Primeira prova de MAP2110 - Resolução P1

Gabarito:

1. Encontrar os valores de x, y e z que satisfazem as equações:

$$2x^2 + y + z = 11 \tag{1}$$
$$x^2 + 3y - z = 9 \tag{2}$$
$$2y + 2z = 6 \tag{3}$$

Solução: Podemos resolver de várias formas o sistema linear acima obtendo: $x^2 = 4$, $y = 2$ e $z = 1$. Temos duas soluções $(2, 2, 1)$ ou $(-2, 2, 1)$.

2. Seja α um número diferente de zero. Calcule a inversa da matriz A abaixo e escreva a decomposição da inversa como produto de matrizes elementares.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Solução: é fácil verificar que a matriz A se escreve como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Então a matriz inversa é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

3. Considere as seguintes aplicações lineares:

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + z \\ y + z \end{pmatrix} \text{ e } G \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v + w \end{pmatrix} \tag{8}$$

Qual é a matriz que representa a aplicação linear composta $G \circ F$? Esta aplicação é injetora?
Solução:
A matriz de F é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, a matriz de G é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz da composta é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A composta não é injetora pois a imagem dos vetores $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ é o mesmo vetor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Uma solução da equação linear

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

é $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e uma solução da equação homogênea associada é $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ache a matriz A e todas as soluções da equação (9).

Solução: Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, como

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ temos } A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Temos ainda que

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ então } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A solução do sistema são todos os vetores da forma $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Suponha que A e B são matrizes invertíveis 2×2. Com elas e mais uma outra matriz C, também 2×2 construimos a matriz 4×4

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Esta matriz também é invertível. Dê a fórmula da inversa desta matriz em função de A, B e C.

Solução: A inversa da matriz também é uma matriz de blocos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \text{ onde } X = -A^{-1}CB^{-1}$$

6. Uma matriz A de dimensão 3×3 tem como inversa a própria transposta, ou seja, $A^tA = I$. Suponha que os vetores $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ sejam respectivamente soluções de

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } Ay = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Mostre então que vale

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

Solução Da relação $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ temos que $x = A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Isto significa que o vetor x é a primeira coluna da transposta de A ou x^t é a primeira linha de A. Da mesma forma a relação

$Ay = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ implica que $y = A^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e daí y é a segunda coluna da matriz A^t.
Basta agora notar que

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = x^t.y$$

é a primeira linha de A vezes a segunda coluna de A^t, e como $AA^t = I$ aquele número é zero.