 1 na solução fuzzy. Este resultado está formalizado e demonstrado em Barros [3]. Para ilustrar melhor este fato vamos nos restringir ao Problema de Valor Inicial Fuzzy do Exemplo 6 acima. Associado a este problema temos o Problema de Valor Inicial(determinístico)

$$x'(t) = -x(t), \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

cujas solução é

$$x(t) = x_0 e^{-t}.$$

Assim, se  $x_0 \in [u_0]^1$ , então

$$u_1^\alpha(t) \leq x(t) \leq u_2^\alpha(t), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Isto significa que  $x(t) \in [u(t)]^1$  para todo  $t$ . Ou seja, a solução determinística,  $x(t)$ , tem grau de pertinência 1 na solução fuzzy. Portanto é uma solução *preferida*.

A Figura 10 abaixo ilustra esta observação para o nosso exemplo. De acordo com a observação 1 feita acima, há uma dificuldade em definir estabilidade para esse tipo de equação diferencial, já que do diâmetro das soluções são crescentes com o tempo.

Uma maneira de estudar estabilidade de soluções em um sistema dinâmico é por meio das *equações de diferenças* ou *sistemas dinâmicos discretos* como veremos a seguir.

## 8 Sistemas Dinâmicos Fuzzy Discretos

Um sistema dinâmico fuzzy discreto é tratado aqui sob a forma

$$A_{n+1} = f(A_n)$$

onde  $f : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

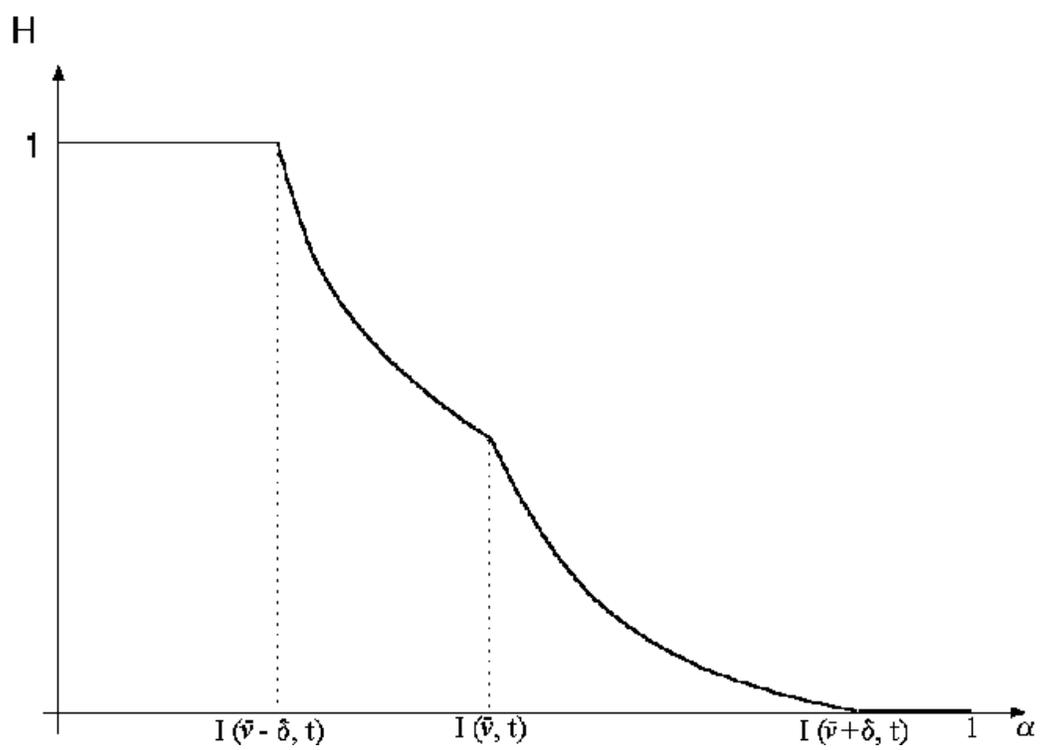


Figure 10: Sol. fuzzy  $u(t)$  e a sol. preferida  $x(t)$

Dado  $A_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , a seqüência de iteradas

$$A_0, f(A_0), f(f(A_0)), \dots$$

é chamada de *solução* ou *órbita positiva* de  $A_0$ .

Para estudarmos a estabilidade é necessário definir uma métrica em  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , que aqui será a métrica  $(D)$ , proveniente da métrica de Hausdorff, dada por

$$D(A, B) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H([A]^\alpha, [B]^\alpha)$$

onde  $d_H$  é a métrica de Hausdorff nos intervalos compactos de  $\mathbb{R}$  cuja definição é

$$d_H(I, J) = \max(\sup_{x \in I} d(x, J), \sup_{y \in J} d(y, I))$$

$$\text{e } d(r, s) = |r - s|.$$

Com essa métrica, Ralescu [13] prova que o espaço métrico  $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), D)$  é completo. Deste modo, se  $A_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , então as iteradas definidas acima, bem como seu limite quando existir, estão em  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ,

A seguir vamos analisar brevemente a dinâmica do modelo de Malthus, supondo incerteza na condição inicial, o que é bastante razoável em problemas de dinâmica de populações, como, por exemplo, o número inicial de uma cultura de bactérias.

**Exemplo 7** (crescimento malthusiano) Considere uma população crescendo de maneira que, o número de indivíduos em cada geração é proporcional à população da geração anterior, isto é

$$A_{n+1} = \lambda A_n, \quad A_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \tag{10}$$

com  $\lambda > 0$ .

Desta forma, levando em conta a operação de número real por número fuzzy (Definição 2), a solução de (10) é

$$A_n = \lambda^n A_0 \tag{11}$$

cujos  $\alpha$ -níveis são  $[A_n]^\alpha = \lambda^n [A_0]^\alpha = [\lambda^n A_{01}^\alpha, \lambda^n A_{02}^\alpha]$ , onde  $[A_0]^\alpha = [A_{01}^\alpha, A_{02}^\alpha]$  são os  $\alpha$ -níveis da condição inicial.

### Pontos de Equilíbrio

De acordo com a solução(11) podemos concluir que o único ponto fixo do problema (10) é o número fuzzy  $\widehat{0}$  se  $\lambda \neq 1$  e que qualquer  $A_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  é ponto fixo se  $\lambda = 1$ .

Diferentemente do caso contínuo, isto é, das equações diferenciais fuzzy, como vimos na Secção 7, aqui o diâmetro da solução pode diminuir a medida que o tempo cresce. Para o nosso exemplo acima temos

$$\text{diam}[A_n]^\alpha = \text{diam}[\lambda^n A_0]^\alpha = \lambda^n \text{diam}[A_0]^\alpha$$

e assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}[A_n]^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \lambda < 1 \\ \infty & \text{se } \lambda > 1 \\ \text{diam}[A_0]^\alpha & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

Conseqüentemente, podemos estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

### Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Da definição da métrica  $D$  acima temos

$$D(\widehat{0}, A_0) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H([\widehat{0}]^\alpha, [A_0]^\alpha) = |A_{02}^0|$$

e

$$D(\widehat{0}, A_n) = D(\widehat{0}, \lambda^n A_0) = \lambda^n |A_{02}^0|.$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , seja  $0 < \delta < \lambda^{-n}\epsilon$ . Se  $D(\widehat{0}, A_0) = |A_{02}^0| < \delta$ , então  $D(\widehat{0}, A_n) = \lambda^n |A_{02}^0| < \lambda^n \delta < \epsilon$ .

Logo,  $\widehat{0}$  é estável se  $0 < \lambda \leq 1$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\widehat{0}, A_n) = 0$  se  $0 < \lambda < 1$ , e assim  $\widehat{0}$  é assintoticamente estável. Para  $\lambda > 1$ , o ponto de equilíbrio  $\widehat{0}$  é instável.

Estas também são as conclusões para o caso determinístico e, desta forma, a teoria fuzzy nada acrescenta para se entender o modelo de Malthus. Porém, para casos não lineares, como o *logístico*, a dinâmica muda radicalmente quando estudada com teoria fuzzy. Por exemplo, no modelo logístico, provamos que há muito mais pontos fixos que o caso determinístico, o diagrama de bifurcação é diferente daquele clássico. Também as órbitas periódicas mudam. Como este estudo foge do objetivo deste trabalho, recomendamos o leitor que tenha interesse neste assunto consultar [3].

A seguir apresentamos uma introdução da aplicação da Teoria Fuzzy ao estudo de Epidemiologia. Para ver mais aplicações em Epidemiologia

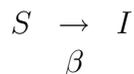
e Dinâmica de Populações, o leitor pode consultar a Tese de Doutorado de Neli[10] e fascículos da revista Biomatemática editada pelo IMECC- UNICAMP desde 1991.

## 9 Aplicação à Epidemiologia

A necessidade de se estudar o comportamento dinâmico de epidemias é de fundamental importância no que diz respeito à sua evolução, estabilidade e controle.

### 9.1 O Modelo clássico $SI$

O modelo clássico mais simples para descrever a dinâmica de doenças transmitidas diretamente, onde há interação entre indivíduos suscetíveis e infectados, é o modelo do tipo  $SI$ , representado pelo diagrama compartimental



As equações diferenciais clássicas normalizadas que descrevem essa dinâmica são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI \\ \text{com} & S + I = 1 \end{cases} \quad (12)$$

onde  $S$  é a proporção de indivíduos suscetíveis,  $I$  é a proporção de indivíduos infectados e  $\beta$  é o coeficiente de transmissão.

A solução para o modelo é obtida escrevendo-se

$$\dot{I} = \beta(1 - I)I$$

Assim, obtemos

$$I = \frac{I_0 e^{\beta t}}{S_0 + I_0 e^{\beta t}}.$$

No entanto, muitas vezes um novo caso de infecção só ocorrerá se um número mínimo de vírus for transmitido pelo hospedeiro. Deste modo, acreditamos que indivíduos com carga viral alta têm mais chance de transmitir a doença que aquele com carga baixa.

## 9.2 O Modelo *SI* Fuzzy

Os conceitos de suscetível bem como de infeccioso são incertos no sentido que há diferentes graus, tanto de suscetibilidade como de infecciosidade.

Visando incorporar essa heterogeneidade populacional, consideramos que quanto mais um indivíduo estiver infectado, maior será a **chance** de transmissão da doença. Em outras palavras, assumimos que  $\beta = \beta(v)$ , onde  $v$  é a carga viral, é uma função crescente com  $v$ . Por outro lado, espera-se que quando a carga viral é pequena não há chance de ocorrer a transmissão. Em outras palavras, admitimos que exista uma carga mínima necessária  $\nu_{\min}$  para que haja possibilidade de transmissão da doença. Além disso, a partir de uma certa carga viral  $\nu_M$ , a chance é máxima. Admitimos ainda que, a carga é limitada e deve assumir um valor máximo,  $\nu_{\max}$ .

Escolhemos, para o conjunto fuzzy  $\beta$ , a seguinte função de pertinência

$$\beta(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu \leq \nu_{\min} \\ \frac{\nu - \nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}} & \text{se } \nu_{\min} < \nu \leq \nu_M \\ 1 & \text{se } \nu_M < \nu \leq \nu_{\max} \\ 0 & \text{se } \nu > \nu_{\max} \end{cases}$$

O parâmetro  $\nu_{\min}$  representa a quantidade mínima de vírus necessária para que possa ocorrer a transmissão da doença. Este parâmetro poderia ser interpretado como o valor que dá a suscetibilidade do grupo estudado. De fato, quanto maior for o valor de  $\nu_{\min}$  maior é a quantidade necessária de vírus para que ocorra a transmissão e, isto significa que o grupo possui uma baixa suscetibilidade à doença. Em outras palavras, quanto maior for  $\nu_{\min}$ , maior é a resistência dos indivíduos suscetíveis. Já o parâmetro  $\nu_M$  representa a carga viral a partir da qual a **chance** de transmissão é máxima. Obviamente, isto não significa que de fato ocorra um novo caso.

## 9.3 Solução Fuzzy

Com a incorporação da carga viral, o sistema 12 pode ser visto como uma família de equações que têm como solução as funções

$$I(v, t) = \frac{I_0 e^{\beta(v)t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(v)t}} \quad (13)$$

para cada  $v$  fixo. Agora fixando  $t$ ,  $I(v, t)$  é um conjunto fuzzy já que  $I(v, t) \in [0, 1]$ . Assim pode-se estimar seu número “médio” em cada instante, através

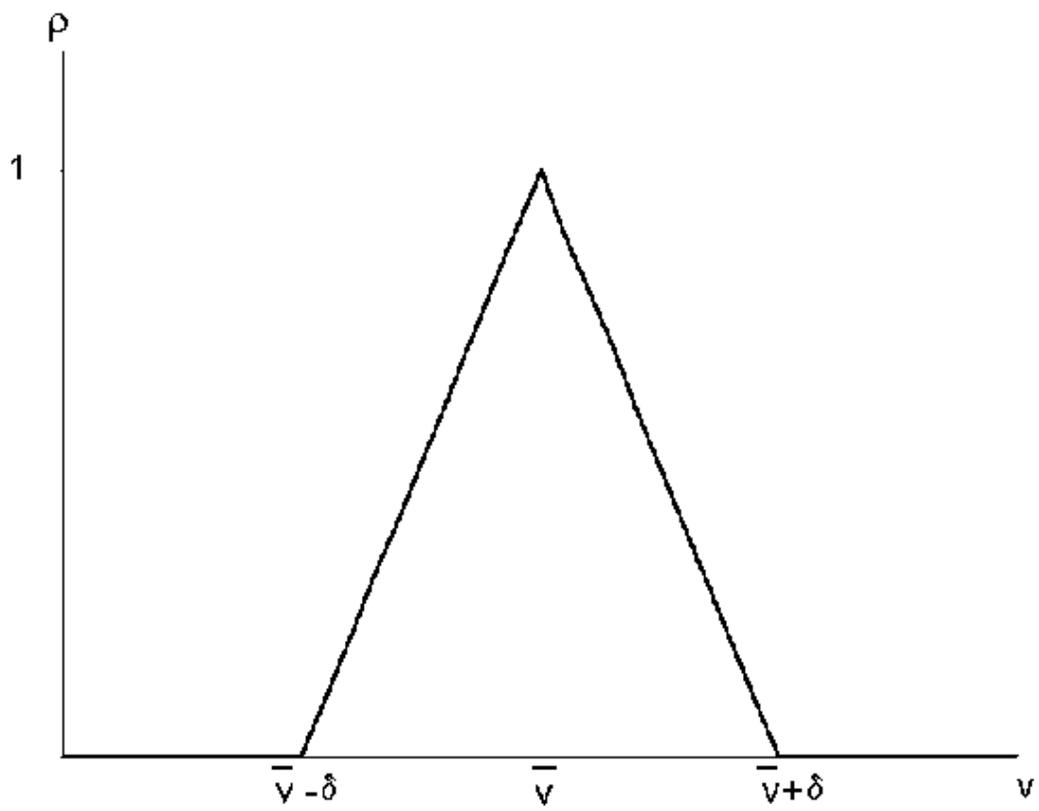


Figure 11: Coeficiente fuzzy de transmissão

do valor esperado fuzzy  $EF[I(v, t)]$ , usado aqui como um defuzificador de  $I(v, t)$ .

Para fazer uma comparação entre os modelos clássicos e fuzzy vamos calcular os números médios de infectados, através das esperanças clássica e fuzzy.

Para isto, consideramos que a carga viral  $V$  é uma variável linguística que pode ser classificada como fraca ( $V_-$ ), média ( $V_-^+$ ), forte ( $V_+$ ), sendo cada uma dessas classificações um conjunto fuzzy que tem forma triangular, de acordo com a função de pertinência da carga viral do grupo estudado:

$$\rho(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu \leq \bar{\nu} - \delta \\ \frac{1}{\delta}(\nu - \bar{\nu} + \delta) & \text{se } \bar{\nu} - \delta < \nu \leq \bar{\nu} \\ -\frac{1}{\delta}(\nu - \bar{\nu} - \delta) & \text{se } \bar{\nu} < \nu \leq \bar{\nu} + \delta \\ 0 & \text{se } \nu > \bar{\nu} + \delta \end{cases}$$

O parâmetro  $\bar{\nu}$  é um valor médio em torno do qual cada um dos conjuntos fuzzy distribui-se, enquanto  $\delta$  ( a metade da base dos triângulos), dá uma idéia da dispersão.

Os conjuntos fuzzy assumidos pela variável linguística  $V$  serão classificados baseados nos parâmetros  $\nu_{\min}$ ,  $\nu_M$  e  $\nu_{\max}$  que aparecem na definição de  $\beta$ .

## 9.4 Esperança Fuzzy do número de indivíduos infectados

Como já definido acima, a integral fuzzy, ou *esperança fuzzy* do conjunto fuzzy  $I(v, t)$  é dada por

$$EF[I(v, t)] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \text{mín}[\alpha, \mu\{I(v, t) \geq \alpha\}], \quad (14)$$

onde  $\mu\{I(v, t) \geq \alpha\}$  é a medida fuzzy do conjunto clássico  $\{v : I(v, t) \geq \alpha\} = [I(v, t)]^\alpha$ .

No nosso caso, vamos definir a medida fuzzy como  $\mu(A) = \int_A \rho(v)dv$ .

Assim, a função  $H(\alpha)$ , cujo ponto fixo é o valor  $EF[I(v, t)]$ , de acordo com o Teorema 3, é dada por

$$H(\alpha) = \mu\{I(v, t) \geq \alpha\} = \int_{-\infty}^{+\infty} I(v, t)dv = -\mu\{I(v, t) < \alpha\}.$$

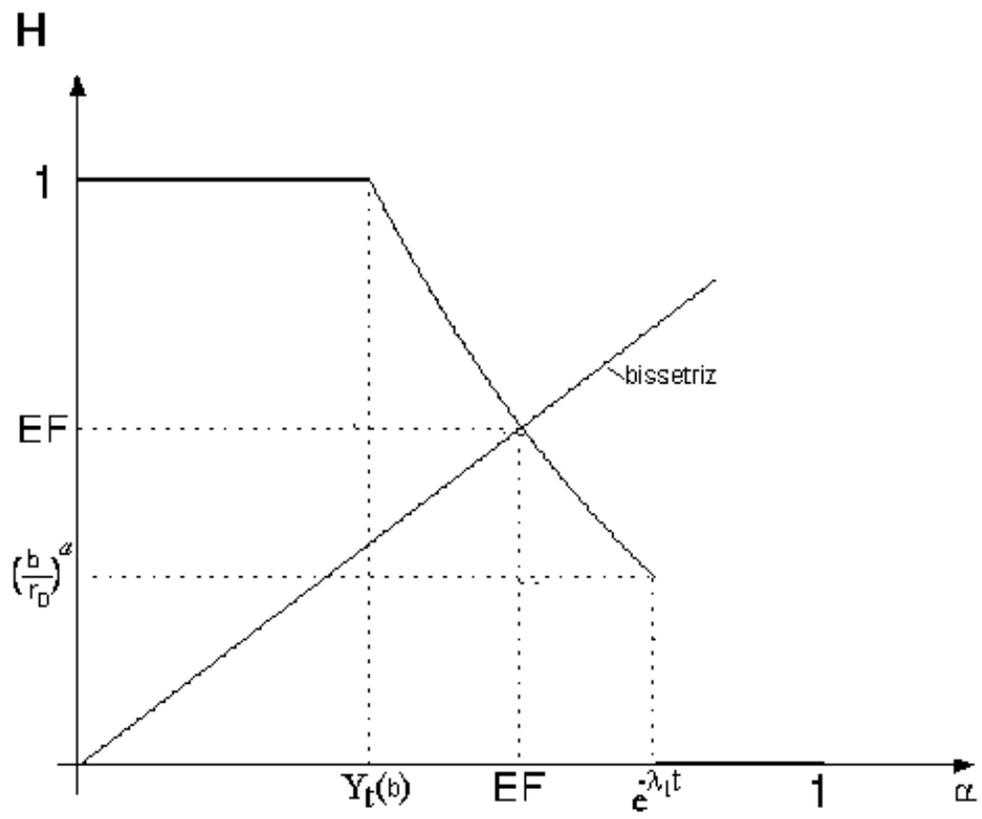


Figure 12: Distribuição da carga viral

Primeiro, observamos que  $H(0) = 1$  e  $H(1) = 0$ .

Para  $0 < \alpha < 1$ , temos

$$\begin{aligned}
H(\alpha) &= 1 - P\{v : I(v, t) < \alpha\} = 1 - P\{v : \beta(v) < \ln\left(\frac{\alpha k}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{i}}\} = \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se } \ln\left(\frac{\alpha k}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{i}} \leq 0 \\ P\{v \in [0, A]\} & \text{se } 0 < \ln\left(\frac{\alpha k}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{i}} < 1 \\ 0 & \text{se } \ln\left(\frac{\alpha k}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{i}} \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq I_0 \\ P\{v \in [0, A]\} & \text{se } I_0 < \alpha < \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0 & \text{se } \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \leq \alpha \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

onde  $A = v_{\min} + (v_M - v_{\min}) \ln\left(\frac{\alpha k}{1 - \alpha}\right)^{\frac{1}{i}}$ .

A fim de exemplificar os casos onde a carga viral é fraca, forte ou média, vamos calcular  $EF[I(v, t)]$  para três diferentes casos:

**caso a) Carga viral fraca ( $V_-$ ):** Neste caso, tomamos  $\nu_{\min} > \bar{\nu} + \delta$   
Como  $A > v_{\min}$ , temos  $P\{v \in [0, A]\} = 1$  e assim,

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq I_0 \\ 0 & \text{se } I_0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

portanto

$$EF[I(v, t)] = I_0.$$

Este resultado está em acordo com o fato de que, nesta faixa,  $\beta(v) = 0$ .

**caso b) Carga viral forte ( $V_-^+$ ):** Neste caso, tomamos  $\nu_M < \bar{\nu} - \delta$  e  $\bar{\nu} + \delta < v_{\max}$ .

Para esta situação, como  $A < v_M$ , obtemos  $P\{v \in [0, A]\} = 0$ , logo

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0 & \text{se } \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e, portanto

$$EF[I(v, t)] = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}.$$

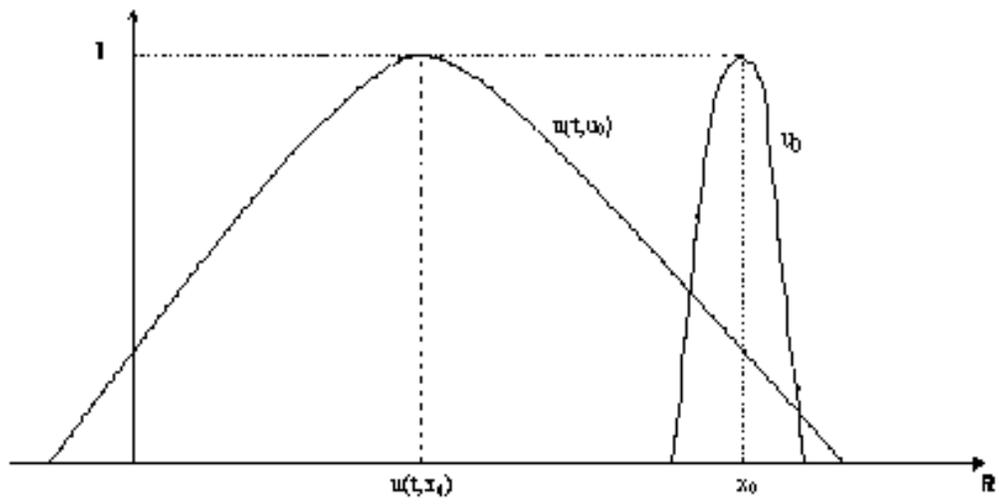


Figure 13: Disposição de cargas virais

Novamente neste caso, obtemos a solução clássica quando  $\beta = 1$ .

**caso c) Carga viral média ( $V_+$ ):** Neste caso tomamos  $\bar{\nu} - \delta > \nu_{\min}$  e  $\bar{\nu} + \delta < \nu_M$

Um cálculo direto nos leva a

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq I(\bar{\nu} - \delta, t) \\ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{A - \bar{\nu}}{\delta} + 1 \right)^2 & \text{se } I(\bar{\nu} - \delta, t) < \alpha \leq I(\bar{\nu}, t) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\nu} - A}{\delta} + 1 \right)^2 & \text{se } I(\bar{\nu}, t) < \alpha \leq I(\bar{\nu} + \delta, t) \\ 0 & \text{se } I(\bar{\nu} + \delta, t) < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

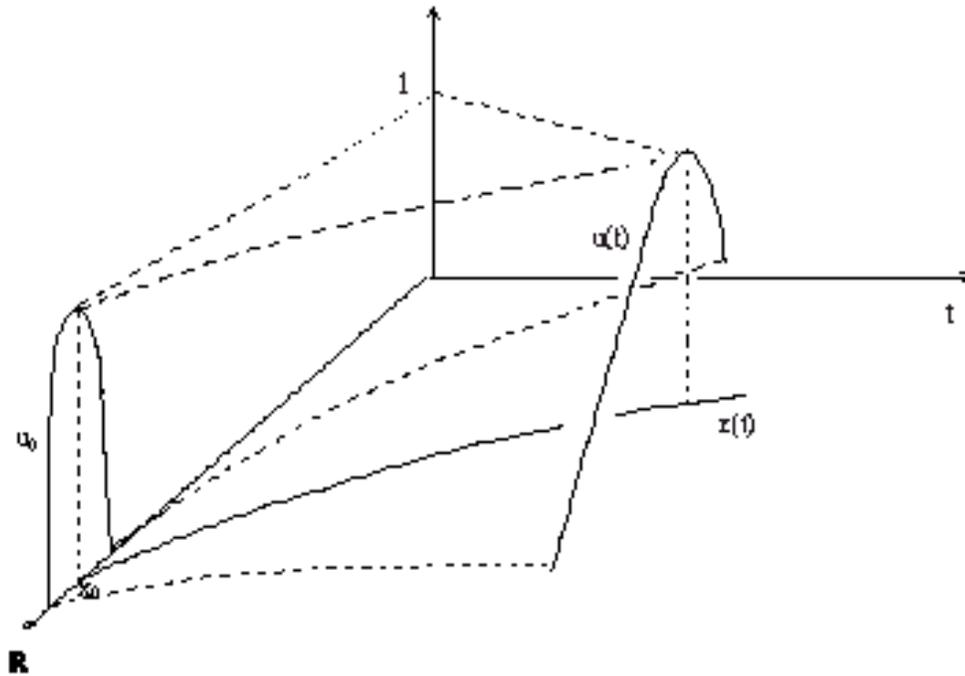


Figure 14:  $H(\alpha)$  para carga viral média

De acordo com a expressão e o gráfico acima conclui-se que  $H(\alpha)$  é contínua e decrescente e, assim,

$$I(\bar{\nu} - \delta, t) \leq EF[I(v, t)] \leq I(\bar{\nu} + \delta, t)$$

Portanto, se não houver controle da doença, ou seja, enquanto houver suscetível e  $\bar{\nu} - \delta - v_{\min} > 0$ , o número médio de infectados crescerá já que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EF[I(v, t)] \geq \lim_{t \rightarrow \infty} I(\bar{\nu} - \delta, t) = 1$$

Por outro lado, a doença poderá ser controlada por  $I(\bar{\nu} + \delta, t)$ , ou seja, fazendo  $\bar{\nu} + \delta - v_{\min} \leq 0$ , o número médio de infectados não crescerá pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EF[I(v, t)] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} I(\bar{\nu} + \delta, t) = I_o$$

#### 9.4.1 Esperança Clássica do número de infectados

Com o parâmetro  $\beta$  modelado pelo conjunto fuzzy acima, a esperança do número de indivíduos infectados,  $E(I(v, t))$ , é dada por

$$E(I(v, t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(v, t) \rho(\nu) d\nu = \int_{\bar{\nu}-\delta}^{\bar{\nu}+\delta} I(v, t) \rho(\nu) d\nu, \quad (15)$$

pois para valores de  $\nu$  fora do intervalo  $[\bar{\nu} - \delta, \bar{\nu} + \delta]$ , temos  $\rho(\nu) = 0$  e, assim,

$$I(\bar{\nu} - \delta, t) \leq E(I(v, t)) \leq I(\bar{\nu} + \delta, t).$$

Portanto, se não houver controle da doença, ou seja, enquanto houver suscetível e  $\bar{\nu} - \delta - v_{\min} > 0$ , novamente o número médio de infectados crescerá já que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(I(v, t)) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} I(\bar{\nu} - \delta, t) = 1.$$

Por outro lado, a doença poderá ser controlada por  $I(\bar{\nu} + \delta, t)$ , ou seja, fazendo  $\bar{\nu} + \delta - v_{\min} \leq 0$ , o número médio de infectados não crescerá pois, neste caso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(I(v, t)) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} I(\bar{\nu} + \delta, t) = I_o.$$

Como existem várias possibilidades para calcularmos a esperança em função dos parâmetros, escolhemos os três casos particulares já analisados na esperança fuzzy:

**caso a)**  $\nu_{\min} > \bar{\nu} + \delta$

Nesta situação, para todos os indivíduos infectados o coeficiente de transmissão  $\beta(\nu)$  é nulo. Substituindo  $\beta(\nu) = 0$  e  $I(v, t)$  dado por (13) em (15), obtemos:

$$E(I(v, t)) = \int_{\bar{\nu}-\delta}^{\bar{\nu}+\delta} I(v, t)\rho(\nu)d\nu = I_0.$$

Portanto, como todos os indivíduos infectados apresentam carga viral abaixo de  $\nu_{\min}$  (nenhum indivíduo possui a carga mínima necessária para que ocorra a transmissão), não ocorre a propagação da doença. Poderíamos interpretar essa situação como a de um grupo altamente resistente ( $\nu_{\min}$  é alto), que faz com que a suscetibilidade seja muito baixa. Neste caso a quantidade de infectados permanece inalterada  $I_0$ .

**caso b)**  $\nu_M < \bar{\nu} - \delta$  e  $\bar{\nu} + \delta < \nu_{\max}$ .

Neste caso, o coeficiente de transmissão é máximo para todos os indivíduos infectados, isto é  $\beta(\nu) = 1$ . Após efetuar os cálculos, obtemos

$$E(I(v, t)) = \int_{\bar{\nu}-\delta}^{\bar{\nu}+\delta} I(v, t)\rho(\nu)d\nu = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}.$$

Observe que a expressão acima coincide com a solução clássica do modelo quando consideramos o coeficiente de transmissão constante, isto é  $\beta = 1$ .

**caso c)**  $\bar{\nu} - \delta > \nu_{\min}$  e  $\bar{\nu} + \delta < \nu_M$

Nesta situação o coeficiente de transmissão é variável para todos os indivíduos infectados. Toda a distribuição de  $\nu$  está na região onde  $\beta(\nu) = \frac{\nu - \nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}}$ .

A esperança matemática é dada por:

$$\begin{aligned} E(I(v, t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} I(v, t)\rho(\nu)d\nu = \int_{\bar{\nu}-\delta}^{\bar{\nu}+\delta} I(v, t)\rho(\nu)d\nu \\ &= \int_{\bar{\nu}-\delta}^{\bar{\nu}} I(v, t)\rho(\nu)d\nu + \int_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}+\delta} I(v, t)\rho(\nu)d\nu \end{aligned}$$

Após substituir as expressões para  $I(v, t)$  e  $\beta(\nu)$ , obtemos uma aproximação para

$$E(I(v, t)) = \frac{1}{(a\delta)^2} \frac{I_0}{S_0} e^{(b+a\bar{v})t} [-2 + 2 \cosh(a\delta t)] - \frac{1}{2} \frac{I_0}{S_0} e^{(b+a\bar{v})t} (-1 + \cosh(2a\delta t))$$

onde  $a = \frac{1}{\nu_M - \nu_{\min}}$  e  $b = \frac{-\nu_{\min}}{\nu_M - \nu_{\min}}$ .

A expressão acima foi obtida a partir da integração por partes e considerando a série de Taylor até segunda ordem da função  $\ln x$ .

Para finalizar esta secção queremos ressaltar que, diferentemente da Esperança Cássica, poderíamos ter utilizado outras medidas fuzzy para obter a Esperança Fuzzy. Esta possibilidade de escolher diferentes medidas, de acordo com o fenômeno estudado, é que torna a esperança fuzzy com grande poder de aplicação. Por exemplo, poderíamos ter utilizado a seguinte **medida de possibilidade**

$$\mu(A) = \sup_{v \in A} \rho(v).$$

A nosso ver, esta é uma medida bem razoável para ser adotada no nosso exemplo uma vez que apresenta um caráter conservador no seguinte sentido: um grupo(A) de indivíduos infectados é avaliado por aquele indivíduo deste grupo com maior carga viral. O número médio de indivíduos infectados, isto é,  $EF[I(v, t)]$  poderia ser avaliado com essa medida conservadora para, a partir daí, se tomar alguma medida de controle da doença. Queremos ressaltar que, especificamente para esta medida de possibilidade, chegamos a conclusões bem semelhantes às dos casos **a)**, **b)** e **c)** analisados acima onde a função  $H$  passa a ser

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \alpha \leq I_0 \\ \sup_{v \in [A, v_{\max}]} \rho(v) & \text{se } I_0 < \alpha \leq \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0 & \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e  $EF[I(v, t)]$  é o ponto fixo da função  $H$ .

## 10 Solução da média ( $I(EF[V], t)$ ) x média das soluções ( $EF[I(V, t)]$ )

Nesta secção vamos comparar a curva  $EF[I(V, t)]$  com a trajetória  $I(EF[V], t) = I(\bar{v}, t)$  para os casos **a)**, **b)** e **c)** estudados acima.

Da expressão de  $H$  nós podemos concluir que  $H(I(\bar{v}, t)) = \frac{1}{2}$  para todo  $t$ . Assim  $EF[I(V, t)] = I(\bar{v}, t)$  apenas quando  $I(\bar{v}, t) = \frac{1}{2}$ .

Por outro lado, uma vez que  $EF[I(V, t)]$  é o ponto fixo  $H$  temos

$$EF[I(V, t)] > I(\bar{v}, t) \quad \text{se} \quad I(\bar{v}, t) < \frac{1}{2}$$

$$EF[I(V, t)] < I(\bar{v}, t) \quad \text{se} \quad I(\bar{v}, t) > \frac{1}{2}.$$

Desta forma, a trajetória devido à carga média  $I(\bar{v}, t)$ , não produz o número médio de indivíduos infectados ( dado por  $EF[I(V, t)]$  ) em cada instante. Assim, a nosso ver, não é correto adotar a carga média (  $\bar{v}$  ) para estudar a evolução da doença na população como um todo, já que  $EF[I(V, t)] = I(\bar{v}, t)$  apenas no instante  $\bar{t} = \frac{v_M - v_{\min}}{\bar{v} - v_{\min}} \ln(\frac{S_0}{I_0})$ ,  $S_0 \geq I_0$ . Observemos que em  $\bar{t}$  é o ponto de inflexão de  $I(\bar{v}, t)$  e que  $I(\bar{v}, \bar{t}) = \frac{1}{2}$ . Isto é, no instante  $\bar{t}$  o incremento da taxa de crescimento de  $I(\bar{v}, t)$  é maior que  $I(\bar{v}, \bar{t}) = \frac{1}{2}$ . Ver Figura 15 abaixo

A partir da desigualdade de Jensen, nós obtemos conclusões semelhantes às comentadas acima para a esperança clássica,  $E(I(V, t))$ , mudando apenas o instante  $\bar{t}$  em que a curva  $I(\bar{v}, t)$  supera  $E(I(V, t))$ .

Estes fatos revelam que, para sistemas heterogêneos, momentos distintos em que as incertezas são retiradas de modelo podem levar diferentes avaliações para o sistema como um todo.

A adoção do **modelo determinístico** para se estudar a evolução do sistema acima nos leva a adotar  $I(\bar{v}, t)$  como solução pois, neste caso, toda a incerteza deve ser retirada já no início do modelo. Por outro lado, o **modelo fuzzy** permite que as incertezas, neste caso inerente ao fenômeno, sejam retiradas em um momento(futuro) desejado, obtendo  $EF[I(V, t)]$  ( ou  $E(I(V, t))$  ) o que é mais representativo para o sistema como um todo.

## 10.1 Valor de Reprodutibilidade Basal

Para os modelos epidemiológicos clássicos, um parâmetro essencial é o *valor de reprodutibilidade basal*,  $R_0$ , que dá o número de casos secundários causados por um indivíduo infectado que é introduzido numa população inteiramente suscetível. Dessa forma, esse parâmetro indica sob quais condições a doença se propaga na população. Se um indivíduo infectado consegue provocar mais que um novo caso (isto é  $R_0 > 1$ ) então a doença se propaga. Por outro lado,

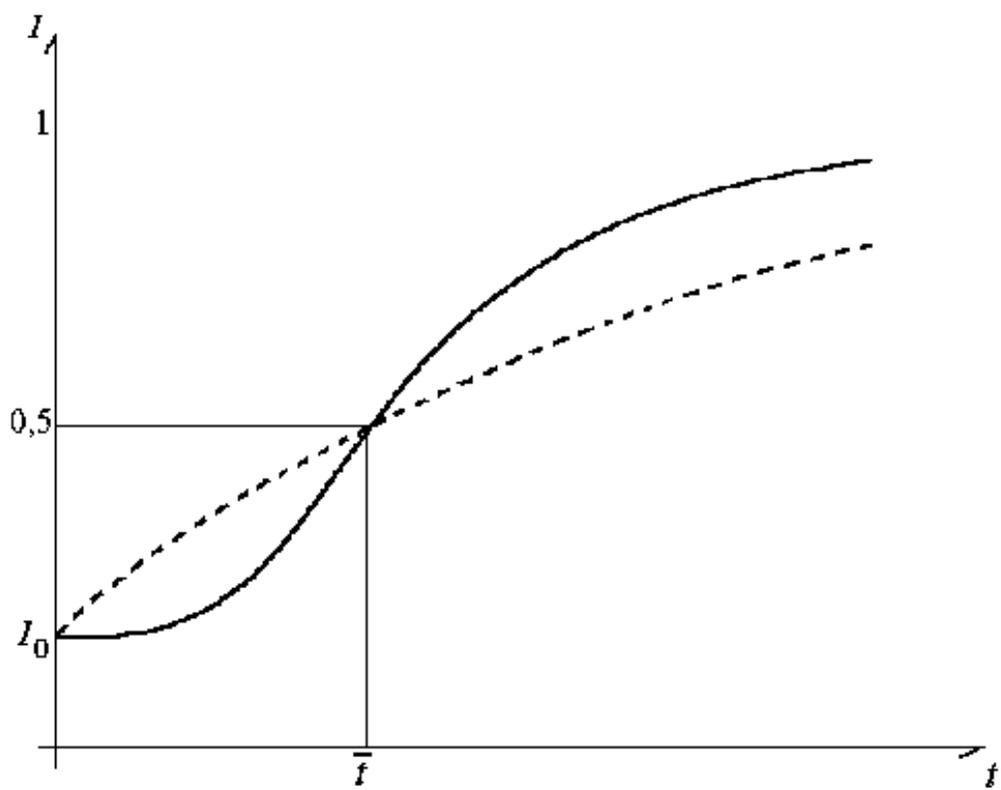


Figure 15:  $EF[I(V, t)]$  linha tracejada e  $I(\bar{v}, t)$  linha contínua.

quando  $R_0 < 1$  então a doença se extingue. Para os modelos epidemiológicos mais simples, a expressão para esse parâmetro pode ser obtida a partir da condição  $dI/dt > 0$ , que é a condição para que ocorra acréscimo no número de infectados. Dessa forma, para o modelo  $SI$  clássico, teríamos

$$\frac{dI}{dt} > 0 \iff \beta SI = \beta(1 - I)I > 0$$

que é satisfeito até que existam indivíduos suscetíveis na população, pois  $\beta > 0$ . Em outras palavras, teremos  $R_0 < 1$  sempre que  $\beta > 0$  e  $I < 1$ . Porém, quando utilizamos um conjunto fuzzy para descrever o parâmetro  $\beta$  isto pode não ocorrer. No nosso caso, de acordo com a análise feita acima, é fácil verificar que a condição suficiente para que não ocorra a transmissão da doença é que nenhum indivíduo infectado possua a carga mínima necessária para transmitir a doença. Ou seja, a condição  $\bar{\nu} + \delta < \nu_{\min}$  deve ser satisfeita. Esta expressão foi obtida também a partir das esperanças fuzzy em (14) e clássica em (15).

Poderíamos assim, definir o *valor de reprodutibilidade basal fuzzy* para o nosso modelo como

$$R_0^{\text{fuzzy}} = \frac{\bar{\nu} + \delta}{\nu_{\min}}.$$

Como na modelagem clássica, as medidas de controle e prevenção visam reduzir o valor do parâmetro  $R_0$  (de tal forma que  $R_0 < 1$ ) para que a doença não se propague. Neste modelo  $SI$  isso não seria possível, visto que a variação dos indivíduos infectados é sempre positiva, como vimos acima.

Já se for considerado  $\beta$  fuzzy, mesmo esse modelo simplista dá informações adicionais à dinâmica da doença. Por exemplo, é possível interferir na dinâmica da doença reduzindo o valor do parâmetro  $R_0^{\text{fuzzy}}$ . Isto pode ser feito de duas formas: aumentado-se o valor de  $\nu_{\min}$ . Isto significa que deve haver aumento da resistência dos indivíduos suscetíveis (baixar a suscetibilidade) o que poderia ser feito, por exemplo, através de vacinação, saneamento básico, etc. Nesse sentido, pelo fato do parâmetro  $\nu_{\min}$  estar relacionado aos indivíduos suscetíveis, essa forma de diminuir  $R_0$  refere-se à medidas de **controle**. A outra opção para reduzir  $R_0$  seria diminuir o valor de  $\bar{\nu} + \delta$ , diminuindo  $\bar{\nu}$  ou  $\delta$ . A diminuição de  $\delta$  poderia se dar através de medidas de controle na população infectada, como por exemplo, isolamento. A diminuição de  $\bar{\nu}$  está relacionada à medidas de **tratamento**.

## 10.2 Discussão

Os casos analisados correspondem a valores de  $\bar{v}$  específicos. Ou seja, uma vez conhecida a carga viral  $V$  na população, e conseqüentemente, o valor de  $\bar{v}$ , encontramos a esperança fuzzy e clássica (quando  $\rho(v)$  é uma distribuição) do número de indivíduos infectados.

Entretanto, dependendo da situação e da doença, pode ser razoável supor que a própria carga viral  $V$  varie. Em outras palavras, supondo, por exemplo, que sob certas condições a carga viral varie com o tempo,  $V = f(t)$ , em cada instante  $t$  teremos um conjunto fuzzy e o  $\bar{v}$  correspondente (pode ser interessante supor que  $V$  varia com outros fatores, como promiscuidade, grau de resistência, imunização, etc.).

A escolha para a função  $f(t)$  depende do comportamento particular de cada doença. Podemos ter, por exemplo: uma função crescente quando o ambiente favorece a proliferação do agente infeccioso; uma função decrescente quando o ambiente é hostil ao agente infeccioso; uma função periódica quando o agente infeccioso varia sazonalmente devido à fatores climáticos (como temperatura e umidade).

Portanto, a escolha para a função  $f(t)$  não depende exclusivamente da doença em questão mas também do ambiente e da população onde o agente infeccioso é introduzido.

## 11 Comentários Finais

Neste texto nós procuramos fazer uma pequena introdução de atuação da Teoria Fuzzy em situações provenientes de fenômenos biológicos.

As Secções 1 e 2 estão relacionadas com a teoria dos conjuntos fuzzy, propriamente dita. Na Secção 3 apresentamos as relações fuzzy, estendendo as relações clássicas e relacionando-as com a Teoria de Lógica Matemática, por meio de Implicações Fuzzy, que permitem a aplicação vista na Secção 4. Os assuntos das três primeiras secções também fornecem os subsídios para a Teoria de Controle Fuzzy. Um exemplo de controlador fuzzy que simula a freada de um veículo, a partir de informações imprecisas, pode ser encontrada em Ribacionka [14]. A Secção 5 trata de relacionar a Teoria Fuzzy com Teoria da Medida e, conseqüentemente com a Teoria Estatística. A Secção 6 trata de uma aplicação da Teoria Fuzzy usando Equação Diferencial no sentido clássico. A Secção 7 diz respeito à Teoria de Equações Diferenciais Fuzzy para

modelar Sistemas Dinâmicos e a Secção 8 trata de Sistemas Dinâmicos Fuzzy Discretos. Na Secção 9 fazemos um introdução ao estudo de Epidemiologia usando ferramenta da Teoria Fuzzy.

A Teoria Fuzzy está, portanto, em franco crescimento e, procurando re-fazer várias interpretações nas subáreas da Teoria dos Conjuntos, Lógica Matemática, Análise, Estatística, Sistemas Dinâmicos, Teoria de Controle etc.

Sem querer defender a volta do ensino da Teoria dos Conjuntos nas escolas de segundo grau, que parece ter trazido mais malefícios que vantagens, já que, nas décadas de sessenta e setenta, se deu em detrimento de tópicos tão importantes, como geometria; parece que a Teoria dos Conjuntos reaparece com força ainda maior, devido, principalmente seu aspecto de interdisciplinaridade.

Do ponto de vista pedagógico, não acreditamos e também não temos informação se os países mais avançados tecnologicamente estão novamente dando ênfase à Teoria de Conjuntos no ensino médio. Porém, em cursos mais avançados, este assunto vêm ganhando força substancial nas Universidades e Institutos de Pesquisa, como é o caso dos Estados Unidos e principalmente o Japão, que foi o pioneiro na utilização da teoria fuzzy em eletrodomésticos, ainda na década de 80.

Para finalizar queremos dizer que, diante das inúmeras aplicações que a Teoria Fuzzy tem tido na tecnologia para a produção de bens de consumo e, de um modo mais geral, em vários ramos da matemática aplicada, talvez seja o momento para reintroduzir a Teoria de Conjuntos nos cursos de graduação em Matemática.

## References

- [1] Barros, L.C.; Bassanezi, R.C. *Um exemplo de modelagem de fenômenos incertos - E. D. fuzzy*. Revista de Biomatemática, Vol 5: 121-128. IMECC-UNICAMP, XVII CNMAC (1995).
- [2] Barros, L.C. *Modelos Determinísticos com Parâmetros Subjetivos*-Tese de Mestrado-IMECC-UNICAMP (1992).
- [3] Barros, L.C. *Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy - Teoria e Aplicações*-Tese de Doutorado - IMECC-UNICAMP (1997).

- [4] Bassanezi, R.C.; Barros, L.C. *A simple model of life expectancy with subjective parameters*. Kibernetes: Int. Jour. of Systems and Cybernetics 24, Vol. 9: 91-98. (1995).
- [5] Bassanezi, R.C.; Roman, H.E.- *Relaciones Fuzzy: Optimizacion de Diagnostico Medico*-IMECC-UNICAMP (1989).
- [6] Dubois, D.; Prade, H., Sessa, S. *Recent Literature*. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 100: 381-386. (1998).
- [7] Gomide, F.; Pedrycz, W. - *An Introduction to Fuzzy Sets-Analysis and Design*, Masachusets Institute of Technology (1998).
- [8] Klir, G.; Yuan, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications*, Prentice-Hall (1995).
- [9] Leite, M.B.F. *Heterogeneidade Populacional e Fatores Abióticos na Dinâmica de uma Epidemia*. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP. (1999).
- [10] Ortega, N.R.S. *Aplicação da Teoria de Lógica Fuzzy a Problemas da Biomedicina*-Tese de Doutorado-IF-USP (2001).
- [11] Ortega, N R.S.; Sallum, P.C.; Massad, E. *Fuzzy Dynamical Systems in Epidemic Modelling*. Kibernetes: Int. Jour. of Systems and Cybernetics. to appear (1999)
- [12] Puri, M.L.; Ralescu, D.A.-*Diferential of Fuzzy Functions* - Journ. Math. Analysis and Applications, 91, 552-558 (1983).
- [13] Puri, M.L.; Ralescu, D.A.-*Fuzzy Random Variables* - Journ. Math. Analysis and Applications, 114,409-422 (1986).
- [14] Ribacionka, F.-*Sistemas Computacionais Baseados em Lógica Fuzzy* - Tese de Mestrado-Universidade Mackenzie (1999).
- [15] Sugeno, M. - *Theory of fuzzy integral and its applications* - Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology (1974).
- [16] Zadeh, L.A. *Fuzzy Sets*-Inform. and Control 8, 338-353 (1965).
- [17] Zadeh, L.A. *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*.-Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1:3-28. (1978).