1. Se R é uma relação binária fuzzy no conjunto U e Δ é uma norma triangular qualquer, podemos definir a composição segundo Δ como $R \circ_\Delta R(x,z) = \bigvee R(x,y)\Delta R(y,z)$.
a) Mostre que $R \circ_\Delta R(x,z) \leq R \circ R(x,z)$. onde $R \circ R$ é a composição com a t-norma do mínimo.
b) Se a relação R for dada por

$$R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Calcule as composições $R \circ_\Delta R$ e $R \circ R$.
2. Considere as seguintes t-normas

- $x\Delta_1 y = x.y$
- $x\Delta_2 y = (x+y-1) \vee 0$
- $x\Delta_3 y = x \wedge y$

a)Para cada uma destas t-normas ache as t-conormas que junto com a negação $\eta(x) = 1-x$ definem um sistema de De Morgan.
b) Para cada uma das t-normas acima calcule as implicações residuais.
3. Considere a t-norma do mínimo e a implicação fuzzy dada pela fórmula:

$$x \implies y = (1-x) \vee y \tag{2}$$

e sejam $A \in \mathcal{F}(U)$ e $B \in \mathcal{F}(V)$ dois conjuntos fuzzy tal que $[A]^1 \neq \emptyset$. Verifique se a relação $R(x,y) = A(x) \implies B(y)$ satisfaz a equação abaixo:

$$B = R \circ A \tag{3}$$

4. Usaremos agora as seguintes t-norma e implicação para a regra de "Modus Ponens" generalizada.

$$x\Delta y = x \wedge y \tag{4}$$

$$x \implies y = \bigvee \{z : x \wedge z \leq y\} \tag{5}$$

Também consideramos as famílias de números fuzzy:

$$A_n(x) = \begin{cases} x-n+1 & \text{se } n-1 \leq x \leq n \\ -x+n+1 & \text{se } n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{6}$$

a) traduza a regra: Se A_2 então A_5 para uma relação fuzzy $R(x,y)$.
b) Use a regra "modus ponens" generalizada para inferir qual o resultado se o precedente fosse A_3.