1. Considere o sistema de controle no espaço de estados $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x + B \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ache a matriz de controlabilidade Q_T quando:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. No sistema linear invariante no tempo: $\dot{x} = Ax + Bu$, definimos

$$\mathcal{A}(x_0, T) = \{\phi(T, 0, x_0, u(.)) : u(.) \in \mathcal{U}\}$$

mostre que $\mathcal{A}(x_0, T_1) \subset \mathcal{A}(x_0, T_2)$ se $T_1 \leq T_2$.

3. Mostre que se para um determinado $T > 0$, a matriz de controlabilidade Q_T não é invertível então nenhum elemento do núcleo de Q_T pode ser acessível em tempo T a partir do vetor nulo.

4. No sistema de controle $\dot{x} = Ax + Bu$ com $x \in \mathbb{R}^n$, assuma que a matriz B tenha posto n e seja B^+ a matriz inversa a direita de B que satisfaz $BB^+ = I$. Mostre que o controle

$$u(s) = \frac{1}{T} B^+ \mathrm{e}^{(s-T)A}(b - \mathrm{e}^{TA} a) \text{ com } s \in [0, T]$$

transfere o estado a para o estado b em tempo T.

5. No sistema de controle:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \tag{2}$$

Dê uma descrição de $\mathcal{A}(0, 1)$. Quais são os pontos atingíveis a partir de $(1, 0, 1)$ em tempo $T = 1$. O que acontece trocarmos a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ por } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$