Cada questão vale dois pontos. Sua nota será a soma das CINCO melhores questões

1. Considere as funções:

$$f(x) = 1 - x \text{ e } g(x) = \frac{x^3+1}{2}$$

e a equação:

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

Quantas soluções tem esta equação? Localize e encontre uma solução usando o método de Newton.

A equação 1 é equivalente a $x^3 + 2x - 1 = 0$. Chamando $h(x) = x^3 + 2x - 1$ temos que $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. Sendo $h(x)$ crescente tem uma única raiz real no intervalo $[0, 1]$ pois $h(0) = -1$ e $h(1) = 2$.

Para aplicar o método de Newton: $\phi(x) = x - (x^3 + 2x - 1)/(3x^2 + 2)$ $x_0 = 0.5$, $x_1 = 0.4545455$, $x_2 = 0.4533983$, $x_3 = 0.4533977$, $x_4 = 0.4533977$.

2. Resolva o sistema linear abaixo usando o método da eliminação de Gauss com pivotação.

$$\begin{aligned} y + 2z &= 4 \quad (2)\\ x + 2y - z &= -6 \quad (3)\\ 2x - y + 3z &= 13 \quad (4) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2. & -1. & 3. & 13. \\ 0.5 & 2.5 & -2.5 & -12.5 \\ 0. & 1. & 2. & 4. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2. & -1. & 3. & 13. \\ 0.5 & 2.5 & -2.5 & -12.5 \\ 0. & 1. & 2. & 4. \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2. & -1. & 3. & 13. \\ 0.5 & 2.5 & -2.5 & -12.5 \\ 0. & 0.4 & 3. & 9. \end{pmatrix}$$

A solução é $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

3. Uma matriz, A, admite uma decomposição em fatores LU onde a matriz triangular superior U é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Sabendo ainda que a solução do sistema linear

$$A. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

é $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$, encontre uma matriz triangular inferior, L da decomposição e uma matriz A que satisfaça as condições acima.

Basta resolver a equação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

daí temos $a = 1$ e $2b + 3c = 5$. Uma possibilidade é:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Faça a tabela de diferenças divididas e ache o polinômio interpolador na forma de Newton da seguinte tabela .

x	-4	-2	1	2	5
y	11	1	1	5	29

$$\begin{array}{c||ccccccccc}
x & -4 & & -2 & & 1 & & 2 & & 5 \\
\hline
y & 11 & & 1 & & 1 & & 5 & & 29 \\
 & & -5 & & 0 & & 4 & & 8 & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

$p(x) = 11 - 5(x + 4) + 1(x + 4)(x + 2)$

x	-1	0	2
y	1	1	5

Tabela 1: Questão 5

5. Com relação à tabela 1abaixo, achar uma família, $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ de três polinômios ortogonais de grau menor ou igual a dois. Em seguida, encontrar o polinômio de grau menor ou igual a dois que se ajuste a tabela pelo método dos mínimos quadrados.
$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - 1/3$, $P_2(x) = x^2 - (8/7)x - 9/7$.
A o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor se ajusta pelo MMQ a tabela é $q(x) = (2/3)x^2 + (2/3)x + 1$

6. Use o método de Simpson com duas repetições para calcular a integral

$$\int_0^2 \mathrm{e}^x dx$$

Qual é o erro máximo cometido neste caso?

$$S_2(f, 0, 2) = \frac{h}{3}(f(0) + f(2) + 4f(0.5) + 4f(1.5) + 2f(1))$$

onde $h = (2 - 0)/4 = 0.5$. Fazendo as contas $S_2(f, 0, 2) = 6.3912102$.
Erro $|E| \leq 2h^5 \exp(2)/90 = 0.0051313...$