Segunda prova de MAP2110-Respostas — P2

1. Dada a permutação σ abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Escreva esta permutação na forma de Cauchy, isto é, identificando os ciclos. Qual é a paridade de σ? Com justificativa, é claro.

RESPOSTA: a) $\sigma = (12)(457) = (12)(47)(45)$. Como a permutação é composta por três transposições é **impar**.

2. Sejam a e b dois números reais diferentes de zero. Calcule o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a+b & a+2b & a+3b & a+4b \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

RESPOSTA: Usando as propriedades dos determinantes temos que

$$\mathbf{det}(A) = a. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3a$$

3. Achar a matriz adjunta de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

RESPOSTA:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Seja $v_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $v_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ e $v_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ três vetores mutuamente ortogonais e não nulos. Considere a matriz A onde cada coluna j é composta pelas coordenadas de v_j. Esta matriz é invertível? Quanto dá $A.A^t$? *Argh! Deveria ser $A^t.A$, vou considerar só a primeira parte!*

RESPOSTA:

$$A^t.A = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & 0 & 0 \\ 0 & < v_2, v_2 > & 0 \\ 0 & 0 & < v_3, v_3 > \end{pmatrix}$$

Cada um dos elementos da diagonal é estritamente positivo. Assim $\det(A^t.A) = \det(A)^2 = (||v_1||||v_2||||v_3||)^2 > 0$ como $\det A \neq 0$ ela é invertível.

5. Achar todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ que sejam simultaneamente ortogonais a $\vec{a} = (1, 2, 0)$ e $\vec{b} = (1, 0, 1)$.

RESPOSTA: São todos os vetores da forma $\alpha.(1, -0.5, -1)$.

6. Dado o vetor $\vec{a} = (\cos(t), \sin(t), t)$. Qual é a norma deste vetor. Qual é o valor do parâmetro $t > 0$ para que o ângulo entre o vetor $\vec{a}$ e o vetor canônico $\vec{k} = (0, 0, 1)$ seja $\pi/3$?

RESPOSTA: $||\vec{a}|| = \sqrt{1+t^2}$ e $t = \sqrt{3}/3$.